УДК 519.214

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ПОРОЖДЕННЫХ УСЛОВНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ СИГМА-АДДИТИВНОЙ МЕРЫ КОШИ[1]

© 2005 Е.А. Савинов, С.Я. Шатских[2]

В работе изучается схема серий асимптотически независимых случайных величин, порожденных конечномерными условными распределениями сигма-аддитивной меры Коши на сепарабельном гильбертовом пространстве. Для нормированных сумм таких серий в случае, когда размерность условных распределений стремится к бесконечности, установлена слабая сходимость к гауссовскому распределению.

Введение

Пусть $\mathbb{H}$ — вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $< \cdot, \cdot >$, ортонормированным базисом $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ и борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}(\mathbb{H})$. Будем рассматривать на измеримом пространстве $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H})\}$ счетно-аддитивную меру Коши μ с характеристическим функционалом

$$\Psi_\mu(y) = \exp\left[-\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 < y, e_j >^2\right)^{1/2}\right], \ \ y \in \mathbb{H},$$

где $\lambda_j > 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 < +\infty$.

Рассматривая линейные функционалы в качестве случайных величин, введем функцию распределения системы $< \cdot, e_1 >, \ldots, < \cdot, e_n >$:

$$F_{1\ldots n}(x_1, \ldots, x_n) := \mu\{h \in \mathbb{H} : < h, e_1 > \leqslant x_1, \ \ldots \ , < h, e_n > \leqslant x_n\}.$$

Обозначая через $\widehat{\ }$ знак пропуска элемента, рассмотрим

$$F_{i|1\ldots\widehat{i}\ldots n}(x_i | \, x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n)$$

[1]Представлена доктором физико-математических наук профессором С.В. Асташкиным. Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ НШ-1758.2003.1

[2]Шатских Сергей Яковлевич (shatskih@ssu.samara.ru), Савинов Евгений Анатольевич, кафедра теории вероятностей и математической статистики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

— условную функцию распределения случайной величины $< h, e_i >$ относительно системы случайных величин:

$$< h, e_1 >, \ldots, \widehat{< h, e_i >}, \ldots, < h, e_n > .$$

В работе мы будем изучать свойства следующей системы случайных величин

$$\Phi^{-1}\left(F_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots n}(x_i|x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n)\right), \quad i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

где $x_i =< x, e_i >$, $x \in \mathbb{H}$ и $\Phi^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная функции стандартного гауссовского распределения $\Phi(\cdot)$.

Введенная система (1) неоднократно являлась объектом исследований в связи с изучением свойств преобразований независимости негауссовских случайных величин. В частности, в работе [1] было установлено, что при $n \to \infty$ система случайных величин (1) является асимптотически независимой и для нее имеет место усиленный закон больших чисел.

1. Основной результат

Введем вспомогательные обозначения для случайных величин системы (1)

$$X_i^{(n)}(x) := \Phi^{-1}\left(F_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots n}(x_i|x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n)\right), \quad i = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Целью настоящей работы является доказательство следующей предельной теоремы для схемы серий асимптотически независимых случайных величин.

Теорема. *Для любого $u \in \mathbb{R}$*

$$\mu\left\{x \in \mathbb{H} : \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i^{(n)}(x) \leqslant u\right\} \to \Phi(u), \quad n \to \infty. \tag{3}$$

2. Вспомогательные утверждения

Следуя работе [1], введем функционал $s_\infty^2(x)$ и множество сходимости Γ :

$$s_\infty^2(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{< x, e_i >^2}{\lambda_i^2},$$

$$\Gamma := \{x \in \mathbb{H} : 0 < s_\infty^2(x) < \infty\}.$$

В работе [1] установлено, что $\mu\{\Gamma\} = 1$.

Будем предполагать, что все вводимые далее случайные величины заданы на множестве Γ, и для краткости опускать аргумент x.

Обозначим

$$\xi_i := \frac{< x, e_i >}{\lambda_i s_\infty(x)}, \quad \eta := \frac{1}{s_\infty(x)}, \quad i = 1, 2, \dots . \tag{4}$$

Как показано в работах [1, 2], введенные случайные величины обладают следующими свойствами:

1) относительно меры μ система случайных величин
$$\eta^2, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots \tag{5}$$
независима;
2) случайные величины ξ_i имеют стандартное гауссовское распределение
$$\mu\{\xi_i \leqslant u\} = \Phi(u), \qquad \forall i \in \mathbb{N}; \tag{6}$$
3) плотность распределения случайной величины $s_\infty(x)$ имеет вид
$$g(u) := \frac{d}{du}\mu\{s_\infty(x) \leqslant u\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, u^{-2} e^{-1/2u^2}.$$

Заметим также, что из последнего соотношения следует, что случайная величина $\eta^2 = s_\infty^{-2}(x)$ является квадратом (0,1)-гауссовской случайной величины с плотностью распределения

$$p_{\eta^2}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u}}\, e^{-u/2}, \quad u > 0. \tag{7}$$

Кроме того, ввиду свойств (5) и (6),

$$\mu\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \leqslant u\right\} = \Phi(u), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Ниже мы будем использовать следующие вспомогательные обозначения:

$$A^{(n)} := \sqrt{\frac{n - 1/2}{\eta^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2}} - 1, \quad B_i^{(n)} := \sqrt{\frac{n}{\eta^2 + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \xi_k^2}} - 1, \tag{9}$$

$$U_i^{(n)} := \xi_i\left(\frac{X_i^{(n)}}{\xi_i} - 1\right).$$

Лемма 1. *При $n \to \infty$ имеет место сходимость по мере* μ :

$$1)\ \ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i A^{(n)} \xrightarrow{\mu} 0,$$

$$2)\ \ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i B_i^{(n)} \xrightarrow{\mu} 0.$$

Доказательство. 1. Заметим, что при $n \to \infty$ последовательность случайных величин $A^{(n)} \to 0$ μ-почти наверное:

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \mu\left\{\left|A^{(n)}\right| > \varepsilon\right\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Следовательно, существует последовательность $\varepsilon(n) \downarrow 0$ такая, что

$$\mu\left\{\left|A^{(n)}\right| > \varepsilon(n)\right\} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{10}$$

Обозначим

$$C^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i.$$

Тогда для любого $\varepsilon_1 > 0$

$$\mu\left\{\left|C^{(n)}A^{(n)}\right| > \varepsilon_1\right\} = \mu\left[\left\{\left|C^{(n)}A^{(n)}\right| > \varepsilon_1\right\} \cap \left\{\left|A^{(n)}\right| > \varepsilon(n)\right\}\right] +$$
$$+\mu\left[\left\{\left|C^{(n)}(x)A^{(n)}\right| > \varepsilon_1\right\} \cap \left\{\left|A^{(n)}\right| \leqslant \varepsilon(n)\right\}\right]. \tag{11}$$

Ввиду (8)

$$\mu\left\{\left|C^{(n)}\right| > \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon(n)}\right\} = \Phi\left(-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon(n)}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon(n)}\right) =$$
$$= 2\Phi\left(-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon(n)}\right) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{12}$$

Из соотношений (10)–(12) получим

$$\mu\left\{\left|C^{(n)}A^{(n)}\right| > \varepsilon_1\right\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

2. Рассмотрим математическое ожидание квадрата суммы

$$\mathbb{M}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i B_i^{(n)}\right)^2\right\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{M}\left\{\xi_i \xi_j B_i^{(n)} B_j^{(n)}\right\} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{M}\left\{\xi_i^2 \left[B_i^{(n)}\right]^2\right\} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}}_{i \neq j} \mathbb{M}\left\{\xi_i \xi_j B_i^{(n)} B_j^{(n)}\right\}. \tag{13}$$

Подсчитаем

$$\mathbb{M}\left\{\xi_i \xi_j B_i^{(n)} B_j^{(n)}\right\} =$$
$$= \int_0^\infty g(s) \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int \frac{t_i t_j}{(2\pi)^{n/2}} \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{s^2} + \sum\limits_{k=1,\, k\neq i}^{n} t_k^2}} - 1\right)\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{s^2} + \sum\limits_{k=1,\; k\neq j}^{n} t_k^2}} - 1\right) \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} t_k^2\right) dt_1 \dots dt_n\, ds =$$
$$= \int_0^\infty g(s) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-2}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \dots \int \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1,\, k\neq i,j}^{n} t_k^2\right) \times$$
$$\times \left[\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{t_i t_j}{2\pi} e^{\frac{t_i^2 + t_j^2}{2}} \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{s^2} + \sum\limits_{k=1,\, k\neq i}^{n} t_k^2}} - 1\right)\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{s^2} + \sum\limits_{k=1,\, k\neq j}^{n} t_k^2}} - 1\right) dt_i\, dt_j\right] \times$$

$$\times\, dt_1 \dots \widehat{dt_i} \dots \widehat{dt_j} \dots dt_n\, ds.$$

Нетрудно видеть, что двойной интеграл в квадратных скобках совпадает с выражением

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{s^2}+\sum\limits_{k=1,\,k\neq i,j}^{n} t_k^2 + t^2}} - 1\right) e^{-t^2/2}\, dt\right]^2,$$

которое равно нулю, так как подынтегральная функция нечетна.

Таким образом, для любых $i \neq j$

$$\mathbb{M}\left\{\xi_i\xi_j B_i^{(n)} B_j^{(n)}\right\} = 0. \tag{14}$$

Далее, используя независимость системы случайных величин (5), с учетом свойства (4) и формулы (8) получаем равенство

$$\mathbb{M}\left\{\xi_i^2\left[B_i^{(n)}\right]^2\right\} = \mathbb{M}\left\{\xi_i^2\right\}\mathbb{M}\left\{\left[B_i^{(n)}\right]^2\right\} = \mathbb{M}\left\{\left[B_i^{(n)}\right]^2\right\}.$$

Введем вспомогательное обозначение

$$Y := \mathbb{M}\left\{\xi_i^2\left[B_i^{(n)}\right]^2\right\}.$$

Тогда, учитывая предыдущее равенство, а также свойства (6), (7) и (9), будем иметь

$$Y = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\!\!\dots\!\int\left(1 - \sqrt{\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} t_k^2}}\right)^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} t_k^2\right) dt_1 \dots dt_n.$$

Переходя к сферической системе координат [3, с. 402–403], получим

$$Y = \frac{2n^{n/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\int_0^{\infty} e^{-n\rho^2/2}\rho^{n-3}(1-\rho)^2\, d\rho = \frac{n}{n-2} - \sqrt{2n}\;\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} + 1.$$

Далее, используя известную асимптотическую формулу для гамма-функций [4, с. 62], будем иметь

$$Y = \frac{n}{n-2} - 2\left[1 + \frac{3}{4}n + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + 1 = \frac{n+6}{2n(n-2)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2n}.$$

Таким образом, при $n \to \infty$

$$\mathbb{M}\left\{\xi_i^2\left[B_i^{(n)}\right]^2\right\} \sim \frac{1}{2n}. \tag{15}$$

Тогда из соотношений (13)–(15) следует равенство

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{M}\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}\xi_i B_i^{(n)}\right]^2\right\} = \frac{1}{2},$$

откуда, используя неравенство Чебышева, для любого $\varepsilon > 0$ будем иметь

$$\mu\left\{\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i B_i^{(n)}\right| > \varepsilon\right\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 n}\mathbb{M}\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}\xi_i B_i^{(n)}\right]^2\right\} \sim \frac{1}{2\varepsilon^2 n} \to 0$$

при $n \to \infty$. Лемма доказана.

Лемма 2. *При* $n \to \infty$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \mathbf{1}_{\{\xi_i \geqslant 0\}}\left[B_i^{(n)} - A^{(n)}\right] \xrightarrow{\mu} 0, \tag{16}$$

где $\mathbf{1}_{\{\xi_i \geqslant 0\}}$ *— индикатор случайного события* $\{\xi_i \geqslant 0\}$.

Доказательство. Левую часть соотношения (16) ввиду равенств (9) можно переписать следующим образом:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \mathbf{1}_{\{\xi_i \geqslant 0\}}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\eta^2 + \sum\limits_{k=1,\, k\neq i}^{n}\xi_k^2}} - \frac{\sqrt{n-1/2}}{\sqrt{\eta^2 + \sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + \sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k^2}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \mathbf{1}_{\{\xi_i \geqslant 0\}}\left(\sqrt{1 + \frac{\xi_i^2}{\eta^2 + \sum\limits_{k=1,\, k\neq i}^{n}\xi_k^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{2n}}\right). \tag{17}$$

По определению функционала $s_\infty(x)$ при $n \to \infty$ имеет место сходимость μ-почти наверное

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\eta^2 + \sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k^2}} \longrightarrow 1, \quad n \to \infty. \tag{18}$$

Рассмотрим представление

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \mathbf{1}_{\{\xi_i \geqslant 0\}}\left(\sqrt{1 + \frac{\xi_i^2}{\eta^2 + \sum\limits_{k=1,\, k\neq i}^{n}\xi_k^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{2n}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \mathbf{1}_{\{\xi_i \geqslant 0\}}\left(\sqrt{1 + \frac{\xi_i^2}{\eta^2 + \sum\limits_{k=1,\, k\neq i}^{n}\xi_k^2}} - 1\right) + \tag{19}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \mathbf{1}_{\{\xi_i \geqslant 0\}}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2n}}\right).$$

Вначале установим сходимость по мере

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \mathbf{1}_{\{\xi_i \geqslant 0\}}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2n}}\right) \xrightarrow{\mu} 0, \quad n \to \infty. \tag{20}$$

Действительно, в силу неравенства Чебышева, для любого $\varepsilon > 0$

$$\mu\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\mathbf{1}_{\{\xi_i\geqslant 0\}}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{2n}}\right)\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon\sqrt{n}}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{2n}}\right)n\mathbb{M}\left\{\xi_i\mathbf{1}_{\{\xi_i\geqslant 0\}}\right\}=\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{2\pi n}\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{2n}}\right)}\to 0$$

при $n\to\infty$.

Займемся первым слагаемым в сумме (19) и покажем, что

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\mathbf{1}_{\{\xi_i\geqslant 0\}}\left(\sqrt{1+\frac{\xi_i^2}{\eta^2+\sum\limits_{k=1,\,k\neq i}^{n}\xi_k^2}}-1\right)\xrightarrow{\mu}0,\quad n\to\infty. \tag{21}$$

Вначале, пользуясь известным неравенством Бернулли

$$1+\alpha\geqslant\sqrt{1+2\alpha},\quad \alpha\geqslant 0,$$

получим следующую оценку:

$$0\leqslant\sqrt{1+\frac{\xi_i^2}{\eta^2+\sum\limits_{k=1,\,k\neq i}^{n}\xi_k^2}}-1\leqslant\frac{\xi_i^2/2}{\eta^2+\sum\limits_{k=1,\,k\neq i}^{n}\xi_k^2}.$$

Отсюда находим

$$0\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\mathbf{1}_{\{\xi_i\geqslant 0\}}\left(\sqrt{1+\frac{\xi_i^2}{\eta^2+\sum\limits_{k=1,\,k\neq i}^{n}\xi_k^2}}-1\right)\leqslant \tag{22}$$

$$\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^3\mathbf{1}_{\{\xi_i\geqslant 0\}}\frac{1}{\eta^2+\sum\limits_{k=1,\,k\neq i}^{n}\xi_k^2}.$$

Так как с учетом независимости (5) и формул (6) и (7)

$$\mathbb{M}\left\{\xi_i^3\mathbf{1}_{\{\xi_i\geqslant 0\}}\right\}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}},\quad \mathbb{M}\left\{\frac{1}{\eta^2+\sum\limits_{k=1,\,k\neq i}^{n}\xi_k^2}\right\}=\frac{1}{n-2},$$

то, переходя к пределу в соотношении (22) при $n\to\infty$, пользуясь неравенством Чебышева и свойством независимости (5), для любого $\varepsilon>0$ будем иметь

$$\mu\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\mathbf{1}_{\{\xi_i\geqslant 0\}}\left(\sqrt{1+\frac{\xi_i^2}{\eta^2+\sum\limits_{k=1,\,k\neq i}^{n}\xi_k^2}}-1\right)\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{M}\left\{\xi_i^3\mathbf{1}_{\{\xi_i\geqslant 0\}}\right\}\mathbb{M}\left\{\frac{1}{\eta^2+\sum\limits_{k=1,\,k\neq i}^{n}\xi_k^2}\right\}=\frac{\sqrt{n}}{(n-2)\varepsilon\sqrt{2\pi}}\longrightarrow 0.$$

Далее, из формул (19)–(21) при $n\to\infty$ следует сходимость

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\mathbf{1}_{\{\xi_i\geqslant 0\}}\left(\sqrt{1+\frac{\xi_i^2}{\eta^2+\sum\limits_{k=1,\,k\neq i}^{n}\xi_k^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{2n}}\right)\xrightarrow{\mu} 0. \tag{23}$$

Таким образом, формулы (17), (18) и (23) влекут за собой утверждение (16). Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы

Разобъем сумму в формуле (3) на два слагаемых

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}X_i^{(n)}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\left[\frac{X_i^{(n)}}{\xi_i}-1\right]+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i.$$

Тогда для доказательства справедливости утверждения теоремы достаточно показать [5, с. 111] сходимость по вероятности

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\left[\frac{X_i^{(n)}}{\xi_i}-1\right]\xrightarrow{\mu} 0,\quad n\to\infty. \tag{24}$$

Как известно (см., например, [1]),

$$F_{i|1\ldots\hat{\imath}\ldots n}(x_i|x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}B\left(\dfrac{1+\sum\limits_{k=1,k\neq i}^{n}x_k^2/\lambda_k^2}{1+\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2/\lambda_k^2};\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right), & x_i\geqslant 0,\\[2ex] \frac{1}{2}B\left(\dfrac{1+\sum\limits_{k=1,k\neq i}^{n}x_k^2/\lambda_k^2}{1+\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2/\lambda_k^2};\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right), & x_i<0,\end{cases} \tag{25}$$

где $B(\cdot\,;\alpha,\beta)$ — бета-распределение.

Воспользуемся известной оценкой (см. [1]) для бета-распределений

$$1-\Phi\left(\sqrt{\frac{1}{u}}\right)\leqslant\frac{1}{2}B\left(\frac{nu}{1+nu};\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)\leqslant 1-\Phi\left(\sqrt{\frac{n-\frac{1}{2}}{1+nu}}\right). \tag{26}$$

Из формул (2), (25) и (26) с учетом обозначений (4) получим

$$\sqrt{\frac{n-1/2}{\eta^2+\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k^2}}\leqslant\frac{X_i^{(n)}}{\xi_i}\leqslant\sqrt{\frac{n}{\eta^2+\sum\limits_{k=1,\,k\neq i}^{n}\xi_k^2}}. \tag{27}$$

Используя обозначения (9) и оценки (27) для любого $i = 1, 2, \dots,$ нетрудно получить неравенства

$$A^{(n)}\xi_i \mathbf{1}_{\{\xi_i \geqslant 0\}} \leqslant U_i^{(n)} \mathbf{1}_{\{\xi_i \geqslant 0\}} \leqslant B_i^{(n)} \xi_i \mathbf{1}_{\{\xi_i \geqslant 0\}}$$

$$B_i^{(n)}\xi_i \mathbf{1}_{\{\xi_i < 0\}} \leqslant U_i^{(n)} \mathbf{1}_{\{\xi_i < 0\}} \leqslant A^{(n)} \xi_i \mathbf{1}_{\{\xi_i < 0\}}.$$

Складывая эти неравенства и суммируя по i, будем иметь

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i B_i^{(n)} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathbf{1}_{\{\xi_i \geqslant 0\}}(\xi_i) \left[A^{(n)} - B_i^{(n)} \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} U_i^{(n)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i A^{(n)} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathbf{1}_{\{\xi_i \geqslant 0\}}(\xi_i) \left[B_i^{(n)} - A^{(n)} \right].$$

Переходя к пределу в этом неравенстве, на основе лемм 1 и 2 получаем (24). Теорема доказана.

Литература

[1] Shatskih S.Ya. Asymptotic properties of conditional quantiles of the Cauchy distribution on Hilbert space // Journal of Math. Sciences. NY. 1999(4). V. 93. 4. P. 574–581.

[2] Шатских С.Я. Устойчивые эллиптически контурированные меры в гильбертовом пространстве: асимптотические свойства условных распределений // Изв. РАЕН Сер. МММИУ. 1999. Т. 3. С. 43–81.

[3] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Наука. 1969. 656 с.

[4] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 296 с.

[5] Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М.: Наука, 1986. 328 с.

Поступила в редакцию 31/*V*/2005;
в окончательном варианте — 31/*V*/2005.

CENTRAL LIMIT THEOREM FOR RANDOM VARIABLES GENERATED BY CONDITIONAL DISTRIBUTIONS OF A SIGMA-ADDITIVE CAUCHY MEASURE[3]

 E.A. Savinov, S.Ya. Shatskikh[4]

The paper is devoted to the study of a triangular array scheme of asymptotically independent random variables generated by finite-dimensional conditional distributions of a sigma-additive Cauchy measure, defined on real Hilbert space. In the case, when the dimension of conditional distributions approaches infinity, the central limit theorem for triangular array scheme is proved.

Paper received 31/ V/2005.
Paper accepted 31/ V/2005.

---

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. S.V. Astashkin.

[4]Savinov Eugene Anatolievich, Shatskikh Sergei Yakovlevich, Dept. of Probability Theory and Mathematical Statistics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.