

МАТЕМАТИКА

К 70-ЛЕТИЮ Л.М.БЕРКОВИЧА

© 2005 В.В.Белецкий¹, А.Д.Брюно², В.В.Козлов³, В.А.Кондратьев⁴,
 В.П.Маслов⁵, М.Л.Нечаевский⁶, С.П.Новиков⁷, С.Ю.Попов⁸,
 Н.Х.Розов⁹, Ю.Э.Сеницкий¹⁰

Настоящая статья посвящена 70-летию Льва Мейлиховича Берковича — одного из ведущих современных специалистов в области точного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и приложений методов точного интегрирования. Он начал заниматься указанной тематикой в начале 60-х годов XX столетия за несколько лет до революции, происшедшей в нелинейной физике и связанной с возрастанием числа точно решаемых (интегрируемых) моделей классической теории поля. Ярким проявлением этой революции был бум, охвативший тематику исследований, связанной с солитонами.

¹Белецкий Владимир Васильевич (Beletsky@Keldysh.ru), Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН; 125047, Россия, г.Москва, Миусская пл., 4

²Брюно Александр Дмитриевич (bruno@Keldysh.ru), Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН; 125047, Россия, г.Москва, Миусская пл., 4

³Козлов Валерий Васильевич (kozlov@pran.ru), Математический институт им. В.А.Стеклова РАН; 119991, Россия, г.Москва, ул. Губкина, 8

⁴Кондратьев Владимир Александрович (vla-kondratiev@yandex.ru), кафедра дифференциальных уравнений Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова; 119899, Россия, г.Москва, Ленинские горы, МГУ

⁵Маслов Виктор Павлович (V.P.Maslov@mail.ru), кафедра квантовой статистики и теории поля Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова; 119992, Россия, г.Москва, Воробьевы горы, МГУ

⁶Нечаевский Марк Лазаревич (mlnech@mail.ru), кафедра высшей математики Самарского государственного аэрокосмического университета; 443086, Россия, г.Самара, Московское шоссе, 36

⁷Новиков Сергей Петрович (novikov@ipst.umd.edu.ru), Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН; 119334, Россия, Московская обл., г.Черноголовка, пр-т Акад. Семенова, 1-а

⁸Попов Сергей Юрьевич (popov@ssu.samara.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета; 443011, Россия, г.Самара, ул. акад. Павлова, 1

⁹Розов Николай Христович (info@fpo.msu.ru), факультет глобальных процессов Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова; 119992, Россия, г.Москва, Воробьевы горы, МГУ

¹⁰Сеницкий Юрий Эдуардович (nis@ssaba.smr.ru), кафедра сопротивления материалов и строительной механики Самарского государственного архитектурно-строительного университета; 443001, Россия, г.Самара, ул. Молодогвардейская, 194

Создание в конце XIX века усилиями А.М. Ляпунова и А. Пуанкаре качественной теории дифференциальных уравнений и дальнейшее ее развитие привело к тому что математики перестали интересоваться проблемами интегрируемости. Заниматься ими считалось неблагодарным делом. В России, например, в первой половине XX века едва ли не единственным ученым, серьезно занимавшимся указанными проблемами, был Д.Д. Мордухай-Болтовской.

Хотя в механике никогда не ослабевал интерес к интегрируемым задачам, но связан он был, главным образом, с возможностью редукции к классическим интегрируемым системам. Исключение составляло начавшееся по инициативе Г. Биркгофа, Л.И. Седова и Л.В. Овсянникова применение теории групп Ли и алгебр Ли к гидродинамике и газовой динамике с целью нахождения инвариантных решений.

Л.М. Беркович родился 22 сентября 1935 г. в г. Куйбышеве (ныне г. Самара). Его мать — Галина Львовна Беркович (девичья фамилия — Шварц) — была учительницей. Его отец — Мейлих Эльевич Беркович — был врачом-офтальмологом; он принимал активное участие в ликвидации трахомы в Поволжье в 30-е годы прошлого столетия. С июля 1941 г. и до окончания войны был в Действующей армии начальником санитарного поезда, награжден орденами Красной Звезды и Отечественной войны, ему было присвоено звание заслуженного врача РСФСР.

В 1953 г. Л.М. Беркович окончил мужскую среднюю школу №13 г. Куйбышева с золотой медалью. Его школьным учителем математики был известный педагог-методист А.И. Сандлер. В том же году Л.М. Беркович поступил на математическое отделение физико-математического факультета Казанского государственного университета (КГУ) им. В.И. Ульянова-Ленина. Собеседование с ним перед зачислением проводил профессор В.В. Морозов. В университете Л.М. Беркович слушал лекции профессоров Б.М. Гагаева, Б.Л. Лаптева, В.В. Морозова, А.П. Нордена, А.З. Петрова, Л.И. Чибриковой, В.А. Яблокова, доцентов А.В. Дороднова, А.П. Широкова, А.В. Сульдина (двое последних стали затем профессорами) и др. Он специализировался на кафедре алгебры, курсовую и дипломную работы писал соответственно под руководством А.В. Дороднова и В.В. Морозова. В свободное от занятий время Л.М. Беркович увлекался классической музыкой, ее концерты нередко проходили в актовом зале, слушателями были студенты и преподаватели (вход был свободный). Немало выдающихся музыкантов (пианистов и скрипачей) на них выступало. Кстати, концертный рояль был доставлен из ГДР знаменитым казанским химиком акад. А.Е. Арбузовым. Вместе с другими студентами Л.М. Беркович посещал кинотеатр на ул. Баумана, где перед вечерними сеансами играл джаз-оркестр под управлением Олега Лундстрема (впоследствии он стал народным артистом СССР, руководителем государственного эстрадного оркестра).

По окончании университета в 1958 г., несмотря на ходатайство проф. В.В. Морозова оставить талантливого выпускника, "имеющего ярко выраженную склонность к самостоятельным научным исследованиям", в КГУ для обучения в аспирантуре, Л.М. Беркович был распределен на работу в распоряжение Отдела учебных заведений Южно-Уральской железной дороги. Он работал учителем в школах на станциях Бердяуш, Формачево и Златоуст. Преподавал математику, начиная с 5-го класса, как для детей, так и в школе рабочей молодежи. Работа со школьниками разного возраста и разной подготовки помогла ему стать настоящим педагогом. Ученики были благодарны своему учителю за его кропотливый труд и внимание к ним. Они не только решали трудные задачи, но и вместе с учителем составляли задачи про полеты первых советских искусственных спутников Земли, про походы Спартака и о восхождении на гору Эверест. А учащиеся ШРМ, немалое число из которых были машинистами или помощниками машинистов электропоездов, составляли вместе с ним задачи на движение поездов на различных участках железнодорожного пути Южного Урала.

Осенью 1960 г., вернувшись в Куйбышев, Л.М. Беркович поступил на работу на кафедру высшей математики индустриального института (переименованного затем в политехнический институт). Помимо учебных занятий он организовал студенческий математический кружок, из которого вышли не только инженеры с хорошей математической подготовкой, но и специалисты в области прикладной математики, информационной техники, а также физики, некоторые из них стали впоследствии кандидатами и докторами наук. Александр Гуськов, ныне завершающий в наукограде Черноголовке работу над докторской диссертацией, презентовал ему автореферат своей кандидатской диссертации в области физики твердого тела "с благодарностью за первое кормление "молоком науки" от бывшего участника математического кружка в Куйбышевском политехническом институте".

В КПТИ Л.М. Беркович работал до избрания в 1974 г. по конкурсу доцентом кафедры общей математики и геометрии государственного университета, после многолетнего перерыва вновь открытого в Куйбышеве в 1969 г. Но еще ранее, с 1972 г. он работал в университете по совместительству по приглашению проф. С.П. Пулькина. В 1979 г. Л.М. Беркович перешел на кафедру алгебры и геометрии, открытую в связи с переездом из Саратовского университета проф. В.Е. Воскресенского, где и работает в настоящее время профессором.

В 1962–1965 гг. Л.М. Беркович учился в аспирантуре в КПТИ, научным руководителем был проф. В.И. Квальвассер, который привлек его внимание к операционному исчислению. Алгебраическое образование в сочетании со знанием операционного исчисления вдохновило Л.М. Берковича на развитие метода факторизации дифференциальных операторов в той области математики, которая называется дифференциальной алгеброй. Кандидатская диссертация на тему "Метод факторизации дифференциальных операторов и его применение к решению обыкновенных линейных дифференциаль-

ных уравнений с переменными коэффициентами” [6,8] была защищена им 17 мая 1967 г. в Уральском государственном университете (г. Свердловск). Официальными оппонентами были академик АН БССР Е.А. Барбашин и доцент В.Е. Гермаидзе. Внешний отзыв дал проф. КГУ Б.М. Гагаев. Защита прошла единогласно. В своем отзыве Е.А. Барбашин указывал, что диссертант занимался неблагодарной темой — проблемой интегрирования дифференциальных уравнений, которая хотя и досталась в наследство от классиков, но не является ”модной”. Считается, что все, что можно было решить, уже решено классиками, а оставшиеся задачи слишком трудны для их явного решения. Кроме того, многие математики считают, что развитие вычислительной техники делает неактуальными исследования в области интегрирования ОДУ. Однако, по его мнению, дальнейшее развитие приближенных аналитических методов для решения дифференциальных уравнений невозможно без прогресса в решении классической проблемы точного интегрирования, существенный вклад в которую внес диссертант. Е.А. Барбашин провел параллель между докторской диссертацией Н.П. Еругина¹¹ и кандидатской диссертацией Л.М. Берковича.

Недостатком Е.А. Барбашин посчитал многочисленные цитирования в диссертации, которые затрудняют читателя в разграничении результатов автора от результатов предшественников.

Между тем скрупулезное цитирование, исторический подход к исследованиям вообще характерны для Л.М. Берковича.

Своим ученикам он не раз приводил слова А. Шлейхера: *”Если мы о чем-нибудь не знаем, как оно произошло, то и не понимаем его”*. Это особенно необходимо в той области математики, которая имеет трехсотлетнюю историю: иначе неизбежны неоднократные переоткрытия. Хотя при более тщательном цитировании многие достижения авторов окажутся более скромными, но при этом действительно принадлежащие авторам результаты являются более весомым вкладом в науку.

Согласно сложившейся в советской высшей школе традиции, каждый преподаватель один раз в пять лет в течение одного семестра обязан был повышать свою классификацию. Л.М. Беркович проходил стажировки на ФПК МГУ на различных кафедрах мехмата: дифференциальные уравнения, теоретическая механика, высшая геометрия и топология, а также в лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ (г. Дубна). Научными руководителями стажировок были профессора А.М. Виноградов, В.Г. Демин, Е.П. Жидков, Н.Х. Розов, акад. С.П. Новиков.

Указанные стажировки значительно расширили круг его научных интересов. Много полезного он извлек также во время обсуждения своих докладов на семинарах Ю.С. Богданова (г. Минск) и К.С. Сибирского (г. Кишинев) по дифференциальным уравнениям,

¹¹Н.П. Еругин. Приводимые системы // Труды ин-та. им. В.А. Стеклова. 1946. Вып. 13.

акад. В.В. Румянцева (г. Москва) — по аналитической механике, проф. Г.Н. Дубошина (г. Москва) — по небесной механике, проф. А.В. Михалева (г. Москва) — по дифференциальной алгебре, профессоров С.А. Абрамова и В.П. Гердта (Москва — Дубна) — по компьютерной алгебре, проф. В.Я. Скоробогатыко (г. Львов) — по дифференциальным уравнениям и их приложениям, проф. Н.В. Азбелева (г. Пермь) — по функционально-дифференциальным уравнениям, профессоров В.А. Кондратьева, В.М. Миллионщикова и Н.Х. Розова (г. Москва) — по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, проф. В.В. Ведянипина (г. Москва) — по математической физике.

Он принимал активное участие во всесоюзных конференциях по дифференциальным уравнениям, инициатором проведения которых был проф. И.П. Макаров, а также в международных коллоквиумах по современному групповому анализу, организованных проф. Н.Х. Ибрагимовым, в международных конференциях "Симметрии в нелинейной математической физике", начало которым положил проф. В.И. Фушич (г. Киев). Он участвовал в международных конгрессах по нелинейному динамическому анализу, председательствовал на которых акад. В.М. Матросов, а также в международных симпозиумах по прикладной математике и механике, организованных проф. Ю.М. Давыдовым.

Л.М. Беркович тепло вспоминает и многолетнюю переписку с чехословацким математиком О. Боровкой и югославским математиком Д.С. Митриновичем.

В 1974 г. Л.М. Беркович получил письмо от Президента Московского математического общества (ММО) акад. А.Н. Колмогорова, известившего его об избрании в члены общества¹².

В 1978 г. вышло учебное пособие Л.М. Берковича [42], в котором, вероятно, впервые в учебной литературе была описана связь между методом факторизации дифференциальных операторов и преобразованиями линейных уравнений второго порядка.

В 1989 г. была опубликована его монография [72], где было дано систематическое изложение дифференциально-алгебраических методов факторизации и преобразований линейных ОДУ n -го порядка.

На протяжении многих лет Л.М. Беркович руководит Самарским городским семинаром по групповому анализу дифференциальных уравнений и его приложениям.

В 1993 г. он был председателем Оргкомитета 11-го Российского коллоквиума по групповому анализу, организованного СамГУ и проведенного в г. Сызрани в профилактории завода "Сызраньсельмаш". Большую помощь в подготовке и успешном проведении коллоквиума оказали декан мехмата проф. В.М. Климкин и проректор по научной работе Г.П. Яровой (сейчас

¹²Избрание состоялось по представлению членов ММО М.И. Ельшина и В.А. Кондратьева.

проф. Г.П. Яровой — ректор СамГУ). В коллоквиуме приняли участие почти все ведущие специалисты по групповому анализу бывшего Советского Союза, включая акад. Л.В. Овсянникова и проф. Н.Х. Ибрагимов, а также ряд ученых из дальнего Зарубежья, в том числе проф. P. Leach из Южной Африки.

В 2002 г. вышла в свет монография Л.М. Берковича "Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения" [135].

Основным полученным результатам автор предваряет необходимые сведения из дифференциальной алгебры, обсуждается метод факторизации и вводятся важные определения дифференциального алгоритма Евклида и дифференциального результата.

В предисловии к этой книге академик В.В. Козлов писал:

"Книга Л.М. Берковича — существенный вклад в нелинейную науку. Эта монография является важным дополнением к имеющейся литературе по интегрируемости и в значительной мере ликвидирует разрыв, существующий между классическими и современными работами в данной области. Изложение весьма подробное и ясное. В комментариях содержится интересная и поучительная информация исторического характера; немало забытых и полузабытых работ вновь окажутся востребованными и войдут в научный оборот.

Л.М. Беркович убедительно показал, что исследования на интегрируемость и, в частности, поиск точных решений, должны осуществляться на надежном методологическом фундаменте. Один из опорных камней в этот фундамент заложил своей книгой автор."

Защита докторской диссертации по монографии [135] состоялась 23 октября 2003 г. в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (г. Москва) [143]. Официальными оппонентами были профессора А.Д. Брюно, В.В. Веденяпин и В.А. Кондратьев. Ведущей организацией являлся Институт проблем механики РАН (г. Москва). Председательствовал на защите член-корр. РАН С.П. Курдюмов. Защита прошла единогласно.

Следует заметить, что к успешной защите Л.М. Беркович шел довольно тернистым путем (см. [90,101,103]). На различных этапах плодотворные дискуссии проходили с участием профессоров А.Д. Брюно, Е.А. Гребеникова, А.Д. Мышкиса, С.Н. Кружкова, С.Ю. Доброхотова, Е.М. Воробьева, А.Ф. Филишова, члена-корр. РАН В.В. Белецкого, а также академиков В.В. Козлова, В.П. Маслова, С.П. Новикова, О.А. Олейник.

Перейдем к научному творчеству Л.М. Берковича.

Метод факторизации линейных дифференциальных операторов

Уже первые работы Л.М. Берковича по факторизации [3,4,7] привлекли внимание математиков. Так, например, Wittich¹³ применил критерий приводимости Л.М. Берковича, полученный с использованием факторизации дифференциальных операторов через коммутативные операторы первого порядка, к аналитической теории дифференциальных уравнений. В свою очередь, работа Виттиха вызвала дополнительные исследования других авторов.

Следует заметить, что Л.М. Беркович рассматривал факторизацию уравнений с достаточно произвольными переменными коэффициентами, а именно принадлежащими некоторому основному дифференциальному полю. До него конструктивная факторизация рассматривалась лишь для уравнений с рациональными функциями в качестве коэффициентов (см., например, Frobenius¹⁴, Landau¹⁵).

Заметим, что теоремы существования факторизации для линейных ОДУ с достаточно гладкими коэффициентами получил Mammana^{16,17} для уравнений сначала 2-го, а затем и n -го порядков через факторизацию операторов с действительными и комплексными функциями. Особенность подхода Л.М. Берковича к интегрированию линейных уравнений состояла в том, что он объединил два классических способа интегрирования дифференциальных уравнений: использование алгебраических аналогий между линейными дифференциальными операторами и алгебраическими многочленами, а также применение преобразований переменных.

Позже Kovacic¹⁸ и Singer¹⁹ предложили соответственно свои алгоритмы для интегрирования уравнений 2-го порядка с рациональными коэффициентами и уравнений n -го порядка с лиувиллевыми коэффициентами, т.е. полученными из поля рациональных функций конечным числом присоединений интегралов, экспонент от интегралов, а также конечным алгебраическим расширением.

¹³Wittich H. Bemerkung zur Zerlegung linearer Differentialoperatoren mit ganzen Koeffizienten // Math. Nachr. 1969. **30**. No. 4–6. P. 363–372.

¹⁴Frobenius G. Über den Begriff der Irreducibilität der Theorie linearen Differentialgleichungen // J. Reine Angew. Math. 1883. **76**. P. 236–270.

¹⁵Landau, E. Ein Satz über die Zerlegung homogener linearer Differentialausdrücke in irreducible Factoren // J. Reine Angew. Math. 1902. **124**. P. 115–120.

¹⁶Mammana G. Sopra un nuovo metodo di studio delle equazioni differenziali lineari // Math. Z. 1926. **25**. P. 734–748.

¹⁷Mammana G. Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee improdotti di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari // Math. Z. 1931. **33**. P. 186–231.

¹⁸Kovacic J. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations // J. Symbolic Comp. 1986. **2**. P. 3–43.

¹⁹Singer M. Liouvillian solutions of n -th order homogeneous linear differential equations // Amer. J. Math. 1981. **103**. P. 661–682.

В работе [11] были установлены новые операторные тождества, позволяющие строить дифференциальные уравнения четного и нечетного порядков, исходя из операторов второго порядка. В статье²⁰, было показано, что операционное представление для полиномов Лагерра, данное Висковым²¹ легко может быть выведено из операционного тождества, установленного в [11]. С другой стороны, некоторые из полученных в [11] тождеств были обобщены в работе²².

Использование алгебраических аналогий оказалось плодотворным при введении понятия дифференциального результата и его эффективного нахождения. Строгая постановка задачи о дифференциальном результате берет начало в работе Ore²³. Конструктивное нахождение дифференциального результата при определении совместности системы ЛОДУ от одной зависимой переменной дано в работе [61].

Понятие дифференциального результата оказалось полезным и при рассмотрении систем линейных и нелинейных ОДУ от нескольких независимых переменных при их исключении [116] (один из примеров исключения переменных рассмотрен в более ранней работе [44]). Работа [61] также оказалась востребованной (см., например, Zwillinger²⁴, Carra-Ferro²⁵ и др.) При этом в работе Carra-Ferro²⁶ понятие дифференциального результата было распространено на линейные уравнения в частных производных. А В.Г. Цирулик распространил его также на функционально-дифференциальные уравнения²⁷. Дифференциальный результат представляет не только теоретический, но и большой практический интерес. Так, еще академик Н.Н. Лузин решал соответствующую задачу для системы линейных ОДУ с постоянными коэффициентами, описывающей систему автоматического регулирования для нахождения условий ее нормального функционирования²⁸.

В настоящее время существуют алгоритмы построения дифференциаль-

²⁰Chosh, Baudalu. A note on Laguerre polynomials // Pure Math. Manuscript 1. 1982. P. 37–39.

²¹Висков О.В. Тождество Редеей для полиномов Лагерра // Acta Sci.Math.(Szeged). 1977. 39. No. 1–2. P. 27–28.

²²Klamkin M.S., Newman D.J. Expansion of powers of a class of linear differential operators // Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. 1971. No. 338–352. P. 49–52.

²³Ore O. Formale Theorie der linearen differentialgleichungen // J. Reine Angew. Math. 1932. 167. P. 221–234.

²⁴Zwillinger D. Handbook of differential equations. New York: Academic Press. 1989.

²⁵Carra-Ferro G. A resultant theory for the systems of two ordinary algebraic differential equations // Applicable Algebra in Engineering Communications and Computing. 1997. P. 539–560.

²⁶Carra-Ferro G. The differential resultant of linear algebraic partial differential equations // Lie groups and their applications, 1. 1994. P. 47–55.

²⁷Цирулик В.Г. О факторизуемости и интегрируемости некоторых классов линейных функционально-дифференциальных уравнений: Дис ... канд. физ.-мат. наук. Таганрог, 1983 (научный консультант — Л.М. Беркович).

²⁸Лузин Н.Н. К изучению матричной теории дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. 1940. 5. С. 3–66.

ных результатов, основанные на работе [61], реализованные в системах компьютерной алгебры²⁹.

Отметим также, что уже первые работы Л.М. Берковича нашли применение и в учебном процессе, и в приложениях³⁰.

В 1966 г. на международном математическом конгрессе в Москве Л.М. Беркович познакомился с чехословацким математиком Отакаром Борувкой. От него он узнал о задаче Куммера (1834 г.) о преобразовании линейных ОДУ 2-го порядка к наперед заданному виду с помощью преобразования Куммера–Лиувилля. Глобальный аспект задачи Куммера рассмотрел Борувка³¹. Решение этой же задачи в локальном аспекте было дано Л.М. Берковичем (см. [42,54]) и оказалось связанным с нелинейными дифференциальными уравнениями Куммера–Шварца и Ермакова.

Позднее Л.М. Беркович рассмотрел задачу Альфана³² о классификации линейных уравнений порядка $n > 2$, используя для этого инварианты уравнений относительно преобразования Куммера–Лиувилля. Следует заметить, что сам Альфан провел классификацию лишь для уравнений 3-го и 4-го порядков³³.

Как показал Л.М. Беркович, любое уравнение n -го порядка принадлежит к одной из $n - 1$ канонических форм, причем для нахождения $(n - 2)$ -х канонических форм преобразования зависимой и независимой переменных находятся в явном виде через инварианты, и лишь для получения $(n - 1)$ -й канонической формы (простейшего уравнения n -го порядка) искомое преобразование зависит от решения нелинейного уравнения 3-го порядка Куммера–Шварца. Когда Л.М. Беркович приступил к задаче Альфана, она оказалась полужабитой. Больше повезло канонической форме Форсайта (см. Сансоне³⁴). Фактически при этом использовалась лишь одна основная каноническая форма (а именно т.н. каноническая нормализация Лагерра–Форсайта), но в отличие от канонических форм Альфана искомое преобразование находится путем интегрирования уравнения Куммера–Шварца 3-го порядка. Впервые Л.М. Беркович установил и связь между каноническими формами Альфана и Форсайта [72,135]. Были рассмотрены также линейные уравнения, приводимые к уравнениям с постоянными коэффициента-

²⁹Li Z. A subresultant theory for Ore polynomials with applications // Proc. of the 1998 Int. Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. Rostoc. Germany. P. 132–139.

³⁰Заездный А.М. Основы расчетов нелинейных и параметрических радиотехнических цепей. Приложение 1: Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Связь. 1973.

³¹Borůvka. O. Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung, Berlin. 1967.

³²Halphen G.-H. Mémoire sur la réduction des équations linéaires différentielles aux formes intégrables. // Mémoires présentés par divers savants à l'Acad. des Sci. de l'Inst. mat. de France, 1884. **23**. No. 1. 301 p.

³³Halphen G.-H. Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre // Acta Math. 3 (1883/1884). P. 325–380.

³⁴Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, Т. 1, М.: Изд-во иностр. лит., 1953; перевод с итал. Sansone G. Equazioni differenziali nel campo reale. Parte Prima, Seconda Edizione, Bologna, 1946.

ми, причем были подытожены многочисленные исследования по этому вопросу [72]. В дальнейшем он произвел классификацию нелинейных ОДУ со степенной нелинейностью [122,131].

Метод автономизации

Приводимые линейные уравнения послужили строительным материалом для важного класса нелинейных неавтономных уравнений с приводимой линейной частью. На этот класс уравнений распространяется действие классического группового анализа С. Ли. Однако метод автономизации, предложенный Л.М. Берковичем, позволяет избавиться от необходимости решать определяющее уравнение Ли, т.е. систему линейных уравнений в частных производных для определения максимальной алгебры Ли, допускаемой исходным уравнением. Вместо этого поиск ведется относительно подалгебры алгебры Ли, для чего требуется решать лишь ОДУ Куммера–Шварца 2-го порядка. Таким образом, в границах своей применимости метод автономизации служит альтернативой групповому анализу. Эталонными уравнениями для метода автономизации служат уравнение Эмдена–Фаулера и его различные обобщения.

Задача Гильдена–Мещерского и другие нестационарные задачи небесной механики

Замечательный класс нелинейных и неавтономных уравнений образуют нестационарные задачи небесной механики. Классической является задача Гильдена–Мещерского^{35,36} двух тел переменной массы, притягивающихся друг к другу по закону Ньютона. Впрочем, уравнения этой задачи допускают и другие постановки, например, движение двух тел постоянной массы, учитывающее, согласно гипотезе Дирака, переменность гравитационной "постоянной". Относительно задачи Гильдена–Мещерского были известны законы изменения массы И.В. Мещерского³⁷ и Эддингтона–Джинса. Еще один закон нашел Б.Е. Гельфгат³⁸. Л.М. Беркович вывел все законы изменения массы, при которых задача Гильдена–Мещерского сводится к автономному виду (т.н. стационарной задаче с фиктивным временем) [47]. Тем самым "завершение этого цикла исследований... осуществлено Л.М. Берковичем"³⁹.

³⁵Gylden H. Die bahn bewegungen in einem system von zwei körpern in dem fall, das die massen veränderungen unterworfen sind // *Astron Nachr.* 1884. **109**. P. 2593-2594.

³⁶Meshchersky J. Ein special fall des Gylden'schen problems // *Astron. Nachr.*, 1893. **132**. №3153. P. 129-130.

³⁷Мещерский И.В. Работы по механике тел переменной массы. М.Л., 1949. С. 31-182.

³⁸Гельфгат Б.Е. Два случая интегрируемости задачи двух тел переменной массы и их применение к изучению движения в сопротивляющейся среде // *Бюлл Ин-та теор. астрон. АН СССР*, Л., 1959. Т. 7. №5. С. 354-362.

³⁹Михайлов Г.К. Становление динамики систем с переменными массами // *Исследования по истории физики и механики*. М.: Наука, 1982. С. 240.

Решение задачи Гильдена–Мещерского в указанном смысле позволило рассмотреть и другие нестационарные задачи небесной механики. Основным математическим методом здесь служит метод автономизации.

Фактически программой исследования различных нестационарных задач небесной механики была совместная работа Л.М. Берковича и Б.Е. Гельфгата [33]⁴⁰. В более детальном виде эта программа приводится в [135,136]. Работы Л.М. Берковича по небесной механике имеют многочисленные цитирования, например^{41–43}.

Факторизация нелинейных дифференциальных операторов и точная линеаризация

Как известно, факторизация линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами вызывает немалые трудности из-за некоммутативности линейных дифференциальных операторов. Еще бóльшие трудности вызывает факторизация нелинейных дифференциальных уравнений. Вероятно, одной из первых работ по факторизации нелинейных уравнений, преобразуемых в линейные, была работа [44]. Особенностью подхода Л.М. Берковича являлось одновременное применение нелинейных преобразований зависимой и независимой переменных. До него применялось либо преобразование зависимой переменной⁴⁴, либо преобразование независимой переменной^{45,46}, а также нелинейные точечные преобразования⁴⁷.

В дальнейшем Л.М. Беркович рассматривал также факторизацию уравнений, не допускающих линеаризацию [81]. Следуя [81], были рассмотрены уравнения нелинейного демпфированного осциллятора и уравнения реакции-диффузии с полиномиальными нелинейностями, встречающиеся в биологии, экологии, химии и физике, а также рассматривалась факторизация

⁴⁰С Б.Е. Гельфгатом (1929–1976) Л.М. Беркович познакомился на семинаре Г.Н. Дубошина по небесной механике в Государственном астрономическом институте им П.К. Штернберга в 1972 г. Их сотрудничество было непродолжительным. Б.Е. Гельфгат был не только глубоким специалистом по небесной механике, но и горным туристом: он погиб на Памире в составе группы спасателей.

⁴¹Лукьянов Л.Г. Об уравнениях движения многих тел с переменными массами // Астрон. журнал. 1983. **60**. №1. С. 181–184.

⁴²Поляхова Е.Н. Решение линейных уравнений орбитального движения кометы с учетом негравитационных эффектов // Астрон. вестник. 1987. **21**. №3. С. 233–241.

⁴³Беков А.А. Интегрируемые случаи и траектории движения в задаче Гильдена–Мещерского // Астрон. журнал, 1989. **66**. №1. С. 135–151.

⁴⁴Painlevé P. Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieure dont l'intégrale générale est uniforme // Acta Math. 1902. **25**. P. 1–85.

⁴⁵Sundman K.E. Mémoire sur le problème des trois corps // Acta Math. 1912. **36**. P. 105–179.

⁴⁶Чаплыгин С.А. Избранные труды. М.: Наука, 1976. P. 367–384.

⁴⁷Sarlet W., Mahomed F., Leach P.G.L. Symmetries of nonlinear differential equations and linearization // J. of Physics A. Math. and General. 1987. **20**(2). P. 277–292.

уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргера, допускающего решения типа бегущей волны^{48,49}.

Укажем и на работы последних лет [117–119]. Эти работы также нашли немало откликов, см., например,^{50–52}.

О принципах нелинейной суперпозиции

Известно, какую большую роль играет принцип линейной суперпозиции для линейных уравнений, когда любое решение линейного уравнения может быть получено, исходя из линейной суперпозиции его фундаментальной совокупности решений (ФСР). Возможно ли в модифицированном виде распространить этот принцип на нелинейные уравнения? Положительный ответ на этот вопрос дал еще С. Ли для некоторого класса нелинейных уравнений⁵³. Обобщением указанного С. Ли определения принципа нелинейной суперпозиции служит определение, данное в [135].

”Будем говорить, что для данного нелинейного дифференциального уравнения n -го порядка имеет место принцип нелинейной суперпозиции, если его общее решение может быть получено в виде нелинейной функции:

а) от некоторых частных функционально независимых решений данного уравнения или

б) от фундаментальной системы решений некоторого присоединенного линейного дифференциального уравнения или

в) от некоторых частных функционально независимых решений присоединенного нелинейного дифференциального уравнения или

г) в виде нелинейной функции произвольных постоянных и независимой переменной”.

Упомянутая нелинейная функция и называется *правилом, законом, принципом* нелинейной суперпозиции. А соответствующая система функционально независимых решений является ФСР для данного нелинейного уравнения. В отличие от линейных уравнений, где ФСР однозначно опре-

⁴⁸Rosu H.C., Cornejo-Pérez O. Supersymmetric pairing of kinks for polynomials nonlinearities // Physical Review. 2005. **71**. No. 046607, 7 p.

⁴⁹Cornejo-Pérez O., Negro O., Nieto L. L.M., Rosu H.C. Travelling-wave solutions for Korteweg-de Vries-Burgers // Private communication. 2005. 13 p.

⁵⁰Ciftci H., Hall R., Laad N. Construction of exact solutions to eigenvalue problems by the asymptotic iteration method // J. Phys. A. Math. Gen. 2005. **38**. P. 1147–1155.

⁵¹Euler N., Wolf T., Leach P.G.L., Euler M. Linearisable third-order ordinary differential equation and generalised Sundman transformation: The case $X''' = 0$ // Acta Applicanda Mathematica, 2003. **76**. P. 89–115.

⁵²Chandrasecar V.K., Senthilvelan M., Lakshmanan M. On the complete integrability and linearization of nonlinear ordinary differential equations – Part II: Third order equations // Arxiv. org. nlin. SI/0510036v1 17 Okt. 2005. 21 p.

⁵³Lie S. Vorlesungen über kontinuierliche gruppen mit geometrischen und anderen anwendungen, Bearbeitet and herausgegeben von Dr. G. Scheffers, Teubner, Leipzig. 1893. P. 765–804.

деляет линейное уравнение, для нелинейных уравнений помимо ФСР требуется знать еще соответствующий принцип нелинейной суперпозиции.

К вопросам приоритетного характера

Как уже отмечалось ранее, Л.М. Беркович придает большое значение историческим фактам. С целью восстановления исторической справедливости Л.М. Беркович назвал преобразование, известное как преобразование Дарбу, преобразованием Эйлера–Импенецкого–Дарбу. Он также вернул из забвения классическую проблему Альфана и, в частности, показал, что т.н. стационарное уравнение Кортевега–де Фриза в действительности было получено еще Альфаном. Работа Л.М. Берковича и Н.Х. Розова [23] восстановила приоритет российского математика, проф. Киевского университета В.П. Ермакова, который еще в 1880 г. проинтегрировал уравнение⁵⁴, приписывавшееся Pinney, хотя тот его проинтегрировал на 70 лет позже⁵⁵.

Вообще же следует заметить, что к немалому числу работ, пребывавших в течение многих десятилетий в состоянии забвения, время оказалось милосердным, и они вызывают сейчас большой интерес.

Значение работы Ермакова состояло в том, что полученное им явное выражение для общего решения нелинейного дифференциального уравнения через решения присоединенного линейного уравнения открыло один из важнейших принципов нелинейной суперпозиции. Вот несколько работ, где, исходя из [23], применяется уравнение Ермакова^{56–59}.

В настоящее время уравнение Ермакова, динамические системы Ермакова стали рабочим инструментом в исследованиях механиков и физиков. Это произошло и в результате их знакомства с работой Берковича и Розова [104]. В статье⁶⁰ говорится о том, что система Ермакова, т.е. соответствующая пара связанных нелинейных ОДУ 2-го порядка, появляется при исследованиях в нелинейной оптике, нелинейной упругости, в молекулярных

⁵⁴Ермаков В.П. Дифференциальные уравнения второго порядка. Условия интегрируемости в конечном виде ... // Университетские известия. Киев. 1880. №9. P. 1–25.

⁵⁵Pinney E. The nonlinear differential equation $y'' + p(t)y + cy^{-3} = 0$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1950. 1. P. 581.

⁵⁶Athorne C. Geometry of Ermakov systems // Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems (NEEDS'90), Proc. of the 6th International Workshop, 16–26 July 1990. Dubna. USSR. P. 100–103.

⁵⁷Calogero F. Remarks on certain integrable one-dimensional many-body problems // Physics Letters. A 183. 1993. P. 85–88.

⁵⁸Moreira I.C., Ritter O.M. Lie symmetries and invariants for the time-dependent generalizations of the equation $\ddot{\vec{R}} + c_1 R^m (\vec{R} \times \dot{\vec{R}}) + c_2 R^m \vec{R} = 0$ // J. of Physics A. Mathematical and General. 1991. 24. No. 13. P. 3181–3185.

⁵⁹Wollenberg L.S. Homogeneous quadratic invariants for one-dimensional classical homogeneous quadratic Hamiltonians. Some properties of the auxiliary equation // J. of Math. Physics. 1983. 24. No. 5. P. 1430–1438

⁶⁰Hansen R.M., Lidsey J.E. Ermakov–Pinney equation in scalar field cosmologies // Physical Review. D, 2002. 66. 023523

структурах, в квантовой теории поля, в криволинейных пространствах и квантовой космологии, при этом даны многочисленные ссылки на соответствующие работы. Свидетельством этому служит и более свежая работа⁶¹, где также дается ссылка на [104].

Размеры статьи не позволяют нам остановиться здесь на других, не менее значимых, направлениях исследований Л.М. Берковича. Как бы путеводителем к ним служит приводимый ниже список его избранных работ.

Монографии, учебные пособия, обзоры: [42,72,78,113,135,141–143,153].

Факторизации и преобразованиям линейных уравнений посвящены работы [3–8,12,18,29,34,40,54,57,72,73,78,120,135,141], причем уравнениям с отклоняющимся аргументом посвящена работа [31], а уравнениям с частными производными — работа [39].

Самосопряженным уравнениям четного и нечетного порядков посвящены работы [12–15].

Автономизации и групповому анализу посвящены работы [16,19,21,24–26,28,56,71,99,106,142].

Различным приложениям посвящены работы [27,28,30,32,36,37,41,43].

Точной линеаризации и интегрируемости посвящены работы [38,44,69,77,94,97,114].

Нестационарным задачам небесной механики посвящены работы [33,45,47,48,50, 52,74,133,136,140,145].

Факторизации и преобразованиям нелинейных уравнений посвящены работы [35,38,44,46,51,52,69,77,94,97,109–111,113–120,124,126,127,132,134,138,2, 150,153,157].

Задачам Куммера и Эйлера посвящены работы [42,53,72,104,135,156,157].

Уравнению Эмдена–Фаулера и его обобщениям посвящены работы [22,26,55,100,105].

Задаче Альфана и ее применению посвящены работы [59,60,62, 66,82,85,87,112,135].

Дифференциальному результату и некоторым другим понятиям дифференциальной алгебры посвящены работы [61,67,116].

Приводимым линейным уравнениям посвящены работы [4,5,7,10,18,42,63, 64,72,85,135].

Исследованию динамических систем посвящены работы [25,43,56,65, 113–115,119,132,138,142,153].

”Размножению” интегрируемых уравнений посвящены работы [68,135, 157,158].

Алгоритмам компьютерной алгебры посвящены работы [70,75,76,79,83, 84,93,102,110,128,139,152,156].

Нелинейным уравнениям теплопроводности и диффузии посвящены работы [80,81,86,88,92,108,109,137,151,154].

⁶¹Lidsej J.E. Cosmic dynamics of Bose-Einshtein condensates // Classical and Quantum Gravity. 2004. **21**(4). P. 777–785

Нелинейным эволюционным уравнениям высшего порядка посвящены работы [125–127, 146–149].

Статьи, касающиеся исследований приоритетного характера [23, 42, 89, 91].

Статьи, имеющие научно-популярный и информационный характер [107, 129, 130, 144, 153].

Л.М. Беркович интересен не только как ученый-исследователь, но и как педагог. Он охотно делится своими знаниями со студентами и регулярно выступает с научными сообщениями не только в Самарском госуниверситете, но и в других научных учреждениях и вузах. В разные годы он читал лекции в Школе молодых ученых ОИЯИ (г. Дубна), в Институте прикладных проблем механики и математики АН УССР (г. Львов), в Техническом университете (г. Пермь), в Математическом институте им. Макса Планка (г. Бонн), в Лейпцигском университете, в Математическом институте им. А.Эйнштейна при Иерусалимском университете, на аэрокосмическом факультете Техниона — Израильского технологического института — (г. Хайфа), но каждый раз возвращался в родной университет.

Ведь даже в трудные 90-е годы он и его жена Белла Федоровна, несмотря на неоднократно получаемые приглашения из разных стран, считали невозможным для себя переезд в любую другую страну.

Л.М. Беркович является членом Московского и Американского математических обществ, Академии нелинейных наук, Международной федерации нелинейных аналитиков, а также Международной рабочей группы по развитию системы компьютерной алгебры REDUCE. Он входит в состав редколлегии журналов: Известия РАЕН, серия "Дифференциальные уравнения. Качественная теория." (г. Рязань), Публикации электротехнического факультета Белградского университета, серия "Математика" (Сербия и Черногория), а также является референтом реферативных журналов "Математика" (ВИНИТИ) и "Mathematical Reviews", рецензентом журнала "Известия высших учебных заведений. Математика" (г. Казань) и ряда международных журналов.

Надеемся, что Л.М. Беркович и дальше сохранит бодрость духа, оптимизм и принесет еще немало пользы своим трудом отечественной науке.

СПИСОК ИЗБРАННЫХ РАБОТ Л.М. БЕРКОВИЧА⁶²

1957

1. О круговых луночках, квадратуемых при помощи конических сечений // Уч. зап. Казан. унив., 1957. Т. 117. Кн. 2. С. 7–10.

1964

2. Комбинированный метод шлифования желобов колец, модернизация желобошлифовальных станков и их исследование. ГК по делам изобретений и открытий СССР, уд. о рег. № 44270 с приоритетом 6.04., 1964 (совместно с А. Чалым–Прилуцким, Н. Екатерининским, Е. Золотухиным, Г. Бирманом).
3. О линейных дифференциальных операторах n -го порядка, допускающих разложение на коммутативные операторы 1-го порядка // Уч. зап. Казан. унив. 1964. Т. 124. Кн. 6. С. 37–42.

1965

4. О факторизации обыкновенных линейных дифференциальных операторов, преобразуемых в операторы с постоянными коэффициентами. Ч. 1. Изв. вузов. Матем. 1965. №4. С. 8–16.

1966

5. О редукции обыкновенных линейных дифференциальных уравнений к уравнениям с постоянными коэффициентами // Волжский мат. сб. Казань. 1966. Вып. 5. С. 38–44.
6. Метод факторизации дифференциальных операторов и его применение к решению обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Куйбышев. политех. ин-т. Куйбышев, 1966. 251 с.

1967

7. О факторизации обыкновенных линейных дифференциальных операторов, преобразуемых в операторы с постоянными коэффициентами. Ч. 2 // Изв. вузов. Матем. 1967. №12. С. 3–14.

⁶²Подготовлен к печати С.А. Пантелеевым. Работы располагаются в хронологическом порядке.

8. Метод факторизации дифференциальных операторов и его применение к решению обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук./ Уральский университет. Свердловск, 1967. 12 с.
9. Об интегрировании в конечном виде некоторых ОЛДУ нечетного порядка. Механика: Сб. тр./Куйбышев. политех. ин-т. Куйбышев, 1967. С. 35–42. (совместно с В.И. Квальвассером).

1968

10. О самосопряженных и приводимых линейных дифференциальных уравнениях высших порядков и о некоторых уравнениях 2-го порядка, интегрируемых в конечном виде // Publ. Electr. fac. Univ. Belgrade, Ser. Mat. Phys. Belgrade, 1968. No. 230–241. P. 61–87 (совместно с Н. Розовым и А. Эйшинским).
11. Об операторных тождествах и о некоторых ОЛДУ высших порядков, интегрируемых в замкнутом виде // Изв. вузов. Матем. 1968. №5. С. 3–16 (совместно с В.И. Квальвассером).

1969

12. О факторизации и приводимости ОЛДУ 2-го и самосопряженных дифференциальных уравнений 3-го порядков: Труды 2-й респ. конф. математ. Белоруссии, Минск: БГУ, 1969. С. 165–170.
13. О самосопряженных дифференциальных уравнениях четного и нечетного порядков и об одном классе уравнений Эйлера // Изв. вузов. Матем. 1969. №8. С. 3–9.
14. О самосопряженных дифференциальных уравнениях высших порядков: Физ.-мат. сб., Куйбышев. политех. ин. Куйбышев, 1969. С. 186–193.
15. К исследованию самосопряженных дифференциальных уравнений 3-го порядка методом факторизации дифференциальных операторов: Физ.-мат. сб. Куйбышев. политех. ин-т. Куйбышев, 1969. С. 377–381.

1970

16. Об одном классе неавтономных нелинейных дифференциальных уравнений n -го порядка // Arch. Math. Brno. 1970. 6. f 1. Cl. 2. P. 7–13.
17. Об одном классе линейных разностных уравнений с переменными коэффициентами, преобразуемых в уравнения с постоянными коэффициентами. Теплофизика технол. процес./ Куйбыш.политех. ин., Куйбышев, 1970. С. 150–155, (совместно с Я.Ф. Рутнером).
18. О некоторых классах разностных и дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами // Изв. вузов Матем., 1970. №7. P. 13–25.

19. Преобразования обыкновенных нелинейных дифференциальных уравн. // Деп. в ВИНТИ. Ред. журнала "Диф. уравнения", Минск, 1970. №2223–70. 46 с.
20. Об уравнении $y'' + a(x)y = 0$, допускающем рациональный интеграл: Физ.-мат. сб./ Куйбышев. политех. ин-т., Куйбышев, 1970. С. 194–199.

1971

21. Преобразования обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений // Диф. уравн. 1971. Т. 7. №2. С. 353–356.
Transformations of ordinary nonlinear differential equations // Differ. Equations. 1971. 7. P. 272–275.

1972

22. Об уравнении Фаулера–Эмдена и некоторых его обобщениях // Publ. Electrotehn. fac. Univ. Belgrade, 1972. No. 381–409. P. 51–62.
23. Некоторые замечания о дифференциальных уравнениях вида $y'' + a(x)y = f(x)y'$ // Диф. уравн. 1972. Т. 8, №11. С. 2076–2079 (совместно с Н.Х. Розовым).
Some remarks on differential equations of the form $y'' + a_0(x)y = \varphi(x)y^\alpha$ // Differ. Equations. 1972. 8. P. 1609–1612.
24. Приведение к автономному виду некоторых нелинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка // Arch. Math. Brno. 1972. 3. VIII. С. 219–226 (совместно с Н.Х. Розовым).
25. Системы ОДУ, приводимые к автономному виду: Тр. семинара по диф. уравн./ Куйбышевский ун-т., Куйбышев, 1972. Вып. 1. С. 130–145 (совместно с Н.Х. Розовым).
26. Необходимые и достаточные условия для приведения к автономному виду уравнения $f(x)(y'' + 2/x y') = ay'$: Тр. семинара по диф. уравн./ Куйбышев. гос. ун-т. Куйбышев., 1972. Вып. 1. С. 102–116.
27. Об интегрировании в конечном виде и амплитудных соотношениях для свободных и вынужденных колебаний нелинейных дифференциальных уравнений // Механика / Куйбышев. политех. ин-т., Куйбышев, 1972. С. 201–207 (совместно с М.К. Клебановым).

1974

28. Применение метода преобразований к исследованию обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, встречающихся в приложениях // Механика. Прочность матер./ Куйбышев. политех. ин-т. Куйбышев, 1974. С. 148–154 (совместно с М.Л. Нечаевским).

29. Электрическое моделирование ОЛДУ n -го порядка на основе метода факторизации дифференциальных операторов // *Механика, Машиностроение*. Куйбышев. политех. ин-т., Куйбышев, 1974. С. 58–64 (совместно с А. Гуськовым).
30. Преобразование дифференциальных уравнений нелинейной механики: эвристические подстановки и методы преобразования // *Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела*. 1974. №6. С. 186–187.

1975

31. Преобразования дифференциальных уравнений высших порядков: IV Всесоюз. конф. по теории и прилож. диф. ур. с отклоняющимся аргументом, Киев, 23–26 сент. 1975. С. 31–32.
32. Исследование телеграфного уравнения методом преобразований: Тр. семинара по диф. уравн. Куйбышев. гос. ун-т., Куйбышев, 1975. Вып. 1. С. 117–129 (совместно с М.Л. Нечаевским).
33. Исследование некоторых нестационарных задач небесной механики методом преобразований // *Проблемы анал. мех., теорий устойчив. и упр.* М.: Наука, 1975. С. 54–61 (совместно с Б.Е. Гельфгатом).
34. Интегрирование в конечном виде и исследование поведения решений некоторых дифференциальных уравнений // *Диф. уравн. и их прил.* Куйбышев. политех. ин-т. Куйбышев, 1975. Вып. 2. С. 136–141.

1976

35. Методы факторизации, автономизации и линеаризации обыкновенных дифференциальных уравнений: Всесоюз. конф. по кач. теории диф. уравн. Рязань, 1976. С. 90–91.
36. О дифференциальном уравнении, описывающем закоксовывание катализаторов в нефтехимических процессах // *Диф. уравн.*, Куйбышев. гос. ун-т, Куйбышев, 1976. С. 19–26 (совместно с М.Е. Левинтером).
37. Метод преобразований ОДУ и некоторые его приложения // *Диф. уравн.* Куйбышев. гос. ун-т, Куйбышев, 1976. С. 3–18 (совместно с М.Л. Нечаевским).

1977

38. Метод точной линеаризации некоторых классов динамических систем // *Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела*. 1977. №5. С. 178–179.
39. К вопросу о факторизации линейных уравнений в частных производных 2-го порядка с двумя независимыми переменными: Труды семинара по диф. ур. Куйбышев. гос. ун-т, Куйбышев, 1977. Вып. 3. С. 12–27.
40. О некоторых свойствах коммутативных дифференциальных операторов над функциональным полем характеристики нуль: Тр. семин. диф. ур. Куйбышев. гос. ун-т, Куйбышев, 1977. Вып. 3. С. 117–133 (совместно с В.Г. Цируликом).

1978

41. Анализ сложных систем с помощью преобразования их моделей: VIII Всесоюз. сов. "Теория и методы мат. моделирования", Куйбышев, сент. М.: Наука, 1978. С. 21–23.
42. Преобразование обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Куйбышев. гос. ун-т. Куйбышев, 1978. 92 с.

1979

43. Метод преобразований в нелинейных и нестационарных задачах механики // Теор. устойч. и ее прил. Новосибирск: СО АН СССР. 1979. С. 163–172 (совместно с М.Л. Нечаевским).
44. Метод точной линеаризации нелинейных автономных дифференциальных уравнений второго порядка // Прикл. мат. мех. 1979. Т. 43. №4. С. 629–638.
Method of exact linearization of non-linear autonomous differential equations of 2nd order // J. of Applied Mathematics and Mechanics. 1979. **43** (4). P. 673–683.
45. Задача Гильдена–Мещерского и законы изменения массы // Прибл. методы иссл. диф. ур. и их прил. Куйбышев / Куйбышев. гос. ун-т., 1979. С. 123–139
46. Факторизация и преобразования линейных и нелинейных дифференциальных уравнений: 5-я Всесоюзная конф. по кач. теории диф. ур. Кишинев, 22–24 авг., 1979. Изд-во Штиинца. С. 24.

1980

47. Задача Гильдена–Мещерского и законы изменения массы // Докл. АН СССР. 1980. Т. 250. №5. С. 1088–1091.
The Gylden–Mescherskii problem and the laws of variation of mass // Soviet Phys. Dokl. 1980. **25**. No. 2. P. 107–109.
48. Преобразование задачи Гильдена–Мещерского к стационарному виду и законы изменения массы // Прикл. мат. и мех. 1980. Т. 44. №2. С. 354–357.
Transformation of the Gylden–Mescherskii problem to its stationary form and of mass change // J. Appl. Math. Mech. 1981. **44**. P. 296–299.

1981

49. Методы преобразований дифференциальных уравнений и интегрируемые задачи механики: V Всесоюз. съезд по теор. и прикл. мех. Алма-Ата, 27 мая – 3 июня, 1981. М.: Наука, 1981. С. 59.

50. Gylden–Mescherskii problem // *Celestial Mechanics*. 1981. 24. No. 4. P. 407–429.

1982

51. Transformations and factorization of ordinary nonlinear differential equations // *EQUADIFF 5*, Bratislava, aug 24–28, 1981. Teubner-Texte zur Math. Leipzig, 1982. **47**. P. 41–44.
52. Об интегрируемости задачи Гильдена–Мещерского // *Прикл. Мат. Мех.* 1982. Т. 46. №1. С. 165–167.
On integrability of the Gylden–Mescherskii problem // *J. of Applied Math. Mech.* 1982. **46(1)**. P. 132–133.
53. О преобразовании дифференциальных уравнений типа Штурма–Лиувилля // *Функц. анализ и прил.* 1982. Т. 16. Вып. 3. С. 42–44.
The transformation of differential equations of Sturm–Liouville type // *Functional Anal. Appl.* 1982. **16** (1982). No. 3. P. 190–192.
54. Метод факторизации дифференциальных операторов и его приложения // *Диф. Уравн. и их примен.* Тр. 2-й Болг. конф. (Руссе, 29 июня – 4 июля, 1981). Руссе, 1982. С. 63–70 (совместно с М.Л. Нечаевским и Ю.Э. Сеницким).

1983

55. О групповых свойствах и интегрируемости уравнений типа Фаулера–Эмдена // *Теоретико-групповые методы в физике: Тр. между. семинара, Звенигород, 24–26 нояб. 1982.* М.: Наука, 1983. Т. 2. С. 463–471 (совместно с М.Л. Нечаевским)
On the group properties and integrability of the Fowler–Emden equation // *Group theor. methods in phys.* Vol. 1, Harwood Ac. Publ. Chur. New-York, 1985. P. 477–488 (Совместно с М.Л. Нечаевским).

1984

56. Применение методов автономизации и точной линеаризации дифференциальных уравнений для исследования динамических систем // *IX-я Междунар. конф. по нелин. колеб.: Аналит. методы теории нелин. колеб.* Киев.: Наук. думка, 1984. Т. 1. С. 87–89 (совместно с М.Л. Нечаевским).
57. The method of factorization of differential operators and Applications // *Intern. Conf.: Complex Analysis and its applications*, Varna, Sept. 20–27. 1981. Sofia, 1984. P. 55–62 (Совместно с М.Л. Нечаевским, Ю.Э. Сеницким).

1985

58. Применение касательных преобразований к обыкновенным дифференциальным первого порядка // Дифференц. уравн. 1985. Т. 21. №12. С. 2177–2181 (совместно с Б. Рашайски).

1986

59. Задача Альфана // VI Всесоюз. конф. Кач. теория диф. ур. 1–3 июля, 1986. Иркутск, 1986. С. 28–29.
60. Задача Альфана об эквивалентности ОЛДУ // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41. №1. С. 183–184.
Halphen's problem on the equivalence of linear ODE // Russian Math. Surveys **41**. (1986). No. 1. P. 221–222.
61. Дифференциальный результат и некоторые его применения // Дифференц. уравн. 1986. Т. 22. №5. С. 750–757 (совместно с В.Г. Цируликом)
The differential resultant and some of its applications // Differential Equations. **22**. (1986). No. 5. P. 530–536 (совместно с В.Г. Цируликом).
62. Абсолютные инварианты и уравнение Кортевега–де Фриза. // Сб. Теор.-груп. методы в физике: Тр. 3 семинара, Юрмала 22–24 мая 1985. М.: Наука, 1986. С. 505–513.
Absolute invariants and Korteweg de Fries equation // Group Theoretical Methods in Physics, Proc. Third Yurmala Seminar, Yurmala, May 22–24 1985, VNU Science Press, Utrecht, Netherlands, 1986. P. 449–460.

1987

63. Приводимые обыкновенные линейные дифференциальные уравнения третьего порядка и связанные с ними нелинейные уравнения // Дифференц. уравн. 1987. **23**. №5. С. 887–890.
64. Приводимые линейные уравнения // Дифференц. уравн. 1987. **23**. №6. С. 1095–1096.
65. Dynamical systems: transformations, invariants, symmetries // Proc. of the Eleventh International Conference on Nonlinear Oscillations, J. Bolyai Math. Soc., Budapest, Aug. 17–23 1987. P. 259–262 (совместно с М.Л. Нечаевским).

1988

66. Canonical forms of ordinary differential equations // Arch. Math., Brno, 1988. **24**. No. 1. P. 25–52.
67. Аналог критерия Эйзенштейна для обыкновенных дифференциальных операторов // Арифм. и геом. многообразий. Куйбышев. гос. ун-т., Куйбышев, 1988. С. 20–27.

1989

68. Родственные линейные дифференциальные уравнения второго порядка // Дифференц. уравн. 1989. **25**. №2. С. 191–201.
Second-order kindred linear differential equations // Differential Equations. **25**. 1989. No. 2. P. 137–144.
69. Нелинейные приводимые уравнения // Кач. теория диф. уравн. VII Всесоюз. конф., Рига 3–7 апр. 1989. С. 34
70. Second order reducible linear differential equations, Preprint E5-89-141, JINR, Dubna, 1989. 18 p (совместно с В.П.Гердтом, З.Костовой, М.Л.Нечаевским).
71. Метод автономизации // Современный групповой анализ. Баку.: Элм, 1989. С. 47–53.
72. Факторизация и преобразования обыкновенных дифференциальных уравнений: Монография. Саратов: Изд-во. Саратов. ун-та., 1989. 192 с.
73. Факторизация обыкновенных линейных дифференциальных операторов в расширениях основного дифференциального поля // Арифм. и геом. многообразий. Куйбышев. гос. ун-т., 1989. С. 3–25.

1990

74. Обобщенная нестационарная задача двух тел и законы изменения массы // Вопросы небес. мех. и звездной динам. Алма-Ата, 1990. С. 18–23.
75. Integration of some classes linear ordinary differential equations // IV Intern. Confer. of computer algebra phys. research. Dubna, 1990, Publishers W.S. Singapore, 1991. P. 350–356 (совместно с В.П.Гердтом, З.Костовой, М.Л.Нечаевским).
76. Computer algebra generating related 2nd order linear differential equations // Communication of JINR E5-90-509. Dubna, 1990, 17 p (совместно с В.П.Гердтом, З.Костовой, М.Л.Нечаевским).
77. Приводимые нелинейные уравнения // Дифференц. уравн. 1990. Т. 26. №12. С. 2184
78. Конструктивные методы исследования дифференциальных уравнений механики: Сб. научно-метод. статей // Теор. мех. (материалы для повышения квалификации преподавателей). М., 1990. Вып. 20. С. 100–116 (совместно с М.Л.Нечаевским).

1992

79. Приводимые линейные дифференциальные уравнения второго порядка // Пакеты прикл. программ, ВЦ РАН, М., 1992. С. 9–24 (совместно с В.П.Гердтом, З.Костовой и М.Л.Нечаевским).

80. Преобразования переменных как метод нахождения точных инвариантных решений уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова и связанных с ним нелинейных уравнений теплопроводности // Доклады РАН. 1992. **322**. №4. С. 635–640.
Transformation of variables as a method for finding exact invariant solutions of the KPP equation and related nonlinear heat equations, translation in Soviet Math. Dokl. **45**. (1992). No. 1. P. 146–151.
81. Факторизация как метод нахождения точных инвариантных решений уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова и связанных с ним уравнений Семенова и Зельдовича // Доклады РАН. 1992. **322**. №5. С. 823–827.
Factorization as a method for finding exact invariant solutions of the Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov solution and related equations of Semenov and Zel’dovich, translation in Soviet Math. Dokl. **45**. (1992). No. 1. P. 162–167.
82. Инвариант Лагерра и классификация обыкновенных линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Арифм. геом. многообразий, Самара: Изд-во СамГУ, 1992. С. 15–42.

1993

83. Algorithm of solving second order linear ordinary differential equations and its implementation in REDUCE // Theory and Appl. in Computer Algebra RIMS, Kokuyoku 848, Kyoto Un. 1993. P. 100–108 (совместно с Ф.Л. Берковичем).
84. SOLDE: A REDUCE Package for solving of second order linear ordinary differential equations // Соврем. групп. анализ и зад. матем. модел. Самара: Самарск. филиал изд-ва. Саратовск. ун-та., 1993. С. 38–45 (совместно с Ф.Л. Берковичем).
85. Инварианты ЛОДУ n -го порядка и интегрирование приводимых уравнений // Соврем. групп. анализ и зад. матем. модел. Самара, 1993. С. 21–37.
86. Прямые методы нахождения точных инвариантных решений для уравнения КПП и связанных с ним нелинейных уравнений теплопроводности // Усп. мат. наук. 1993. Т. 48. №4. С. 198.

1994

87. Инварианты и канонические формы ЛОДУ n -го порядка: Междунар. науч. конф. "Алгебра и анализ", посв. 100-летию со дня рождения Н.Г. Чеботарева, Казань 5–11 июня 1994. Казань, 1994. С. 25–26.
88. Direct methods of finding exact invariant solutions of KPP equation and some other nonlinear heat and diffusion equations // Lie groups and their appl. 1994. **1**. No. 1. P. 27–37.

89. Уравнение Ермакова: история и современность // Усп. мат. наук. 1994. Т. 49. №4. С. 95 (совместно с Н.Х. Розовым).
90. Факторизация, преобразования и интегрируемость обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис. ... д-ра. физ.-мат. наук, Самара: СамГУ, 1994. 406 с.

1995

91. Вклад П.Л. Чебышева в развитие теории дифференциальных уравнений // Усп. мат. наук. 1995. Т. 50. №4. С. 93–94 (совместно с Н.Х. Розовым).
92. Прямые методы нахождения точных инвариантных решений уравнения КПП и некоторых нелинейных уравнений диффузии и теплопроводности // Диф. уравн. 1995. Т. 31. №5. С. 906–907.
93. Transformation and factorization of second order linear ordinary differential equations and its implementation in REDUCE // Publ. Elektr. Fak. Un. Beograd, Ser. Mat. 1995. No. 6. P. 11–24 (совместно с Ф.Л. Берковичем).
94. Метод точной линеаризации обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. Спец. выпуск. 1995. С. 6–14.
95. Отакар Борувка [1899–1995] // Диф. уравн. 1995. Т. 31. №10. С. 1770–1771 (совместно с Н.А. Изобовым, В.А. Ильиным, И.Т. Кигурадзе, В.А. Плиссом, Н.Х. Розовым). (Otakar Borůvka [1899–1995], translation in *Differential Equations* **31**. No. 10. P. 1744–1745 (1996)).
96. In memoriam Professor Dragoslav S Mitrinović [1908–1995] // Univ. Beograd. Publ. Elektrotechn. Fak. Ser. Mat. 6 (1995). P. 3–7 (совместно с Merkle Milan, D. Cvetković, Н.Х. Розов, Olkin Ingram).

1996

97. The method of an exact linearization ordinary differential equations of n -order // J. Nonlinear Math. Phys. 1996. V. 3. No. 3–4. P. 341–350.
98. Памяти Отакара Борувки // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 1996. №2. С. 5–7.
99. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $n > 2$ // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 1996. №2. С. 8–22 (совместно с С.Ю. Поповым).
100. Уравнение Эмдена–Фаулера и его обобщения: групповой анализ и точные решения: Матер. межд. конф. и Чебышев. чтений. М.: Изд-во МГУ, 1996. С. 57–62.
101. Факторизация, преобразования и интегрируемость обыкновенных дифференциальных уравнений (перераб. вар. дис. на соиск. учен. ст. д-ра. физ.-мат. наук.). Самара: СамГУ, 1996, 324 с.

1997

102. Представление решений линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с использованием языка REDUCE и графического пакета GNUPLOT // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 1997. №2(4). С. 109–114 (совместно с И.С. Фроловым).
103. Факторизация, преобразования и интегрируемость обыкновенных дифференциальных уравнений: Автореф. дис. ... д-ра. физ.-мат. наук. // М.: Изд-во МГУ, 1997. 36 с.
104. Transformations of linear differential equations of second order and adjoined nonlinear equations // Archivum Math. (Brno), **33**. No. 2. 1997. P. 75–98 (совместно с Н.Х. Розовым).
105. The Generalized Emden–Fowler Equation // Symmetry in Nonlinear Mathem. Physics. 1997. V. 1. P. 155–163.
106. Group Analysis of Ordinary differential equations of the order $n > 2$ // Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics. 1997. V. 1. P. 164–171 Nat. Acad. Sci. Ukraine, Inst. Math., Kiev (совместно с С.Ю. Поповым).
107. Валентин Евгеньевич Воскресенский (К семидесятилетию со дня рождения) // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 1997. №2. С. 10–17 (совместно с В.М. Климкиным).

1998

108. Об элементарных инвариантных решениях типа бегущей волны для уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова // Доклады РАН. 1998. Т. 359. №6. С. 731–734.
On elementary invariant running-wave solutions for the Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation // Doklady Mathematics. 1998. V. 57. No. 2. P. 282–285.
109. Нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения и инвариантные решения уравнений математической физики. Совм. зас. сем. им. И.Г. Петровского и Моск. мат. общ. // Успехи мат. наук. 1998. Т. 53. №4. С. 208.
110. Factorization of some classes nonlinear ordinary differential equations: methods and algorithms (preprint) // Int. Symp. on Symbolic Alg. comp. ISSAC'98, Rostock, 16 p.
111. Factorization of nonlinear ordinary differential equations and linearization // ICM' 1998, Abstracts of Plenary and Invited Lectures, Berlin Aug. 18–27 1998. P. 48–49.
112. Classification of $(n > 2)$ -th order linear ordinary differential equations (on Halphen's problem): Межд. конф. посв. 90-летию Л.С. Понтрягина, 31 авг. – 6 сент. 1998, Тез. докл., М.: Изд-во МГУ, 1998. С. 15–17.

113. Factorization and transformations of nonlinear differential equations: methods and algorithms // Intern. Congress on Nonlinear Analysis and its Applications Moscow. 1998. P. 595–625.
<http://www.acad-ns.newmail.ru/nlaia98>.
114. Точная линеаризация некоторых классов обыкновенных автономных дифференциальных уравнений // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 1998. №4. С. 5–14 (совместно с И.С. Орловой).

1999

115. Метод точной линеаризации и его применение к некоторым системам гидродинамического типа / II Междунар. симпозиум "Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред". М., 1999. С. 48.
116. The Method of factorization and the differential resultant for linear and nonlinear differential operators // International Conf. Differential and Functional Equations. М., 1999. P. 14–16.
117. Факторизация нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и линеаризация // Доклады РАН. 1999. Т. 368. №5. С. 604–608.
Factorization of nonlinear ordinary differential equations and linearization // Doklady Mathematics. V. 60. No. 2. P. 278–282.

2000

118. Transformations of ordinary differential equations: local and nonlocal symmetries // Proc. of the Third Intern. Conf. "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics", Proc. of Inst. of Math. of NAS of Ukraine. V. 30. Part 1. Kiev, 2000. P. 25–34.
119. The exact linearization some classes of ordinary differential equations for order $n > 2$ // Proc. of the Third of Intern. Conf. "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics", Proc. of Inst. of Math. of NAS of Ukraine. Kiev, 2000. V. 30. Part 1. P. 90–98. (совместно с И.С. Орловой).
120. Transformations and exact solutions of nonlinear differential equations: Симпозиум "Теория уравнений с частными производными и специальные вопросы теории обыкновенных дифференциальных уравнений", посвященный 150-летию со дня рождения С.В. Ковалевской, Санкт-Петербург, 11–15 мая 2000. СПб., 2000. С. 13–14.
121. Linearization of second and third orders nonlinear ordinary differential equations // Proc. of Intern. Sci. Conf. Herlany, Slovak Rep. Oct. 21–23, 1999. Kosice, Univ. Technology, 2000. P. 35–38 (совместно с И.С. Орловой).
122. Canonical forms of ordinary differential equations of order N with power nonlinearity // Proc. of Intern. Sci. Conf. Herlany, Slovak Rep. Oct., 1999. Kosice, Univ. Technology, 2000. P. 31–34.

123. Точная линеаризация нелинейных обыкновенных автономных дифференциальных уравнений // Программирование. 2000. Т. 26. №1. С. 25–27.
Exact linearization of nonlinear autonomous ordinary differential equations / In: "Program Comput. Software". **26**. (2000). No. 1. P. 25–27.

2001

124. Point and nonpoint transformations of nonlinear ordinary differential equations // Intern. Conf. MOGRAN 2000, Modern Group Analysis for the New Millenium, Ufa, 27 Sept.–3 Oct. 2000. USATU Publishers, 2001. P. 32–36 (совместно с И.С. Орловой).
125. On a method of exact linearization and on higher order nonlinear evolutionary equations // Intern. Conf. "Differetial equations and related topics", dedicated to the Centary Anniversary of I.G.Petrovskii, Moscow, May 22–27. M., 2001. P. 59–60.
126. On a method of exact linearization of ordinary differential equations and on a new class of higher order nonlinear evolutionary equations // Max–Planck–Institut für Mathematik, Bonn, Arbeitstagung.5, 2001, Preprints Series 2001 (50). P. 1–9.
127. On the method of exact linearization of autonomous ordinary differential equations // Max–Planck–Institut für Mathematik, Bonn, Preprints Series 2001 (73). P. 1–24.
128. The integration of ordinary differential equations: factorization and transformations // Mathematics and Computers in Simulation. 2001. V. 57. P. 175–195.
129. Александр Андронов и нелинейная наука // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2001. №4(22). С. 9–18.
130. VIII Всероссийский съезд по по теоретической и прикладной механике // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2001. №4(22). С. 115–120 (совместно с В.И. Астафьевым и Ю.Н. Радаевым).

2002

131. Classification of n -th order ordinary differential equations with power nonlinearity // Актуальные проблемы математики. Математические модели современного естествознания. Уфа, 2002. С. 174–184.
132. Нелинейные принципы суперпозиции дифференциальных уравнений // Нелинейный динамический анализ (NDA'2) междунар. конгресс, Москва, 3–8 июня 2002 г. М.: 2002. С. 13–14.

133. Задача Гильдена–Мещерского: траектории движения // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2002. №2(24). С. 5–23 (совместно с О.Л. Стариновой).
134. On methods of factorization and exact linearization of ordinary differential equations // "Progress in Nonlinear Science", Proc. of the Intern. Conf. Dedicated to the 100-th Anniversary of A.A. Andronov of Nizhny Novgorod, July 2–6, 2001, V. 1. Math. Problems of Nonlinear Dynamics, N.N. Institut of Applied Physics RAS, Univ. of Nizhny Novgorod, 2002. P. 190–195.
135. Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения: Монография. М.: Науч.-изд. центр "Регулярная и хаотическая динамика", 2002. 464 с.
136. Research of non-stationary problems of celestial mechanics: transformations to an autonomous form (глава из коллективной монографии) // Nonstationary Dynamical Problems in Astronomy (Ed. Tuken B. Omarov), Nova Science, Publishers, Inc. New York, 2002. P. 55–106.
137. Инвариантные решения нелинейных эволюционных уравнений: IX Всерос. совещание по проблемам построения сеток для решения задач мат. физики, посв. памяти А.Ф. Сидорова; XIV Всерос. конф. "Теор. основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач мат. физики", посв. памяти К.И. Бабенко. Дюрсо, 2002. С. 84–85.

2003

138. Nonlinear equations: factorization, linearization, exact solutions // Колмогоров и современная математика: Тез. докл., Москва, 16–21 июня, 2003 г. М.: Изд-во, 2003. С. 22–23.
139. Factorization and transformations of linear and nonlinear ordinary differential equations // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. A 502 (2003). P. 646–648.
140. Нестационарные задачи небесной механики: преобразования и интегрируемость // Proc. Joint Intern. Conf. "New Geometry of Nature", Kazan State University, Kazan, Russia, Aug. 25–Sept. 5, 2003. Kazan, 2003, Vol. III. P. 31–37
141. Факторизация, преобразования и интегрируемость обыкновенных дифференциальных уравнений. 1. Линейные уравнения // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. Спец. выпуск. 2003. С. 5–43.
142. Факторизация, преобразования и интегрируемость обыкновенных дифференциальных уравнений. 2. Нелинейные уравнения // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2003. №4(30). С. 36–78.

143. Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения: Автореферат дис. ... д-ра. физ.-мат. наук., М.: Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, 2003. 43 с.
144. Как прикладная математика помогла сделать открытие в физике (посвящается 75-летию С.П.Курдюмова) // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. Второй спец. выпуск. 2003. С. 36–48.
145. Nonstationary problems of celestial mechanics: transformations and integrability, Intern. conf. "Modern theory of dynamical systems and applications to theoretical celestial mechanics", Steklov Math. Inst. of RAS, Dec. 23–28 2002 // J. of Dynamical and Control Systems. Vol. 120. No. 1. January 2004. P. 104–105.
146. Новый класс нелинейных эволюционных уравнений // Докл. РАН, **390**, 2003, №5. С. 583–587.
A new class of nonlinear evolution equations// Dokl. Math. 2003. **67**. No. 3. P. 391–395.

2004

147. Представление нелинейных эволюционных уравнений через факторизацию дифференциальных операторов: Междунар. конф. "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы, посв. 103-летию И.Г.Петровского", Москва, 16–22 мая 2004 г., Сб. тезисов. М.: Изд-во МГУ, 2004. С. 26.
148. Представление нелинейных эволюционных уравнений через факторизацию дифференциальных операторов: Междунар. конф. "Алгебра и анализ", посв. 200-летию Казанского университета, Казань, 2–9 июля 2004 г. // Труды матем. центра им. Н.И.Лобачевского. 2004. Т. 23. С. 81–83.
149. New classes of nonlinear evolutionary equations // Proceedings of Institute Mathematics of NAS Ukraine. 2004. V. 50. Part 1. P. 325–330.
150. Нелинейные дифференциальные уравнения: некоторые конструктивные методы: Материалы междунар. науч. конф. "Актуальные проблемы математики и механики", 26 сент. – 1 окт., Казань, 2004 г., посв. 200-летию Казанского университета // Труды матем. центра им. Н.И.Лобачевского. 2004. Т. 25. С. 41–42.
151. Об инвариантных решениях нелинейных уравнений теплопроводности: Всероссийская конф., приуроченная к 85-летию Л.В.Овсянникова "Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение", 10–14 мая 2004 г. Новосибирск: Изд-во Ин-та гидродинамики СО РАН, 2004. С. 33.

2005

152. Factorization of some second order nonlinear differential equations / Algorithmic Algebra and Logic / Proc. of the A3L 2005, April 3–6, 2005, Passau, Germany (Eds. Dolzmann, Seide, Sturm). P. 41–47. (совместно с Ф.Л. Берковичем).
153. Некоторые аналитические методы нелинейной динамики (памяти С.П. Курдюмова) // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2005. №2(36). С. 32–64.
154. О некоторых инвариантных решениях нелинейного уравнения теплопроводности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2005. №3(37). С. 19–33 (совместно с А.Н. Лепиловым).
155. Факторизация и линеаризация обыкновенных дифференциальных уравнений // Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике, Новосибирск, 27–31 мая 2005 г. Новосибирск: Изд-во Ин-та гидродинамики СО РАН 2005. С. 28–29
156. Некоторые аналитические методы нелинейной динамики: Всерос. конф. "Диф. уравн. и их прилож." (приуроченная к 70-летию профессора В.А. Кондратьева), Самара, 27 июня – 2 июля, 2005 г. Тез. докл. Самара: Изд-во "Универс-групп" 2005. С. 20–21.
157. On Euler–Imshenetsky–Darboux transformation of second-order linear differential equations // Archiv. math. SA/0510627v1. 28 Oct. 2005 24 p. (совместно с С.А. Евлаховым).
158. О преобразовании Эйлера–Имшенецкого–Дарбу линейных уравнений второго порядка (совместно с С.А. Евлаховым, принято к печати в журнале "Программирование". 2006. №3).

Поступила в редакцию 6/XII/2005;