

УДК 534.112

НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕЗОНАНС В СТРУННОМ ЭМР¹

© 2005 В.В. Зайцев, А.В. Никулин, В.В. Никулин²

Исследованы нелинейные колебания струны в электромеханическом резонаторе. Экспериментально установлено, что в системе наблюдается явление нелинейного резонанса. Разработана математическая модель струнного резонатора в форме нелинейного интегродифференциального уравнения в частных производных, учитывающая изменения силы натяжения при колебаниях струны. Показано, что при учете лишь одной моды колебаний полученное уравнение переходит в уравнение Дюффинга. Результаты моделирования сопоставлены с результатами эксперимента.

Введение

Явление нелинейного резонанса наблюдается во многих колебательных системах при значительных амплитудах внешнего воздействия [1]. Оно характеризуется скачками амплитуды при плавном изменении параметров внешнего воздействия и асимметрией частотной характеристики. Ранее [2] сообщалось о наблюдениях нелинейного резонанса колебаний струны. В настоящей работе экспериментально и теоретически исследуются нелинейные колебания проводящей электрический ток струны, входящей в конструкцию струнного электромеханического резонатора (ЭМР). Помимо общефизического интереса исследование нелинейного резонанса в ЭМР имеет и прикладное значение, т.к. подобного типа резонаторы на протяжении уже длительного времени широко используются в акселерометрах, динамометрах и манометрических устройствах [3].

1. Резонансная характеристика струнного ЭМР

Экспериментальные исследования нелинейных колебаний струны проведены по схеме, представленной на рис. 1. В экспериментах использовался

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором В.А. Салеевым.

²Зайцев Валерий Васильевич (zaitsev@ssu.samara.ru), Никулин Андрей Валентинович, (nikulinav@mail.ru), Никулин Владимир Владимирович, кафедра радиофизики и компьютерного моделирования радиосистем Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1

электромеханический резонатор со струной из вольфрамового сплава длиной 6 мм и диаметром 0.1 мм, расположенной в зазоре между полюсами самарий-кобальтового магнита. Ширина зазора равна 0,5 мм. Резонатор возбуждался источником переменного тока, реализованным путем последовательного подключения к низкоомному выходу генератора ГЗ-117 резистора сопротивлением 500 Ом.

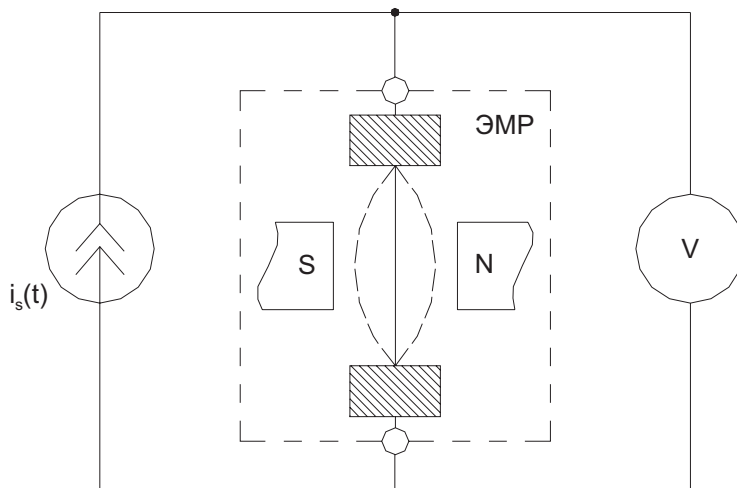


Рис. 1. Схема эксперимента

На рис. 2 приведен график зависимости амплитуды a напряжения на резисторе от частоты f гармонического тока возбуждения с амплитудой 14 мА. Зависимость $a = a(f)$ характеризуется скачками амплитуды (на графике они отмечены стрелками) и гистерезисом, наблюдаемым при замкнутом цикле изменения частоты. В целом подобная зависимость типична для явления нелинейного резонанса [1]. Широкоизвестная радиосистема этого типа — колебательный контур с варикапом [4].

Отметим, что частотно-независимый "пьедестал" на графике зависимости $a = a(f)$ возникает из-за падения напряжения на омическом сопротивлении струны.

Для амплитуд возбуждения, меньших 1 мА, колебания струны близки к линейным. При этом, как показывает эксперимент, резонанс характеризуется частотой $f_0 = 16420$ Гц и достаточно высокой добротностью $Q = 2705$.

2. Математическая модель нелинейных колебаний струны

При разработке математической модели нелинейного резонанса колебаний струны мы исходили из предположения о том, что сила натяжения струны зависит от ее отклонения от состояния равновесия. Колебания вы-

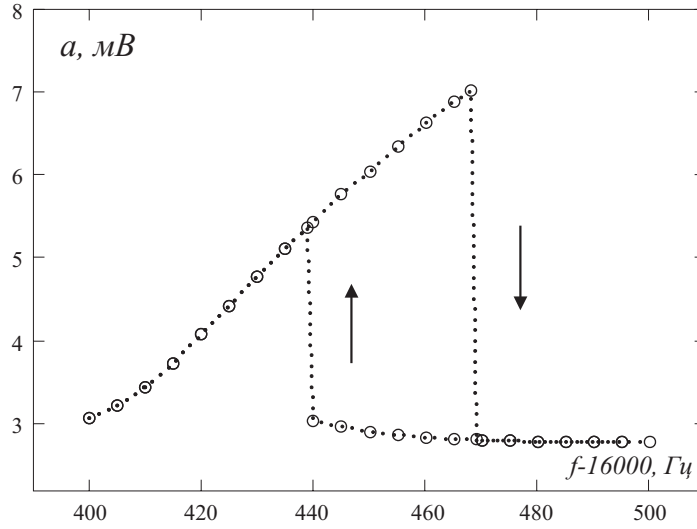


Рис. 2. Частотная зависимость амплитуды колебаний напряжения на ЭМР (эксперимент)

зывают удлинение струны

$$\Delta l = l_0 \left(\frac{1}{l_0} \int_0^l \sqrt{1 + (u'_x)^2} dx - 1 \right). \quad (1)$$

Это удлинение благодаря упругости струны приводит к дополнительному натяжению $\Delta T = (SE/l_0) \Delta l$, так что полная сила натяжения струны равна

$$T = T_0 + \Delta T = T_0 \left[1 + \varepsilon \left(\frac{1}{l_0} \int_0^l \sqrt{1 + (u'_x)^2} dx - 1 \right) \right]. \quad (2)$$

В формулах (1)–(2) $\varepsilon = SE/T_0$ — безразмерный параметр, T_0 и l_0 — натяжение и длина невозмущенной струны, S — площадь ее поперечного сечения, E — модуль Юнга материала, из которого изготовлена струна.

Далее, используя приближение

$$\sqrt{1 + (u'_x)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2,$$

преобразуем (2) в выражение

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2l_0} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right).$$

С учетом этого выражения, рассматривая движение элементов струны в плоскости, перпендикулярной силовым линиям магнитного поля с индукцией $B(x)$, под действием силы упругости и силы Ампера, для отклонения

струны от положения равновесия $u(x, t)$ получим нелинейное интегродифференциальное уравнение в частных производных, учитывающее изменения силы натяжения при колебаниях струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(1 + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2\delta \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma b(x) i(t). \quad (3)$$

В уравнении (3) отклонение u нормировано на величину $l_0/\sqrt{\epsilon}$, координата x — на длину l_0 , а временная переменная t — на время $\tau = l_0 \sqrt{\rho/T_0}$ распространения волнового возмущения по струне с линейной плотностью ρ . Кроме того, в (3) $b(x) = B(x)/B_{\max}$ — нормированная на максимальное значение индукция магнитного поля, $i(t) = I(t)/I_{\max}$ — нормированный на амплитудное значение ток в струне, δ — показатель затухания волны в струне, $\gamma = \sqrt{\epsilon} \frac{l_0 B_{\max} I_{\max}}{T_0}$ (см. также [5]).

Традиционный подход к исследованию распределенных автоколебательных систем состоит в разложении решения по модам собственных колебаний резонатора (см., например, [6]). Используя разложение

$$U(x, t) = \sum_{m=1}^M A_m(t) \sin(\pi m x),$$

нетрудно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений для модовых коэффициентов (комплексных амплитуд) $A_m(t)$:

$$\frac{d^2 A_m}{dt^2} + 2\delta \frac{dA_m}{dt} + \omega_m^2 \left(1 + \frac{1}{4} \sum_{m=1}^M A_m^2 \right) A_m = \gamma \chi_m i(t), \quad (4)$$

где $\omega_m = \pi m$ — нормированная частота колебаний моды нерастяжимой струны, χ_m — коэффициенты разложения функции $b(x)$ по модам ЭМР [5]. В одномодовом приближении уравнение (4) переходит в широкоизвестное уравнение Дюффинга:

$$\frac{d^2 A_1}{dt^2} + 2\delta \frac{dA_1}{dt} + \omega_1^2 A_1 + \frac{\omega_1^2}{4} A_1^3 = \gamma \chi_1 i(t). \quad (5)$$

Уравнение (5) с гармонической правой частью $i(t) = \cos(\omega t)$ мы используем для расчета частотной зависимости установившейся амплитуды вынужденных колебаний в резонаторе.

3. Результаты расчетов и сравнение с экспериментом

Как было установлено в ходе экспериментальных исследований, резонансная система имеет относительно высокую добротность $Q = 2705$. Поэтому для решения нелинейного уравнения (5) вполне применим метод медленно меняющихся амплитуд [7]. Здесь использована численная версия метода, описанная в [8].

На рис. 3 линией изображен график зависимости установившейся амплитуды колебаний напряжения на ЭМР от частоты внешнего воздействия, рассчитанный для $\gamma\chi_1 = 6.7 \cdot 10^{-5}$. Значения амплитуды на графике даны в милливольтках, частота указана в относительных единицах $\sigma = f/f_0$. Участок кривой, показанный пунктиром, соответствует неустойчивым решениям уравнения (5), не реализуемым на практике. На границах этого участка в реальной физической системе происходят скачкообразные переходы колебаний на устойчивые ветви функции $a = a(f)$.

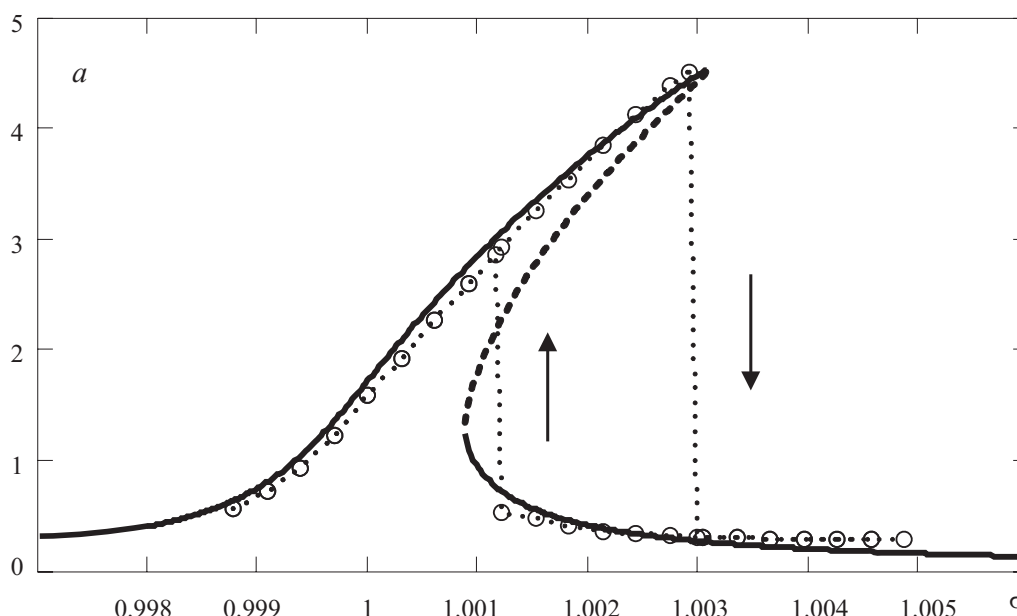


Рис. 3. Частотная зависимость амплитуды колебаний напряжения на ЭМР (теория и эксперимент)

Точками на рис. 3 отмечены значения амплитуды, измеренные в эксперименте. Из экспериментальных значений удален "пьедал", обусловленный падением напряжения на омическом сопротивлении струны, т.к. модель (5) не предполагает описания этого эффекта. Сопоставление теоретических и экспериментальных данных указывает на их хорошее соответствие и позволяет сделать вывод о том, что предложенная модель (3) адекватно описывает явление нелинейного резонанса при вынужденных колебаниях струны.

Литература

- [1] Хайяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. 432 с.

- [2] Зайцев В.В., Никулин А.В., Трещев В.М. Нелинейные колебания в струнном резонаторе: Тезисы докладов и сообщений III Международной научно-технической конференции "Физика и технические приложения волновых процессов". Волгоград, 2004. С. 157–158.
- [3] Регистрационная аппаратура для вибрационно-частотных датчиков / Под ред. Ю.С.Плискина. М.: НИКИМП, 1967. 356 с.
- [4] Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р. и др. Основы теории колебаний / Под ред. В.В.Мигулина. М.: Наука, 1978. 392 с.
- [5] Зайцев В.В., Зайцев О.В., Никулин А.В. и др. Моделирование автоколебаний в генераторе с электромеханическим резонатором // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2003. Второй спец. вып. С. 118–126.
- [6] Ланда П.С. Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука, 1983. 320 с.
- [7] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
- [8] Зайцев В.В., Зайцев О.В., Никулин А.В. и др. Численная реализация метода ММА и цифровая фильтрация сигналов // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2004. №2(32). С. 120–130.

Поступила в редакцию 16/VIII/2005;
в окончательном варианте — 16/VIII/2005.

NONLINEAR RESONANCE IN A STRING RESONATOR³

© 2005 V.V. Zaitsev, A.V. Nikhulin, V.V. Nikhulin⁴

Nonlinear oscillations of a string in an electromechanical resonator are analyzed by theoretical and experimental methods. An effect of nonlinear resonance in the system is observed. A mathematical model of the string resonator in the form of nonlinear integro-differential equation containing partial derivatives and allowing string tension strength variation while oscillating is devised. A transition of the obtained equation in single-mode approximation into Duffing's equation is demonstrated. Theoretical modelling and the experiment results are compared.

Paper received 16/VIII/2005.
Paper accepted 16/VIII/2005.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. V.A. Saleev.

⁴Zaitsev Valeriy Vasilievich (zaitsev@ssu.samara.ru), Nikhulin Andrei Valentinovich (nikhulinav@mail.ru), Nikhulin Vladimir Vladimirovich, Dept. of Radiophysics and Computer Modelling of Radiosystems, Samara State University, Samara, 443011, Russia.