МНОГООБРАЗИЕ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА, СВЯЗАННОЕ СО СТАНДАРТНЫМИ ТОЖДЕСТВАМИ

© 2005 Л.Е. Абанина, С.М. Рацеев¹

Пусть K — поле нулевой характеристики. В данной работе исследуется многообразие алгебр Лейбница $\widetilde{V}_2$, связанное с ассоциативной алгеброй Грассмана. Доказывается почти полиномиальность роста, почти конечность кодлины этого многообразия и свойство того, что оно является единственным наименьшим многообразием, в котором не выполняется ни одно стандартное тождество. Приводится базис тождеств, базисный ранг данного многообразия, базис пространства $P_n(\widetilde{V}_2)$ и строение полилинейной части $P_n(\widetilde{V}_2)$ как S_n -модуля.

Введение

Характеристика основного поля K предполагается равной нулю. В элементах договоримся опускать скобки при их левонормированной расстановке, то есть $abc = ((ab)c)$.

Многообразии алгебр Лейбница определяется тождеством (Т)

$$(xy)z = (xz)y + x(yz).$$

Другими словами, оператор правого умножения является дифференцированием алгебры. Если в многообразии алгебр Лейбница выполняется тождество $x^2 = 0$, то мы уже имеем дело с многообразием алгебр Ли. Одно из первых упоминаний алгебр Лейбница, которые являются обобщениями алгебр Ли, встречается в работе А.М. Блоха [1]. Алгебры Лейбница начали активно изучаться в 90-х годах, появился ряд публикаций отечественных и зарубежных авторов. Например, следует отметить работы [2–5].

Все необъяснимые ниже понятия можно найти в монографии [6]. Пусть V — многообразие алгебр Лейбница, $L(X) = K(X, V)$ — относительно свободная алгебра данного многообразия, где $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ — счетное множество свободных образующих. С помощью тождества (Т) любой элемент из $L(X)$

---

¹Абанина Любовь Евгеньевна, Рацеев Сергей Михайлович (Ratseevsm@rambler.ru), кафедра алгебро-геометрических вычислений Ульяновского государственного университета, 432700, Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42.

можно представить в виде линейной комбинации полиномов из $L(X)$, имеющих левонормированный вид.

Известно, что в случае поля нулевой характеристики вся информация о многообразии содержится в его полилинейной части $P_n = P_n(V)$. Напомним, что полилинейная часть степени n многообразия V является линейным подпространством в пространстве $L(X)$ и состоит из полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, \dots, x_n$. Полилинейные части для многообразий алгебр Лейбница есть векторные пространства вида:

$$P_n(V) = \langle x_{i_1} \dots x_{i_n} \mid \{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\} \rangle .$$

Размерность n -й полилинейной части многообразия определяет n -ю ко-размерность многообразия: $c_n(V) = \dim P_n(V)$. Если существуют такие константы C и r , что для любого n выполнено неравенство $c_n(V) \leq Cn^r$, то рост многообразия V называют полиномиальным. Многообразие имеет рост не выше показательного с основанием $r > 1$, если существует такое число $C > 0$, что для любого n выполняется неравенство $c_n(V) < Cr^n$. Многообразии V имеет почти полиномиальный рост, если любое его собственное подмногообразие имеет полиномиальный рост, в то время как рост самого многообразия V полиномиальным не является.

Известно, что полилинейную часть степени n можно рассматривать как модуль над групповым кольцом KS_n , где S_n — симметрическая группа порядка n . Тогда полилинейную часть степени n можно разложить в прямую сумму неприводимых подмодулей. Число слагаемых в разложении полилинейной части степени n многообразия на неприводимые подмодули называется кодлинной многообразия $l_n(V)$.

Неприводимые представления S_n можно описывать на языке разбиений и диаграмм Юнга. Последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ называют разбиением числа n и обозначают $\lambda \vdash n$, если $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n$ и $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$. По каждому разбиению λ строится диаграмма Юнга, которая представляет из себя таблицу из k строк, а i -я строка состоит из λ_i клеток. Известно, что каждой диаграмме Юнга соответствует неприводимый S_n -модуль из разложения полилинейной части, и два модуля изоморфны тогда и только тогда, когда они соответствуют одной диаграмме.

Отметим, что тождества $x(yu) = 0$ и $x(yz) = -x(zu)$ являются следствиями тождества (Т).

Элементы, содержащие кососимметрический набор из n переменных, будем записывать без знака суммирования, помечая переменные этого набора чертой или волной сверху. Например, стандартный полином в наших обозначениях будет выглядеть следующим образом:

$$St_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n .$$

Интересным примером многообразия алгебр Ли почти полиномиального роста является многообразие, построенное И.Б. Воличенко в работах [7, 8].

Это многообразие, назовем его V_2 , является наименьшим в классе многообразий алгебр Ли, в которых не выполняется ни одно стандартное тождество. Многообразие, исследуемое в данной работе, которое обозначим через $\widetilde{V}_2$, является аналогом многообразия V_2 . Оно появилось в диссертационной работе первого автора [9]. Был построен базис пространства $P_n(\widetilde{V}_2)$, показаны строение полилинейной части как S_n -модуля и свойство почти полиномиальности роста $c_n(\widetilde{V}_2)$. Позже вторым автором было получено свойство того, что $\widetilde{V}_2$ является наименьшим многообразием, в котором не выполняется ни одно стандартное тождество, приведен базис тождеств и базисный ранг этого многообразия, выведены новые тождества, с помощью которых проведена детализация некоторых доказательств, полученных первым автором свойств.

1. Определение многообразия $\widetilde{V}_2$

Рассмотрим G — алгебру Грассмана с порождающим множеством $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$. Относительно операции коммутирования, которую обозначим $[g_1, g_2] = g_1g_2 - g_2g_1$, получим алгебру Ли $G^{(-)}$.

Векторное пространство G с нулевым умножением будет рассматриваться как абелева алгебра Ли, которую обозначим через G^0 . Зададим действие элементов $G^{(-)}$ на G^0 следующим образом: $g_i^0g_j = (g_i g_j)^0$, $g_j g_i^0 = 0$, где $g_i^0, (g_i g_j)^0$ из G^0 и g_j из $G^{(-)}$. Такое действие задает представление $G^{(-)}$ на G^0 .

Определим $\widetilde{G}$ как прямую сумму векторных пространств $G^{(-)}$ и G^0 ($\widetilde{G} = G^{(-)} \oplus G^0$) с умножением $(g_1 + g_1^0)(g_2 + g_2^0) = [g_1, g_2] + g_1^0g_2^0$. Нетрудно проверить, что полученная алгебра будет алгеброй Лейбница.

Лемма 1. В алгебре $\widetilde{G}$ выполняются следующие тождества:

$$y_1(y_2(y_3y_4)) = 0, \quad (1.1)$$

$$x_0\bar{x}A\bar{y}B\bar{x}C\bar{y} = 0, \quad x_0\bar{x}A\bar{x}B\bar{y}C\bar{y} = 0, \quad x_0\bar{x}A\bar{x}B\bar{y}C\bar{y} = 0, \quad (1.2)$$

где A, B, C — некоторые, возможно пустые, мономы от внутренних дифференцирований.

Доказательство. Чтобы проверить выполнение любого из данных тождеств, нужно просто подставить в него произвольные элементы алгебры $\widetilde{G}$. Сначала проверим (1.1):

$$\begin{aligned} (g_1 + g_1^0)\{(g_2 + g_2^0)\{(g_3 + g_3^0)(g_4 + g_4^0)\}\} &= (g_1 + g_1^0)\{(g_2 + g_2^0)([g_3, g_4] + g_3^0g_4^0)\} = \\ &= (g_1 + g_1^0)([g_2, [g_3, g_4]] + g_2^0[g_3, g_4]) = 0. \end{aligned}$$

При этом был использован тот факт, что в алгебре Грассмана выполняется тождество $[x, y, z] = 0$.

Аналогично проверяется справедливость каждого из тождеств (1.2). Например, после подстановки в первый полином произвольных элементов алгебры $\widetilde{G}$ получим элемент $(g_0\bar{g}_1A\bar{g}_2B\bar{g}_1C\bar{g}_2)^0$, который равен нулю в алгебре

G^0 в силу того, что содержит внутри себя две одинаковые кососимметричные пары.

Лемма 2. В алгебре $\tilde{G}$ не выполняется ни одно стандартное тождество.

Доказательство. Подставим в полином $St_m(x_1, \dots, x_m)$ вместо переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$ соответственно $e_1^0, e_2, \dots, e_m$. Получим

$$St_m(e_1^0, e_2, \dots, e_m) = e_1^0 St_{m-1}(e_2, \dots, e_m) = (m-1)! e_1^0 e_2 \dots e_m.$$

Обозначим через $\tilde{V}_2$ многообразие алгебр Лейбница, порожденное алгеброй $\tilde{G}$.

Далее нам понадобится понятие "тонкий крюк", которое обозначает таблицу с первой строкой длины $n-p$, а все остальные p строк длины 1.

Лемма 3. Если в диаграмме Юнга будет больше одной клетки вне тонкого крюка, то элемент, соответствующий такому разбиению, будет равен нулю в многообразии $\tilde{V}_2$.

Доказательство. Согласно работе [10], диаграмме Юнга, содержащей больше двух клеток во второй строке, будет соответствовать элемент, являющийся суммой полиномов вида (1.2). По лемме 1 такие элементы равны нулю в многообразии $\tilde{V}_2$. Если диаграмма Юнга будет содержать больше двух клеток во втором столбце, то ситуация аналогична.

2. Базис пространства $P_n(\tilde{V}_2)$

Теорема 1. Базисом пространства полилинейных элементов $P_n(\tilde{V}_2)$ многообразия $\tilde{V}_2$ являются элементы вида

$$\Theta_{(i, j_1, \dots, j_s)} = x_i x_{i_1} \dots x_{i_r} (x_{j_1} x_{j_2}) \dots (x_{j_{s-1}} x_{j_s}),$$

где $i_1 < i_2 < \dots < i_r$, $j_1 < j_2 < \dots < j_s$, $n = s + r + 1$, $i \neq i_k$, $i \neq j_l$ при $k = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, s$.

Размерность пространства $P_n(\tilde{V}_2)$ равна $n2^{n-2}$.

Доказательство. Сначала покажем, что в многообразии $\tilde{V}_2$ выполняется тождество

$$z(x_1 x_3)(x_2 x_4) = -z(x_1 x_4)(x_2 x_3). \quad (2.3)$$

Для этого проведем полную линеаризацию тождества

$$z(xy)(xy) = 0, \quad (2.4)$$

которое является частным случаем (1.2), и воспользуемся тождествами (Т) и (1.1):

$$\begin{aligned} z(x_1 x_3)(x_2 x_4) + z(x_2 x_3)(x_1 x_4) + z(x_1 x_4)(x_2 x_3) + z(x_2 x_4)(x_1 x_3) = \\ = 2z(x_1 x_3)(x_2 x_4) + 2z(x_1 x_4)(x_2 x_3) = 0 \quad \text{mod } Id(\tilde{V}_2), \end{aligned}$$

что и показывает выполнение тождества (2.3) в $\tilde{V}_2$.

Введем лексикографический порядок на начальном отрезке элемента до первой скобки $(x_i x_j)$. Берем произвольный элемент из $P_n(\widetilde{V}_2)$. В этом элементе можно делать следующее: сдвигать скобки, ставя их на произвольное место, начиная со второй позиции, внутри элемента по тождеству (1.1); в цепочке скобок

$$x_i \dots (x_{i_1} x_{j_1}) (x_{i_2} x_{j_2}) \dots (x_{i_k} x_{j_k})$$

можно упорядочить все переменные с помощью тождеств (2.3) и $x(yz) = -x(zy)$. Пусть этот элемент имеет вид $x_i \dots x_{i_2} x_{i_1} \dots (x_{j_1} x_{j_2}) \dots$ и $i_1 < i_2$. С помощью тождества (Т) этот элемент представляет собой сумму

$$x_i \dots x_{i_1} x_{i_2} \dots (x_{j_1} x_{j_2}) \dots + x_i \dots (x_{i_2} x_{i_1}) \dots (x_{j_1} x_{j_2}) \dots,$$

где первое слагаемое лексикографически меньше, чем исходный элемент, а у второго слагаемого количество одиночных переменных уменьшилось. Применяя такой же метод к полученным слагаемым, мы, в конечном итоге, представим наш исходный элемент как сумму слагаемых требуемого вида. Следовательно, произвольный элемент пространства $P_n(\widetilde{V}_2)$ записывается через линейную комбинацию элементов $\Theta_{(i, j_1, \dots, j_s)}$ по модулю $Id(\widetilde{V}_2)$.

Покажем, что элементы $\Theta_{(i, j_1, \dots, j_s)}$ являются линейно независимыми по модулю $Id(\widetilde{V}_2)$. Рассмотрим линейную комбинацию этих элементов:

$$\sum_{(i, j_1, \dots, j_s)} \alpha_{(i, j_1, \dots, j_s)} \Theta_{(i, j_1, \dots, j_s)} = 0.$$

Покажем, что все коэффициенты $\alpha_{(i, j_1, \dots, j_s)}$ равны нулю. Предположим противное. Рассмотрим элемент $\Theta_{(i, j_1, \dots, j_{2l})}$ с коэффициентом $\alpha_{(i, j_1, \dots, j_{2l})}$, не равным нулю, и с наименьшим количеством скобок l . Зафиксируем у него выборку одиночных переменных $(i_1, \dots, i_k)$, $n = 2l + k + 1$. Подставим элементы алгебры $\widetilde{G}$ следующим образом: вместо x_i подставим элемент g_0 из G^0 , вместо $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ — элементы из $G^{(-)}$ четной длины, в скобки подставим элементы из $G^{(-)}$ нечетной длины. Тогда после такой подстановки линейная комбинация примет вид

$$\alpha_{(i, j_1, \dots, j_{2l})} g_0 g_{i_1}^+ g_{i_2}^+ \dots g_{i_k}^+ (g_{j_1}^- g_{j_1}^-) \dots (g_{j_{2l-1}}^- g_{j_{2l}}^-) = 0.$$

Остальные элементы станут нулевыми, так как если в элементе будет такое же количество скобок, то выборка одиночных переменных будет другой и элемент четной длины попадет в некоторую скобку $(x_i x_j)$, если же количество скобок будет больше, чем l , то опять элемент четной длины попадет в скобку. Таким образом, коэффициент $\alpha_{(i, j_1, \dots, j_{2l})}$ равен нулю вопреки предположению. Следовательно, элементы $\Theta_{(i, j_1, \dots, j_s)}$ образуют базис пространства $P_n(\widetilde{V}_2)$.

В пространстве $P_n(\widetilde{V}_2)$ выделим подпространство полилинейных элементов, которые начинаются с переменной x_i :

$$Q_n^{(i)} = \langle x_i x_{i_1} \dots x_{i_r} (x_{j_1} x_{j_2}) \dots (x_{j_{s-1}} x_{j_s}) \rangle.$$

Подсчитаем количество элементов такого вида. Если число скобок будет l , то число элементов будет равно C_{n-1}^{2l} . Общее количество элементов задан-

ного вида выражается формулой $C_{n-1}^0 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$, которая по свойству биномиальных коэффициентов равна 2^{n-2} .

Учитывая то, что всего имеется n различных подпространств $Q_n^{(i)}$ и они не имеют общих ненулевых элементов, то размерность $P_n(\tilde{V}_2)$ равна $n2^{n-2}$.

3. Стрoение полилинейной части $P_n(\tilde{V}_2)$ как S_n -модуля и экстремальность роста $c_n(\tilde{V}_2)$

Лемма 4. В многообразии $\tilde{V}_2$ выполняются следующие тождественные соотношения по модулю $Id(\tilde{V}_2)$:

$$x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n (x_i \bar{x}_{n+1}) = \begin{cases} 0, & n\text{-четное,} \\ \frac{2}{n+1} x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_{n+1} x_i, & n\text{-нечетное,} \end{cases} \quad (3.5)$$

$$x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_{2n} = \frac{(2n)!}{(2n-2k)! 2^k} x_0 \bar{x}_{2k+1} \dots \bar{x}_{2n} (x_1 x_2) \dots (x_{2k-1} x_{2k}) \quad (3.6)$$

для любых $1 \leq i \leq n+1$, $1 \leq k \leq n$.

Доказательство. Соотношения (3.5) и (3.6) получаются за счет свойств симметрической группы и тождеств (Т), (1.1) и (2.3). Покажем справедливость первого тождества. Пусть n — четное. Тогда

$$\begin{aligned} x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n (x_i \bar{x}_{n+1}) &= (-1)^{i+1} \{x_0 x_i \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_{i-1} \bar{x}_{i+1} \dots \bar{x}_n (x_i \bar{x}_{n+1}) - \\ &\quad - x_0 \bar{x}_1 x_i \bar{x}_2 \dots \bar{x}_{i-1} \bar{x}_{i+1} \dots \bar{x}_n (x_i \bar{x}_{n+1}) + \dots\} = \\ &= (-1)^{i+1} \{x_0 (x_i \bar{x}_1) \bar{x}_2 \dots \bar{x}_{i-1} \bar{x}_{i+1} \dots \bar{x}_n (x_i \bar{x}_{n+1}) + \\ &\quad + \dots + x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_{i-1} \bar{x}_{i+1} \dots (x_i \bar{x}_n) (x_i \bar{x}_{n+1}) + x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_{i-1} \bar{x}_{i+1} \dots \bar{x}_n (x_i x_i)\}. \end{aligned}$$

Все слагаемые последнего выражения принадлежат $Id(\tilde{V}_2)$, так как, учитывая тождества (1.1), (2.3) и следствия тождества (Т), имеем:

$$\begin{aligned} x_0 \dots (xy) \dots (xz) \dots &= x_0 \dots (xy)(xz) \dots = \\ &= -x_0 \dots (xy)(zx) \dots = x_0 \dots (xx)(zy) \dots = 0 \quad \text{mod } Id(\tilde{V}_2). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Если n — нечетное, то по модулю $Id(\tilde{V}_2)$ выводим:

$$\begin{aligned} x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n (x_i \bar{x}_{n+1}) &= (-1)^{i+1} x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_{i-1} \bar{x}_{i+1} \dots \bar{x}_n x_i (x_i \bar{x}_{n+1}) = \\ &= (-1)^{i+1} \frac{2}{n+1} \{x_0 (x_i \bar{x}_{n+1}) \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_{i-1} \bar{x}_{i+1} \dots \bar{x}_n x_i + \\ &\quad + x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 (x_i \bar{x}_{n+1}) \dots \bar{x}_{i-1} \bar{x}_{i+1} \dots \bar{x}_n x_i + \dots + \\ &\quad + x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_{i-1} \bar{x}_{i+1} \dots \bar{x}_n (x_i \bar{x}_{n+1}) x_i\} = \frac{2}{n+1} x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_{n+1} x_i. \end{aligned}$$

Докажем тождество (3.6). По модулю $Id(\tilde{V}_2)$ имеем:

$$x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_{2n} = x_0 (x_1 \bar{x}_2) \bar{x}_3 \dots \bar{x}_{2n} + x_0 \bar{x}_2 \bar{x}_3 (x_1 \bar{x}_4) \dots \bar{x}_{2n} + \dots + x_0 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \dots (x_1 \bar{x}_{2n}).$$

Каждое слагаемое, в свою очередь, раскладывается следующим образом по модулю $Id(\tilde{V}_2)$ и с учетом (3.7):

$$x_0 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \dots (x_1 \bar{x}_{2s}) \dots \bar{x}_{2n} = x_0 (x_2 \bar{x}_3) \dots (x_1 \bar{x}_{2s}) \dots \bar{x}_{2n} +$$

$$\begin{aligned}
& +x_0\bar{x}_3\bar{x}_4(x_2\bar{x}_5)\dots(x_1\bar{x}_{2s})\dots\bar{x}_{2n} + \dots + x_0\bar{x}_3\bar{x}_4\dots(x_1x_2)\dots\bar{x}_{2n}- \\
& -x_0\bar{x}_3\bar{x}_4\dots(x_1\bar{x}_{2s+1})(x_2\bar{x}_{2s+2})\dots\bar{x}_{2n} - \dots - x_0\bar{x}_3\bar{x}_4\dots(x_1\bar{x}_{2s+1})\dots(x_2\bar{x}_{2n}) = \\
& = x_0(\bar{x}_3\bar{x}_{2s})\dots(x_1x_2)\dots\bar{x}_{2n} + x_0\bar{x}_3\bar{x}_4(\bar{x}_5\bar{x}_{2s})\dots(x_1x_2)\dots\bar{x}_{2n} + \dots + \\
& +x_0\bar{x}_3\bar{x}_4\dots(x_1x_2)\dots\bar{x}_{2n} + x_0\bar{x}_3\bar{x}_4\dots(x_1x_2)(\bar{x}_{2s+1}\bar{x}_{2s+2})\dots\bar{x}_{2n} + \dots + \\
& +x_0\bar{x}_3\bar{x}_4\dots(x_1x_2)\dots(\bar{x}_{2s+1}\bar{x}_{2n}) = (2n-1)x_0\bar{x}_3\bar{x}_4\dots\bar{x}_{2n}(x_1x_2).
\end{aligned}$$

В итоге имеем следующее тождество для $k = 1$, которое при необходимости можно подвергнуть вышепродолженной процедуре и получить тождество (3.6) для произвольного $1 \leq k \leq n$:

$$x_0\bar{x}_1\bar{x}_2\dots\bar{x}_{2n} = n(2n-1)x_0\bar{x}_3\bar{x}_4\dots\bar{x}_{2n}(x_1x_2) \pmod{Id(\tilde{V}_2)}.$$

Замечание. При доказательстве тождественного соотношения (3.5) мы видели, что в случае нечетного n в нужный момент мы можем поставить x_i , стоящее вне скобок, на произвольное место, начиная со второй позиции. То есть имеет место следующее обобщенное тождество в многообразии $\tilde{V}_2$ при нечетном n и для любого $1 \leq i \leq n+1$:

$$x_0\bar{x}_1\bar{x}_2\dots\bar{x}_n(x_i\bar{x}_{n+1}) = \frac{2}{n+1}x_0\bar{x}_1\bar{x}_2\dots x_i\bar{x}_j\dots\bar{x}_{n+1} \pmod{Id(\tilde{V}_2)}.$$

Лемма 5. Многообразию $\tilde{V}_2$ имеет следующее строение полилинейной части:

$$P_n(\tilde{V}_2) = KS_n(\text{lin } x^n) \oplus_{p=1}^{n-2} (A_p^1 \oplus A_p^2) \oplus_{p=2}^{n-2} B_p \oplus KS_n(\bar{x}_1\dots\bar{x}_n), \quad (3.8)$$

где под обозначением lin понимается полная линейаризация полинома

$$A_p^1 = KS_n(\text{lin } x_1\bar{x}_1\dots\bar{x}_{p+1}x_1^{n-p-2}), \quad A_p^2 = KS_n(\text{lin } \bar{x}_1\dots\bar{x}_{p+1}x_1^{n-p-1}),$$

причем неприводимые модули A_p^1 и A_p^2 соответствуют разбиению $(n-p, 1^p)$, неприводимый модуль $B_p = KS_n(\text{lin } \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_1\dots\bar{x}_p x_1^{n-p-2})$ соответствует разбиению $(n-p, 2, 1^{p-2})$.

Доказательство. Из леммы 3 видно, что в разложение $P_n(\tilde{V}_2)$ могут входить лишь те модули, которые соответствуют разбиениям (n) , $(n-p, 1^p)$ при $p \geq 1$, $(n-p, 2, 1^{p-2})$ при $p \geq 2$ и (1^n) .

I. Рассмотрим случай разбиения $(n-p, 1^p)$, $p \geq 1$. Обозначим через a_p^1 и a_p^2 полиномы $x_1\bar{x}_1\dots\bar{x}_{p+1}x_1^{n-p-2}$ и $\bar{x}_1\dots\bar{x}_{p+1}x_1^{n-p-1}$ соответственно. Докажем, что любой элемент, построенный по этому разбиению, выражается линейно по модулю $Id(\tilde{V}_2)$ через a_p^1 и a_p^2 . Данный элемент содержит кососимметрический набор из $p+1$ переменных. Он может начинаться либо с x_1 , либо с переменной, принадлежащей этому набору, т.е. с $\bar{x}_1$. Рассмотрим оба эти случая.

1) Данный элемент имеет следующий общий вид:

$$g_d = x_1x_1^a\bar{x}_1x_1^b\dots x_1^c\bar{x}_{p+1}x_1^d.$$

Используя тождество (Т), представим этот элемент как сумму полинома a_p^1 и элементов вида $x_1 \dots (x_1 \bar{x}_i) \dots$. С помощью соотношений (1.1) и (3.7) упорядочим переменные кососимметрического набора в элементах со скобками. Тогда g_d примет следующий вид:

$$g_d = a_p^1 + \alpha x_1 \bar{x}_1 \dots \bar{x}_p (x_1 \bar{x}_{p+1}) x_1^{n-p-3} \pmod{Id(\tilde{V}_2)}.$$

Используя лемму 4, в конечном итоге получаем $g_d = \beta a_p^1 \pmod{Id(\tilde{V}_2)}$.

2) Пусть элемент g_d начинается с $\bar{x}_1$. Сначала приведем его к виду $a_p^2 + \alpha \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_p (x_1 \bar{x}_{p+1}) x_1^{n-p-2}$. Затем, если p — нечетное, то, используя метод, примененный в лемме 4, получаем

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_p (x_1 \bar{x}_{p+1}) = x_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_p (x_1 \bar{x}_{p+1}) = \frac{2}{p+1} x_1 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_p \bar{x}_{p+1} \pmod{Id(\tilde{V}_2)}.$$

Пусть p — четное. Тогда по модулю $Id(\tilde{V}_2)$ имеем:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_p (x_1 \bar{x}_{p+1}) &= x_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_p (x_1 \bar{x}_{p+1}) - \bar{x}_2 x_1 \dots \bar{x}_p (x_1 \bar{x}_{p+1}) = \\ &= \frac{2}{p} \{x_1 \bar{x}_2 (x_1 \bar{x}_{p+1}) \dots \bar{x}_p + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 (x_1 \bar{x}_{p+1}) \dots \bar{x}_p + \dots + x_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_p (x_1 \bar{x}_{p+1})\} - \\ &\quad - \frac{2}{p} \{\bar{x}_2 (x_1 \bar{x}_{p+1}) \dots \bar{x}_p x_1 + \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 (x_1 \bar{x}_{p+1}) \dots \bar{x}_p x_1 + \dots + \bar{x}_2 \dots \bar{x}_p (x_1 \bar{x}_{p+1}) x_1\}. \end{aligned}$$

Прибавив к последнему выражению элемент

$$\frac{2}{p} (x_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_{p+1} x_1 - x_1 x_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_{p+1}),$$

который принадлежит $Id(\tilde{V}_2)$, получим

$$\bar{x}_1 \dots \bar{x}_p (x_1 \bar{x}_{p+1}) = \frac{2}{p} (-x_1 \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{p+1} + \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{p+1} x_1) \pmod{Id(\tilde{V}_2)}.$$

Покажем, что элементы a_p^1 и a_p^2 являются линейно независимыми по модулю $Id(\tilde{V}_2)$. Рассмотрим линейное соотношение

$$\alpha x_1 \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{p+1} x_1^{k-1} + \beta \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{p+1} x_1^k = 0.$$

Сделаем следующую подстановку: $x_{p+1} = e_{p+1}^0, x_2 = e_2, \dots, x_p = e_p$, если p — четное, то $x_1 = e_{i_1} e_{j_1} + \dots + e_{i_k} e_{j_k} + e_1$, если p — нечетное, то $x_1 = e_{i_1} e_{j_1} + \dots + e_{i_{k+1}} e_{j_{k+1}}$, где все e_s различные. Отсюда получаем, что коэффициент β равен нулю. Если сделаем подстановку: $x_2 = e_2, x_3 = e_3, \dots, x_{p+1} = e_{p+1}, x_1 = (e_{i_1} e_{j_1} + \dots + e_{i_k} e_{j_k}) + e_1^0$ при четном p и $x_1 = (e_{i_1} e_{j_1} + \dots + e_{i_{k-1}} e_{j_{k-1}} + e_s) + e_1^0$ при нечетном p , где все образующие различны, то получим, что и $\alpha = 0$.

II. Рассмотрим случай разбиения $(n-p, 2, 1^{p-2})$, $p \geq 2$. Обозначим через b_p полином $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \dots \bar{x}_p x_1^{n-p-2}$. Покажем, что любой элемент, построенный по этому разбиению, выражается линейно по модулю $Id(\tilde{V}_2)$ через b_p . Данный элемент содержит два кососимметрических набора из двух и p переменных. Поэтому, учитывая соотношения (1.2), этот элемент начинается с переменной, которая принадлежит одному из кососимметрических наборов. Разберем оба случая в отдельности.

1) Элемент g_d имеет следующий общий вид:

$$g_d = \tilde{x}_1 x_1^a \tilde{x}_1 \dots x_1^b \tilde{x}_i x_1^c \tilde{x}_2 \dots$$

Будем передвигать $\tilde{x}_2$ на второе место. Для начала заметим, что

$$\tilde{x}_1 \dots x_1 \tilde{x}_2 \dots = \tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_2 x_1 \dots \pmod{Id(\tilde{V}_2)}.$$

Передвигая $\tilde{x}_2$ на второе место, мы получим сумму полинома b_p и элементов вида $\tilde{x}_1 \dots (\tilde{x}_i \tilde{x}_2) \dots$. Каждое такое слагаемое со скобкой приведем к виду $\tilde{x}_1 \tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_{p-1} (\tilde{x}_p \tilde{x}_2) x_1^{n-p-2}$, так как

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 \dots (x_1 \tilde{x}_j) \dots (\tilde{x}_i \tilde{x}_2) \dots &= \tilde{x}_1 \dots (x_1 \tilde{x}_j) (\tilde{x}_i \tilde{x}_2) \dots = -\tilde{x}_1 \dots (x_1 \tilde{x}_2) (\tilde{x}_i \tilde{x}_j) \dots = \\ &= -x_1 \dots (x_1 x_2) \tilde{x}_i \tilde{x}_j \dots + x_1 \dots (x_1 x_2) \tilde{x}_j \tilde{x}_i \dots = 0 \pmod{Id(\tilde{V}_2)}. \end{aligned}$$

Используя замечание к лемме 4, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 \tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_{p-1} (\tilde{x}_p \tilde{x}_2) &= x_1 \tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_{p-1} (\tilde{x}_p x_2) - x_2 \tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_{p-1} (\tilde{x}_p x_1) = \\ &= \begin{cases} 0, & p - \text{нечетное,} \\ \frac{2}{p} (-x_1 x_2 \tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_p + x_2 x_1 \tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_p), & p - \text{четное.} \end{cases} \end{aligned}$$

2) Элемент g_d записывается в следующем виде:

$$g_d = \bar{x}_1 x_1^a \dots \bar{x}_i x_1^b \tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_2 \dots$$

Сначала будем двигать $\tilde{x}_2$ к $\tilde{x}_1$. При этом будем учитывать, что

$$\dots \tilde{x}_1 \dots x_1 \tilde{x}_2 \dots = \dots \tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_2 x_1 \dots + \dots x_1 \dots \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \dots \pmod{Id(\tilde{V}_2)},$$

то есть при перемещении $\tilde{x}_2$ мы получим слагаемые вида $\bar{x}_1 \dots \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \dots$ и $\bar{x}_1 \dots (\tilde{x}_i \tilde{x}_2) \dots$. Первый полином приводится к $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_p \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 x_1^{n-p-2}$, второй полином приводится к виду

$$\alpha \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{p-1} (\bar{x}_p \tilde{x}_1) \tilde{x}_2 x_1^{n-p-2} + \beta \bar{x}_1 \dots \bar{x}_p \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 x_1^{n-p-2}.$$

Преобразуя первое слагаемое таким же путем, как в пункте 2 при разбиении $(n-p, 1^p)$, мы получим следующее представление элемента g_d по модулю $Id(\tilde{V}_2)$:

$$g_d = \gamma \bar{x}_1 \dots \bar{x}_p \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 x_1^{n-p-2} + \delta \bar{x}_1 \bar{x}_1 \dots \bar{x}_p \tilde{x}_2 x_1^{n-p-2}.$$

При нечетном p первое слагаемое принадлежит $Id(\tilde{V}_2)$. При четном p делаем следующее:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 \dots \bar{x}_p \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 &= x_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_p \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 - \bar{x}_2 x_1 \dots \bar{x}_p \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 = \\ &= x_1 x_2 \bar{x}_3 \dots \bar{x}_p \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 - x_2 x_1 \bar{x}_3 \dots \bar{x}_p \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 = \bar{x}_1 \tilde{x}_2 \bar{x}_3 \dots \bar{x}_p (x_1 x_2) \pmod{Id(\tilde{V}_2)}. \end{aligned}$$

Далее, пользуясь тождеством (3.6) при $k=1$, получим

$$\bar{x}_1 \dots \bar{x}_p \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 = \bar{x}_1 \tilde{x}_2 \bar{x}_3 \dots \bar{x}_p (x_1 x_2) = \frac{2}{p(p-1)} \bar{x}_1 \tilde{x}_2 \bar{x}_1 \dots \bar{x}_p \pmod{Id(\tilde{V}_2)}.$$

Следовательно, любой элемент, построенный по разбиению $(n-p, 2, 1^{p-2})$ при $p \geq 2$, выражается линейно через b_p по модулю $Id(\tilde{V}_2)$. То, что элемент b_p

не равен нулю в многообразии $\widetilde{V}_2$, проверяется следующей подстановкой: $x_2 = e_s + e_2^0, x_3 = e_3, \dots, x_p = e_p, x_1 = e_{i_1}e_{j_1} + \dots + e_{i_{n-p-1}}e_{j_{n-p-1}} + e_1$ при четном p и $x_1 = e_{i_1}e_{j_1} + \dots + e_{i_{n-p}}e_{j_{n-p}}$ при нечетном p , где все образующие различны.

Элемент $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n$ не равен нулю в многообразии $\widetilde{V}_2$ по лемме 2, а подстановка вместо x элемента алгебры $\widetilde{G}$ $(e_1e_2) + e_1^0 + \dots + (e_{2n-3}e_{2n-2}) + e_1^0$ в полином x^n показывает, что и x^n не равен нулю в $\widetilde{V}_2$.

Из леммы 5 видно, что кодлина многообразия $\widetilde{V}_2$ является полиномиальной и равна $3n - 5$ для любого $n \geq 4$.

Теорема 2. Многообразии $\widetilde{V}_2$ имеет почти полиномиальный рост.

Доказательство. Многообразии $\widetilde{V}_2$ имеет экспоненциальный рост, так как размерность полилинейной части $P_n(\widetilde{V}_2)$ равна $n2^{n-2}$ (теорема 1).

Пусть V — некоторое собственное подмногообразие многообразия $\widetilde{V}_2$. Тогда для некоторых n и p должно выполняться одно из тождественных соотношений по модулю $Id(\widetilde{V}_2)$:

- 1) $x^n = 0$,
- 2) $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \dots \bar{x}_p x_1^{n-p-2} = 0$,
- 3) $\alpha x_1 \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{p+1} x_1^{n-p-2} + \beta \bar{x}_1 \dots \bar{x}_{p+1} x_1^{n-p-1} = 0, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$,
- 4) $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n = 0$.

Покажем, что в многообразии V выполняется тождество

$$x_0(x_1 x_2)(x_3 x_4) \dots (x_{2m-1} x_{2m}) = 0 \quad (3.9)$$

для некоторого m .

Если в V выполняется случай 1), то, подставив вместо переменной x полином $x_0(x_1 x_2) + (x_3 x_4) + \dots + (x_{2m-1} x_{2m})$, получим следствие (3.9) при $m = n$.

Пусть выполняется тождество из 2). Подставим вместо переменной x_2 полином $x_2 + (yy)$. Получим следствие

$$yux_1 \bar{x}_1 \dots \bar{x}_p x_1^{n-p-2} = 0.$$

Если p — четное, то преобразуем это следствие с помощью тождества (3.6). Если p — нечетное, то вместо x_p подставляем скобку $(x_p x_{p+1})$, а затем применяем тождество (3.6). Получаем новое следствие

$$yux_1(x_1 x_2) \dots (x_q x_{q+1}) x_1^{n-p-2} = 0,$$

где $q = p - 1$ при четном p и $q = p$ при нечетном p . Далее, вместо x_1 подставим $(y_1 z_1) + \dots + (y_{n-p-1} z_{n-p-1}) + x_1$, а переменную y заменим на $t_1(t_2 t_3) + (t_4 t_5)$. Получим следствие (3.9) с фиксированным числом m .

Пусть в многообразии V выполняется тождество из случая 3). Если $\beta = 0$, то, проводя аналогичные рассуждения, получим следствие (3.9). Если $\beta \neq 0$, то вместо x_{p+1} подставим $(x_{p+1} x_{p+1})$ и аналогичным образом выводим следствие (3.9).

Случай 4) сводится к случаю 3) при $\alpha = 0$.

Мы показали, что в многообразии V выполняется тождество (3.9) из которого в силу (3.6) следует тождество

$$x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_{2m-1} \bar{x}_{2m} = 0. \quad (3.10)$$

Следовательно, учитывая разложение (3.8), существует константа C такая, что если диаграмма Юнга имеет большее число клеток вне первой строки чем C , то элемент из $P_n(V)$, соответствующий такому разбиению, принадлежит $Id(V)$. Это значит, что последовательность размерностей $c_n(V)$ имеет полиномиальный рост.

Лемма 6. Многообразию $\widetilde{V}_2$ имеет почти конечную кодлину.

Доказательство. Кодлина многообразия $\widetilde{V}_2$ является полиномиальной и равна $3n - 5$ для любого $n \geq 4$ (лемма 5). Пусть V — любое собственное подмногообразие многообразия $\widetilde{V}_2$. Тогда в V выполняется тождество (3.10). Учитывая это тождество и разложение (3.8), заключаем, что V имеет конечную кодлину.

4. $\widetilde{V}_2$ как наименьшее многообразие, в котором не выполняется ни одно стандартное тождество

Обозначим через M множество всех элементов алгебры $L(X)$ таких, что любое f из M не имеет своим следствием никакое стандартное тождество, а через $\bar{M}$ — множество всех полилинейных полиномов из M . Заметим, что множество тождеств $\bar{M}$ эквивалентно множеству тождеств M .

Лемма 7. Из множества $\bar{M}$ нельзя получить стандартное тождество.

Доказательство. Для начала отметим следующее. Пусть $f \in P_n$, то есть $f = \sum_{\tau \in S_n} \alpha_\tau x_{\tau(1)} \dots x_{\tau(n)}$. Подействуем на этот полином элементом $\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \sigma$ групповой алгебры KS_n . Получим

$$\left(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \sigma \right) \left(\sum_{\tau \in S_n} \alpha_\tau x_{\tau(1)} \dots x_{\tau(n)} \right) = \left(\sum_{\tau \in S_n} (-1)^\tau \alpha_\tau \right) St_n(x_1, \dots, x_n).$$

Поэтому, если $f \in \bar{M} \cap P_n$, то $(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \sigma) f = 0$.

Доказательство леммы будем вести от противного. Допустим, что из $\bar{M}$ можно вывести стандартное тождество $St_m(x_1, \dots, x_m) = 0$ для некоторого m . Это значит, что выполняется равенство

$$St_m(x_1, \dots, x_m) = \phi_1(f_1) + \dots + \phi_n(f_n), \quad (4.11)$$

где $f_1, \dots, f_n$ — некоторые элементы множества $\bar{M}$, $\phi_i = \psi_i^1 \circ \dots \circ \psi_i^{n_i}$ и $\phi_i(f_i) \in P_n$, а ψ_i^j есть отображение из $\bar{M}$ в $L(X)$, которое является либо умножением на некоторый моном справа или слева, либо подстановкой некоторого монома вместо какой-либо переменной. Так как для любого f_i , $i = 1, \dots, n$ выполняется свойство того, что f_i не имеет своим следствием никакое стандартное тождество, то полином $\phi_i(f_i)$ принадлежит множеству $\bar{M}$. На обе части равенства (4.11) подействуем элементом $\sum_{\sigma \in S_m} (-1)^\sigma \sigma$. В результате получим, что полином $St_m(x_1, \dots, x_m)$ является нулевым элементом в алгебре $L(X)$. Но это не так уже потому, что в алгебре $\bar{G}$ не выполняется ни одно стандартное тождество. Противоречие. Следовательно, из $\bar{M}$ нельзя вывести стандартное тождество.

Лемма 8. Множество M является вербальным идеалом алгебры $L(X)$.

Доказательство. Сначала покажем, что M является идеалом алгебры $L(X)$. Для этого достаточно проверить, что для любых $f, g \in M$ и для любого $h \in L(X)$ полиномы $f+g$, $(f)(h)$, $(h)(f)$ принадлежат M . Данные полиномы являются следствиями тождеств из M , а, следовательно, из M . Но по лемме 7 из $\bar{M}$ нельзя вывести стандартного тождества. Следовательно, $f+g$, $(f)(h)$, $(h)(f) \in M$.

Пусть ϕ — некоторый эндоморфизм алгебры $L(X)$. Тогда $\phi(M) \subseteq M$. Предположим противное, то есть существует полином $f \in M$ такой, что $\phi(f) \notin M$. Тогда, в силу определения множества M , из $\phi(f)$ можно вывести некоторое стандартное тождество $St_m(x_1, \dots, x_m) = 0$. Но это значит, что данное стандартное тождество является следствием тождества $f = 0$, то есть $f \notin M$. Противоречие. Следовательно, M является вербальным идеалом.

Теорема 3. $\tilde{V}_2$ — наименьшее многообразие алгебр Лейбница, в котором не выполняется ни одно стандартное тождество.

Доказательство. В классе многообразий алгебр Лейбница, в которых не выполняется ни одно стандартное тождество, $\tilde{V}_2$ является минимальным, поскольку в многообразии $\tilde{V}_2$ не выполняется ни одно стандартное тождество (лемма 2), и в любом собственном его подмногообразии выполняется некоторое стандартное тождество, которое является следствием тождества (3.10) (теорема 2).

Обозначим через V_{St} многообразие алгебр Лейбница, определяемое тождествами из M . Поскольку M является вербальным идеалом (лемма 8), то в многообразии V_{St} не выполняется ни одно стандартное тождество. Покажем, что V_{St} является наименьшим многообразием с таким свойством. Пусть V — многообразие алгебр Лейбница, в котором не выполняется ни одно стандартное тождество, с идеалом тождеств T . Из определения множества тождеств M следует, что $T \subseteq M$. Следовательно, V_{St} является подмногообразием многообразия V .

Из того, что $\tilde{V}_2$ является минимальным многообразием и существует наименьшее многообразие V_{St} , то $\tilde{V}_2$ и V_{St} совпадают.

Из свойств наименьшего элемента вытекает и его единственность.

5. Базис тождеств и базисный ранг многообразия $\tilde{V}_2$

Теорема 4. Базисом тождеств многообразия $\tilde{V}_2$ являются тождества (1.1) и (2.4).

Доказательство. Обозначим через V — многообразие алгебр Лейбница, определяемое тождествами (1.1) и (2.4). Для доказательства того, что $\tilde{V}_2$ определяется этими тождествами достаточно доказать равенство $P_n(\tilde{V}_2) = P_n(V)$. Поскольку $\tilde{V}_2 \subseteq V$, то $P_n(\tilde{V}_2) \subseteq P_n(V)$. При доказательстве леммы 5 использовались только следствия тождеств (1.1), (1.2) и (2.4). Поэтому для доказательства включения $P_n(V) \subseteq P_n(\tilde{V}_2)$ достаточно доказать, что тожде-

ства (1.2) выполняются в многообразии V . Заметим, что тождество (3.7) выполняется в V .

1) Пусть в полиномах (1.2) переменные одной из кососимметрической пары стоят рядом. С помощью тождества (1.1) эти полиномы сводятся к виду $x_0(xy)A\bar{x}B\bar{y}$. Представим этот полином на основании тождества (Т) в виде суммы

$$x_0(xy)A(xy)B + \sum_{i=1}^n x_0(xy)A\bar{x}b_1\dots b_{i-1}(b_i\bar{y})b_{i+1}\dots b_n.$$

Все слагаемые есть следствия тождеств (1.1), (2.4), (3.7).

2) Докажем, что тождество (см. (1.2))

$$x_0\bar{x}A\bar{x}B\bar{y}C\bar{y} = 0$$

выполняется в V (для остальных тождеств из (1.2) доказательство аналогичное). Вновь воспользуемся тождеством (Т); тогда находим

$$x_0\bar{x}A\bar{x}B\bar{y}C\bar{y} = x_0\bar{x}A\bar{x}E\bar{y} + \sum_i x_0\bar{x}A\bar{x}\dots(b_i\bar{y})\dots C\bar{y} \quad (E = BC),$$

$$x_0\bar{x}A\bar{x}E\bar{y} = x_0(xy)A\bar{x}E\bar{y} + x_0\bar{x}A(\bar{x}y)E\bar{y} + \sum_j x_0\bar{x}\dots(a_j\bar{y})\dots\bar{x}E\bar{y}.$$

Первое и второе слагаемые сводятся к случаю 1, так как по модулю $Id(V)$

$$x_0\bar{x}A(\bar{x}y)E\bar{y} = x_0xA(xy)Ey + x_0yA(yx)Ex = x_0\bar{x}A(xy)E\bar{y}.$$

Рассмотрим оставшиеся слагаемые:

$$x_0\bar{x}\dots(a_j\bar{y})\dots\bar{x}E\bar{y} = x_0\bar{x}\dots(a_j\bar{y})\dots(xy)E + \sum_k x_0\bar{x}\dots(a_j\bar{y})\dots\bar{x}\dots(e_k\bar{y})\dots$$

Применяя тождество (3.7), все слагаемые опять сводятся к случаю 1.

Таким образом, $\tilde{V}_2 = V$. Тождества (1.1) и (2.4) являются независимыми. Действительно, тождество (1.1) не может быть следствием (2.4), так как зависит от меньшего числа переменных. Если бы тождество (2.4) было следствием (1.1), то кодлина многообразия $\tilde{V}_2$ не ограничивалась бы никаким полиномом (см. [5]), а это противоречит лемме 6.

Лемма 9. Пусть V — некоторое собственное подмногообразие многообразия $\tilde{V}_2$. Тогда существует такое число $r = r(V)$, что любое подмногообразие в V может быть задано системой тождеств, зависящих не более, чем от r переменных.

Доказательство. Многообразие $\tilde{V}_2$ имеет конечный базис тождеств (теорема 4), и в любом фиксированном собственном подмногообразии V многообразия $\tilde{V}_2$ выполняется тождество (3.10) для некоторого m . Учитывая структуру $P_n(\tilde{V}_2)$ (лемма 5), вследствие тождества (3.10) в разложение $P_n(V)$ не будут входить те неприводимые S_n -модули, которые соответствуют диаграммам Юнга, имеющих длину первого столбца более некоторого числа. Это и доказывает справедливость леммы.

Теорема 5. Многообразие $\widetilde{V}_2$ имеет бесконечный базисный ранг. Любое собственное подмногообразие в $\widetilde{V}_2$ имеет конечный базисный ранг.

Доказательство. Пусть A — некоторая алгебра с k образующими из многообразия $\widetilde{V}_2$. Тогда в A выполняется тождество (3.9) при $m = [\frac{k}{2}] + 1$. Действительно, пусть $w_0, w_1, \dots, w_m$ — некоторые мономы, зависящие от образующих $a_1, \dots, a_k$ алгебры A . Подставим их в полином (3.9) вместо переменных с соответствующими индексами. Если степень одного из мономов w_i , $1 \leq i \leq m$, больше единицы, то

$$w_0(w_1w_2)\dots(w_{2m-1}w_{2m}) = 0$$

в силу тождества (1.1). Если же $w_i \in \{a_1, \dots, a_k\}$, $i = 1, \dots, m$, то снова получаем нуль в силу тождества (3.7), так как среди этих мономов будут присутствовать, как минимум, два одинаковых. Поскольку тождество (3.9) не выполняется в многообразии $\widetilde{V}_2$, то это многообразие не может порождаться своей относительно свободной алгеброй конечного ранга.

Пусть V — некоторое собственное подмногообразие в $\widetilde{V}_2$. Рассмотрим относительно свободную алгебру $K(X_r, V)$ данного многообразия ранга r от образующих $x_1, \dots, x_r$, где число r определяется из формулировки леммы 9. Предположим, что в $K(X_r, V)$ выполняется некоторое тождество $f = 0$, которое не выполняется в V . Это тождество является следствием некоторой системы тождеств, зависящих не более, чем от r переменных. Тогда эта система тождеств выполняется в многообразии V , что влечет и выполнение тождества $f = 0$ в V . Таким образом, многообразие V задается своей относительно свободной алгеброй $K(X_r, V)$.

Авторы выражают благодарность С.П. Мищенко за поддержку и внимание к работе.

Литература

- [1] Блох А.М. Об одном обобщении понятия алгебры Ли // Доклады Академии наук СССР. 1965. Т. 18. №3. С. 471–473.
- [2] V. Drensky, G.M.P. Cattaneo. Varieties of Metabelian Leibniz Algebras // J. Algebra and its applications. 1 (2002). No. 1. P. 31–50.
- [3] J.-L. Loday and T. Pirashvili. Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology. // Math. Ann. 296 (1992). P. 139–158.
- [4] Абанина Л.Е., Мищенко С.П. Некоторые многообразия алгебр Лейбница // Математические методы и приложения. Труды десятих математических чтений МГСУ. Москва: Союз. 2002. С. 95–99.
- [5] Abanina L.E., Mishchenko S.P. The variety of Leibniz algebras defined by the identity $x(yzt) = 0$ // Serdika Math. J. 29(2003). P. 291–300.
- [6] Бахтурин Ю.А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука. 1985.

- [7] Воличенко И.Б. Об одном многообразии алгебр Ли, связанном со стандартными тождествами // Весті АН БССР: Сер. фіз.-мат. наук. 1980. №1. С. 23–30.
- [8] Воличенко И.Б. Об одном многообразии алгебр Ли, связанном со стандартными тождествами // Весті АН БССР: Сер. фіз.-мат. наук. 1980. №2. С. 22–29.
- [9] Абанина Л.Е. Структура и тождества некоторых многообразий алгебр Лейбница. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ульяновск: УлГУ, 2003.
- [10] Мищенко С.П. Цветные диаграммы Юнга // Вестник МГУ. 1993. №1. С. 90–91.

Поступила в редакцию 16/VI/2005;
в окончательном варианте — 16/VI/2005.

MANIFOLD OF THE LEIBNIZ ALGEBRAS ASSOCIATED WITH STANDARD IDENTITIES

© 2005 L.E. Abanina, S.M. Ratseev²

Let K be a field of characteristic zero. In this paper the manifold of the Leibniz algebras $\widetilde{V}_2$ connected with associative Grassmann algebra is studied. It is proved that the variety $\widetilde{V}_2$ has almost polynomial growth and is the unique smallest variety in which no standard identity holds. The basis of the space of multilinear identities $P_n(\widetilde{V}_2)$, basis of the identities of $\widetilde{V}_2$ and a complete description of $P_n(\widetilde{V}_2)$ in the language of Young diagrams through the representation theory of the symmetric group S_n are given.

Paper received 16/VI/2005.

Paper accepted 16/VI/2005.

---

²Abanina Lyubov Evgenjevna, Ratseev Sergey Mikhaylovich (Ratseevsm@rambler.ru), Dept. of Algebraic and Geometric Computations, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, 432700, Russia.