

УДК 535.2

ДИССИПАТИВНАЯ ДИНАМИКА НЕВЫРОЖДЕННОЙ ДВУХФОТОННОЙ МОДЕЛИ ДЖЕЙНСА—КАММИНГСА В РЕЗОНАТОРЕ КОНЕЧНОЙ ДОБРОТНОСТИ¹

© 2005 Е.К. Башкиров² М.С. Русакова³

В работе исследовано временное поведение наблюдаемых для невырожденной модели двухуровневого атома в резонаторе конечной добротности. С помощью решения кинетического уравнения для матрицы плотности получены аналитические выражения для среднего числа фотонов и атомных населенностей для вакуумного начального состояния поля. Для когерентного и сжатого начального состояния поля исследована динамика наблюдаемых для различных значений параметров системы. Рассмотрена статистика фотонных мод.

Введение

Простейшей нетривиальной точно решаемой моделью квантовой оптики и квантовой электроники является модель Джейнса—Каммингса, описывающая взаимодействие квантованной моды поля излучения с двухуровневым атомом в резонаторе. В последние десятилетия модель являлась предметом многочисленных исследований, которые привели к более глубокому пониманию особенностей динамического взаимодействия атома с полем [1]. В недавних экспериментах с высоковозбужденными ридберговскими атомами в высокодобротных сверхпроводящих резонаторах удалось наблюдать ряд эффектов, предсказанных ранее на основе анализа динамики модели Джейнса—Каммингса [2].

Хорошо известно, что двухфотонные процессы очень важны в атомных системах благодаря высокой степени корреляции между испускаемыми фотонами. Поэтому естественным важным обобщением модели Джейнса—Каммингса является двухфотонная модель Джейнса—Каммингса. Интерес к указанной модели особенно возрос в связи с экспериментальной ре-

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором В.А. Салеевым.

²Башкиров Евгений Константинович (bash@ssu.samara.ru), кафедра общей и теоретической физики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

³Русакова Маргарита Сергеевна (rusakova__@mail.ru), кафедра информатики и вычислительной математики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

ализацией первого одномодового двухфотонного лазера на ридберговском атоме [3]. В последнее время появилось большое количество работ, посвященных исследованию динамики средних населенностей атомных уровней и среднего числа фотонов, сжатия в фотонной и атомной подсистемах, статистики фотонного поля и фазовых свойств поля, энтропии поля и степени перепутывания между полем и атомом, спектров испускания, W - и Q -функций Вигнера для поля, влияния Штарковского сдвига и фазовой диссипации на неклассическую динамику модели и других свойств как вырожденной [4–14], так и невырожденной [15–27] двухфотонной модели Джейнса–Каммингса. При использовании двухфотонной модели Джейнса–Каммингса для описания свойств одноатомных лазеров и мазеров необходимо учесть потери фотонов из резонатора. Однако в настоящее время диссипативная динамика двухфотонной модели Джейнса–Каммингса в резонаторе с конечной добротностью рассматривалась лишь для случая вырождения фотонных мод [26–29]. Представляет значительный интерес рассмотрение динамических свойств также и невырожденной двухфотонной модели Джейнса–Каммингса, что и будет являться целью настоящей работы.

1. Гамильтониан и кинетическое уравнение

Невырожденная двухфотонная модель Джейнса–Каммингса представляет собой двухуровневый атом с частотой атомного перехода ω_0 , нерезонансно взаимодействующий с двумя различными фотонными модами с частотами ω_1 и ω_2 . Данная система в приближении вращающейся волны описывается при помощи гамильтониана:

$$H = H_A + H_F + H_{AF}, \quad (1.1)$$

где $H_A = \hbar\omega_0 R^z$ — гамильтониан свободного двухуровневого атома; $H_F = \hbar(\omega_1 a_1^\dagger a_1 + \omega_2 a_2^\dagger a_2)$ — гамильтониан свободного электромагнитного поля и $H_{AF} = \hbar g(a_1 a_2 R^+ + a_1^\dagger a_2^\dagger R^-)$ — гамильтониан взаимодействия атома с полем. Здесь $a_i^\dagger$ (a_i) — операторы рождения (уничтожения) фотонов в соответствующей моде поля, $R^\pm$ — операторы, описывающие переходы между основным и возбужденным уровнями в двухуровневом атоме, R^z — оператор инверсии и g — постоянная связи "атом–поле". Введем параметр расстройки Δ следующим образом:

$$\Delta = \omega_0 - \omega_1 - \omega_2.$$

При записи гамильтониана (2.1) мы пренебрегли Штарковским сдвигом, обусловленным взаимодействием виртуального промежуточного уровня с основным и возбужденным уровнями в двухуровневом атоме.

Уравнение эволюции для матрицы плотности ρ системы "атом+поле" в резонаторе конечной добротности выглядит следующим образом [27]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i/\hbar [H, \rho] - \sum_{i=1}^2 k_i (a_i^\dagger a_i \rho - 2 a_i \rho a_i^\dagger a_i + a_i), \quad (1.2)$$

здесь $2k_i$ — скорость потерь фотонов из i -й моды резонатора. В дальнейшем будем для простоты считать, что $k_1 = k_2 = k$.

Работая с величинами в представлении $W = e^{\frac{i}{\hbar} H_I} \rho(t) e^{-\frac{i}{\hbar} H_I}$, уравнение (2.2) для матрицы плотности приводится к виду

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \sum_{i=1}^2 k (a_i^\dagger a_i W - 2 a_i W a_i^\dagger + W a_i^\dagger a_i). \quad (1.3)$$

Решение уравнения (2.3) будем искать в представлении "одетых" состояний, т.е. в представлении, состоящем из полного набора собственных функций гамильтониана H_{AF} . Для случая, когда атом первоначально находится в возбужденном состоянии и в отсутствие потерь, полный набор представлен состояниями:

$$|\Psi_n^\pm\rangle = \frac{\gamma_{n_1 n_2}^\pm}{\sqrt{2}} \left| +, n_1, n_2 \right\rangle \pm \frac{\gamma_{n_1 n_2}^\mp}{\sqrt{2}} \left| -, n_1 + 1, n_2 + 1 \right\rangle, \quad (1.4)$$

которые соответствуют энергии

$$E_n^\pm = \hbar \phi_{n_1 n_2} \pm \hbar \Omega_{n_1 n_2},$$

где

$$\phi_{n_1 n_2} = \omega_1 \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) + \omega_2 \left(n_2 + \frac{1}{2} \right),$$

$$\Omega_{n_1 n_2} = \sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + g^2(n_1 + 1)(n_2 + 1)}, \quad \delta(n) = \Delta/\Omega(n).$$

Здесь $|\alpha; n\rangle$ — собственные состояния гамильтониана (2.1) без учета взаимодействия, т.е. $H_A + H_F$:

$$|\alpha; n\rangle = |\alpha\rangle_A |n\rangle_F,$$

где $\alpha = 1, 2$; $n = 0, 1, 2, \dots$

Потери фотонов из резонатора учитываются при помощи состояний:

$$|\Psi_1^l\rangle = |- , 1, 0\rangle, \text{ соответствующего энергии } E = \hbar\omega_1 - \frac{1}{2}\hbar\omega_0,$$

$$|\Psi_2^l\rangle = |- , 0, 1\rangle, \text{ соответствующего энергии } E = \hbar\omega_2 - \frac{1}{2}\hbar\omega_0,$$

$$|\Psi_3^l\rangle = |- , 0, 0\rangle, \text{ соответствующего энергии } E = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0.$$

В секулярном приближении ($k \ll g$) уравнения для диагональных элементов матрицы W имеют вид:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{n_1 n_2}^\pm | \dot{W} | \Psi_{n_1 n_2}^\pm \rangle = & -k \left\{ 2(n_1 + n_2) + \gamma_{n_1 n_2}^{\mp 2} \langle \Psi_{n_1 n_2}^\pm | W | \Psi_{n_1 n_2}^\pm \rangle - \right. \\ & - \frac{g^2(n_2 + 1)}{2} \left[\frac{n_1 + 1}{\Omega_{n_1 n_2}} \frac{\gamma_{n_1+1, n_2}^\pm}{\gamma_{n_1 n_2}^\mp} + \frac{n_1 + 2}{\Omega_{n_1+1, n_2}} \frac{\gamma_{n_1 n_2}^\mp}{\gamma_{n_1+1, n_2}^\pm} \right]^2 \langle \Psi_{n_1+1, n_2}^\pm | W | \Psi_{n_1+1, n_2}^\pm \rangle - \\ & - \frac{g^2(n_2 + 1)}{2} \left[\frac{n_1 + 1}{\Omega_{n_1 n_2}} \frac{\gamma_{n_1+1, n_2}^\mp}{\gamma_{n_1 n_2}^\mp} - \frac{n_1 + 2}{\Omega_{n_1+1, n_2}} \frac{\gamma_{n_1 n_2}^\mp}{\gamma_{n_1+1, n_2}^\mp} \right]^2 \langle \Psi_{n_1+1, n_2}^\mp | W | \Psi_{n_1+1, n_2}^\mp \rangle - \\ & \left. - \frac{g^2(n_1 + 1)}{2} \left[\frac{n_2 + 1}{\Omega_{n_1 n_2}} \frac{\gamma_{n_1, n_2+1}^\pm}{\gamma_{n_1 n_2}^\mp} + \frac{n_2 + 2}{\Omega_{n_1, n_2+1}} \frac{\gamma_{n_1 n_2}^\mp}{\gamma_{n_1, n_2+1}^\pm} \right]^2 \langle \Psi_{n_1, n_2+1}^\pm | W | \Psi_{n_1, n_2+1}^\pm \rangle - \right. \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$-\frac{g^2(n_1+1)}{2} \left[\frac{n_2+1}{\Omega_{n_1 n_2}} \frac{\gamma_{n_1, n_2+1}^{\mp}}{\gamma_{n_1 n_2}^{\mp}} - \frac{n_2+2}{\Omega_{n_1, n_2+1}} \frac{\gamma_{n_1 n_2}^{\mp}}{\gamma_{n_1, n_2+1}^{\mp}} \right]^2 \langle \Psi_{n_1, n_2+1}^{\mp} | W | \Psi_{n_1, n_2+1}^{\mp} \rangle,$$

где

$$\gamma_{n_1 n_2}^{\pm} = \sqrt{1 \pm \frac{\Delta}{2\Omega_{n_1 n_2}}}.$$

Уравнения для матричных элементов, ответственных за потери фотонов из резонатора, имеют форму

$$\langle \Psi_i^l | \dot{W} | \Psi_i^l \rangle = -k(2\langle \Psi_i^l | W | \Psi_i^l \rangle - \frac{g^2}{\Omega_{00}^2 \gamma_{00}^{+2}} \langle \Psi_{00}^+ | W | \Psi_{00}^+ \rangle - \quad (1.6)$$

$$- \frac{g^2}{\Omega_{00}^2 \gamma_{00}^{-2}} \langle \Psi_{00}^- | W | \Psi_{00}^- \rangle),$$

$$\langle \Psi_3^l | \dot{W} | \Psi_3^l \rangle = 2k(\langle \Psi_1^l | W | \Psi_1^l \rangle + \langle \Psi_2^l | W | \Psi_2^l \rangle), \quad (1.7)$$

где i принимает значения 1, 2.

Ненулевые недиагональные элементы матрицы W описываются уравнениями

$$\langle \Psi_{n_1 n_2}^{\pm} | \dot{W}(t) | \Psi_{n_1 n_2}^{\mp} \rangle = -2k(n_1 + n_2 + 1) \langle \Psi_{n_1 n_2}^{\pm} | W | \Psi_{n_1 n_2}^{\mp} \rangle.$$

Решения уравнений (2.8) имеют вид

$$\langle \Psi_{n_1 n_2}^{\pm} | W(t) | \Psi_{n_1 n_2}^{\mp} \rangle = \langle \Psi_{n_1 n_2}^{\pm} | W(0) | \Psi_{n_1 n_2}^{\mp} \rangle \exp \{-2kt(n_1 + n_2 + 1)\}.$$

Решения уравнений (2.5)–(2.7) для произвольного начального состояния атома и поля могут быть найдены только численными методами. Используя найденные решения, можно получить средние значения любых наблюдаемых величин O :

$$\langle O \rangle = S p[\tilde{O}(t)W(t)],$$

где

$$\tilde{O} = e^{\frac{i}{\hbar} H t} O e^{-\frac{i}{\hbar} H t}.$$

Остановимся в настоящей работе на исследовании динамики рассматриваемой системы для случая трех различных начальных состояний полевой системы: вакуумного, когерентного и сжатого.

2. Случай вакуумного начального состояния поля

Для случая вакуумного начального состояния поля и возбужденного начального состояния атома матрицу плотности W в начальный момент времени в терминах "одетых" состояний можно представить как:

$$W(0) = \frac{1}{2} (\gamma_{00}^{+2} |\Psi_{00}^+\rangle \langle \Psi_{00}^+| + \gamma_{00}^{-2} |\Psi_{00}^-\rangle \langle \Psi_{00}^-| + \\ + \gamma_{00}^+ \gamma_{00}^- |\Psi_{00}^+\rangle \langle \Psi_{00}^-| + \gamma_{00}^- \gamma_{00}^+ |\Psi_{00}^-\rangle \langle \Psi_{00}^+|).$$

Очевидно, что для такого начального состояния системы уравнения (2.5)–(2.7) имеют простые решения:

$$\langle \Psi_{00}^{\pm} | W | \Psi_{00}^{\pm} \rangle = \frac{\gamma_{00}^{\pm 2}}{2} \exp \left\{ -2kt \frac{g\gamma_{00}^{\mp}}{\Omega_{00}\gamma_{00}^{\pm}} \right\},$$

$$\langle \Psi_{00}^{\pm} | W | \Psi_{00}^{\mp} \rangle = \frac{\gamma_{00}^{+}\gamma_{00}^{-}}{2} \exp\{-2kt\}.$$

Для матричных элементов, соответствующих потерям фотонов из резонатора, решения уравнений для нулевой расстройки имеют вид

$$\langle \Psi_i^l | W | \Psi_i^l \rangle = kte^{-2kt},$$

$$\langle \Psi_3^l | W | \Psi_3^l \rangle = 1 - 2kte^{-2kt} - e^{-2kt},$$

где $i = 1, 2$. Для ненулевой расстройки решения кинетического уравнения для данных матричных элементов могут быть представлены выражениями:

$$\langle \Psi_i^l | W | \Psi_i^l \rangle = A \exp \left\{ -2kt \frac{g\gamma_{00}^{-}}{\Omega_{00}\gamma_{00}^{+}} \right\} + B \left\{ -2kt \frac{g\gamma_{00}^{+}}{\Omega_{00}\gamma_{00}^{-}} \right\} + Ce^{-2kt},$$

где i принимает значения 1, 2, а коэффициенты A , B , C соответственно равны

$$A = \frac{g^2}{4\Omega_{00}^2 \left(1 - \frac{g}{\Omega_{00}} \frac{\gamma_{00}^{-}}{\gamma_{00}^{+}} \right)}, \quad B = \frac{g^2}{4\Omega_{00}^2 \left(1 - \frac{g}{\Omega_{00}} \frac{\gamma_{00}^{+}}{\gamma_{00}^{-}} \right)}, \quad C = -(A + B).$$

$$\langle \Psi_3^l | W | \Psi_3^l \rangle = a \exp \left\{ -2kt \frac{g\gamma_{00}^{-}}{\Omega_{00}\gamma_{00}^{+}} \right\} + b \left\{ -2kt \frac{g\gamma_{00}^{+}}{\Omega_{00}\gamma_{00}^{-}} \right\} + ce^{-2kt} + d,$$

здесь коэффициенты a , b , c , d соответственно равны

$$a = \frac{\Omega_{00}\gamma_{00}^{+}}{2g\gamma_{00}^{-}}A, \quad b = \frac{\Omega_{00}\gamma_{00}^{-}}{2g\gamma_{00}^{+}}B, \quad c = C, \quad d = -(a + b + c).$$

В случае нулевой расстройки выражения для среднего числа фотонов и средних населенностей атомных уровней получаем

$$\begin{aligned} \langle N_i(t) \rangle &= e^{-2kt}(\sin^2(\Omega_{00}t) + kt), \\ \langle R_e(t) \rangle &= e^{-2kt} \cos^2(\Omega_{00}t), \\ \langle R_g(t) \rangle &= 1 - e^{-2kt} \cos^2(\Omega_{00}t), \end{aligned}$$

здесь параметр i нумерует соответствующую фотонную моду и принимает значения 1 или 2.

Для ненулевой расстройки выражения для средних значений тех же наблюдаемых величин примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
\langle N_i(t) \rangle &= \left(A + \frac{g\gamma_{00}^-\gamma_{00}^+}{4\Omega_{00}} \right) \exp \left\{ -2kt \frac{g\gamma_{00}^-}{\gamma_{00}^+\Omega_{00}} \right\} + \\
&+ \left(B + \frac{g\gamma_{00}^+\gamma_{00}^-}{4\Omega_{00}} \right) \exp \left\{ -2kt \frac{g\gamma_{00}^+}{\gamma_{00}^-\Omega_{00}} \right\} + \\
&+ \left(C - \frac{g\gamma_{00}^+\gamma_{00}^-}{2\Omega_{00}} \cos[2\Omega_{00}t] \right) \exp\{-2kt\}, \\
\langle R_e(t) \rangle &= \frac{\gamma_{00}^{+4}}{4} \exp \left\{ -2kt \frac{g\gamma_{00}^-}{\gamma_{00}^+\Omega_{00}} \right\} + \frac{\gamma_{00}^{-4}}{4} \exp \left\{ -2kt \frac{g\gamma_{00}^+}{\gamma_{00}^-\Omega_{00}} \right\} + \\
&+ \frac{\gamma_{00}^{+2}\gamma_{00}^{-2}}{2} \cos[2\Omega_{00}t], \\
\langle R_g(t) \rangle &= \left(2A + a + \frac{g^2}{4\Omega_{00}^2} \right) \exp \left\{ -2kt \frac{g\gamma_{00}^-}{\gamma_{00}^+\Omega_{00}} \right\} + \\
&+ \left(2B + b + \frac{g^2}{4\Omega_{00}^2} \right) \exp \left\{ -2kt \frac{g\gamma_{00}^+}{\gamma_{00}^-\Omega_{00}} \right\} + \\
&+ \left(3C - \frac{g^2}{2\Omega_{00}^2} \cos[2\Omega_{00}t] \right) \exp\{-2kt\} + d.
\end{aligned}$$

Для временного поведения наблюдаемых имеют место характерные вакуумные осцилляции Раби с релаксационно затухающими амплитудами колебаний. Эффект ненулевой расстройки при этом проявляется в уменьшении амплитуд вакуумных осцилляций.

3. Случай когерентного начального состояния поля

Если в начальный момент времени поле находится в когерентном состоянии, а атом — в возбужденном, то матрица плотности в терминах "одетых" состояний принимает вид:

$$\begin{aligned}
W(0) &= \frac{p_{n_1}p_{n_2}}{2} \left(\gamma_{n_1n_2}^{+2} |\Psi_{n_1n_2}^+\rangle \langle \Psi_{n_1n_2}^+| + \gamma_{n_1n_2}^{-2} |\Psi_{n_1n_2}^-\rangle \langle \Psi_{n_1n_2}^-| + \right. \\
&+ \left. \gamma_{n_1n_2}^+ \gamma_{n_1n_2}^- |\Psi_{n_1n_2}^+\rangle \langle \Psi_{n_1n_2}^-| + \gamma_{n_1n_2}^- \gamma_{n_1n_2}^+ |\Psi_{n_1n_2}^-\rangle \langle \Psi_{n_1n_2}^+| \right), \quad (3.8)
\end{aligned}$$

где

$$p_{n_i} = \exp(-\bar{n}_i) \frac{\bar{n}_i^{n_i}}{n_i!} \quad (i = 1, 2).$$

Для среднего числа фотонов и атомных населенностей в рассматриваемом случае получаем:

$$\begin{aligned}
\langle N_i(t) \rangle &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \left\{ -\gamma_{n_1 n_2}^+ \gamma_{n_1 n_2}^- \langle \Psi_{n_1 n_2}^+ | W | \Psi_{n_1 n_2}^- \rangle \cos(2\Omega_{n_1 n_2} t) + \right. \\
&+ \left(n_i + \frac{\gamma_{n_1 n_2}^{+2}}{2} \right) \langle \Psi_{n_1 n_2}^- | W | \Psi_{n_1 n_2}^- \rangle + \left(n_i + \frac{\gamma_{n_1 n_2}^{-2}}{2} \right) \langle \Psi_{n_1 n_2}^+ | W | \Psi_{n_1 n_2}^+ \rangle \Big\} + \\
&+ \langle \Psi_i^l | W | \Psi_i^l \rangle, \\
\langle R_e(t) \rangle &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \left\{ \frac{\gamma_{n_1 n_2}^{+2}}{2} \langle \Psi_{n_1 n_2}^+ | W | \Psi_{n_1 n_2}^+ \rangle + \frac{\gamma_{n_1 n_2}^{-2}}{2} \langle \Psi_{n_1 n_2}^- | W | \Psi_{n_1 n_2}^- \rangle + \right. \\
&+ \left. \gamma_{n_1 n_2}^+ \gamma_{n_1 n_2}^- \langle \Psi_{n_1 n_2}^+ | W | \Psi_{n_1 n_2}^- \rangle \cos(2\Omega_{n_1 n_2} t) \right\}, \\
\langle R_g(t) \rangle &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \left\{ \frac{\gamma_{n_1 n_2}^{-2}}{2} \langle \Psi_{n_1 n_2}^+ | W | \Psi_{n_1 n_2}^+ \rangle + \frac{\gamma_{n_1 n_2}^{+2}}{2} \langle \Psi_{n_1 n_2}^- | W | \Psi_{n_1 n_2}^- \rangle - \right. \\
&- \left. \gamma_{n_1 n_2}^+ \gamma_{n_1 n_2}^- \langle \Psi_{n_1 n_2}^+ | W | \Psi_{n_1 n_2}^- \rangle \cos(2\Omega_{n_1 n_2} t) \right\} + \sum_{z=1}^3 \langle \Psi_z^l | W | \Psi_z^l \rangle.
\end{aligned}$$

Результаты численных расчетов для временной эволюции среднего числа фотонов и атомных населенностей представлены на рис. 1 на графиках а–д. Все параметры на графиках представлены в относительных единицах константы связи g .

На рис. 1,а,б представлены графики для временной зависимости среднего числа фотонов в полевой моде и средней населенности основного атомного состояния для различных значений параметра расстройки. С увеличением расстройки уменьшаются частота осцилляций Раби и их амплитуда. С другой стороны, при увеличении расстройки эффект затухания и восстановления осцилляций Раби проявляется более четко.

На рис. 1,с,д продемонстрировано временное поведение среднего числа фотонов и средней населенности возбужденного состояния в зависимости от параметра потерь фотонов. Поведение наблюдаемых для рассматриваемой модели аналогично известному случаю двухфотонной вырожденной модели [27, 28].

4. Корреляционная функция второго порядка для когерентного начального состояния поля

Характер статистики фотонной моды можно исследовать, рассмотрев динамику корреляционной функции второго порядка. Работая с когерентным начальным состоянием поля и выбирая атом начально в возбужденном состоянии, временную зависимость корреляционной функции для i -й фотонной моды можно записать как

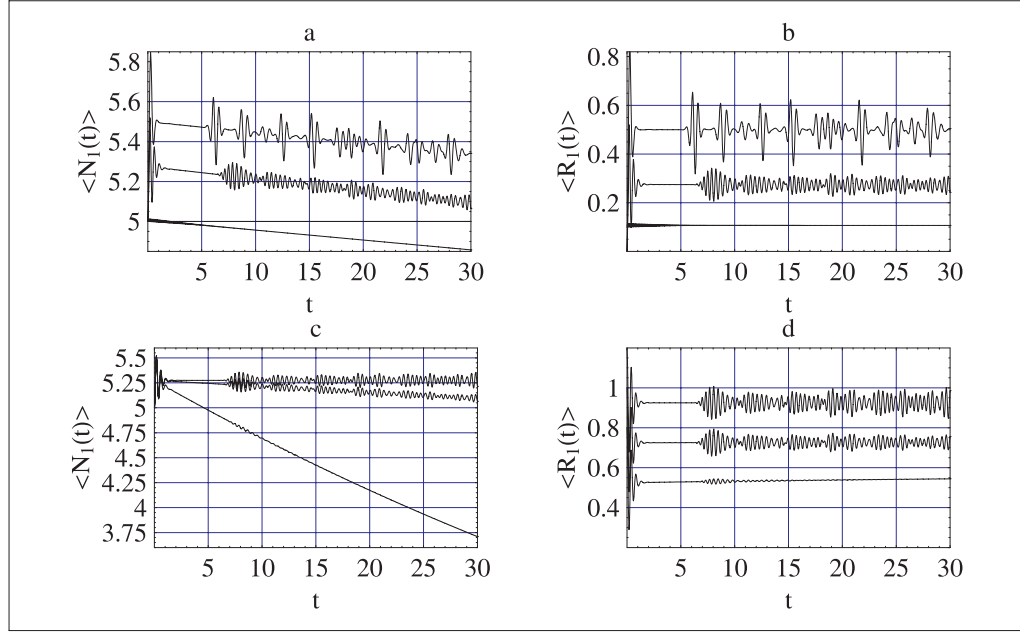


Рис. 1. Среднее число фотонов в первой моде (a,c) и средняя населенность основного состояния (b,d) для значений параметров $\langle N_1 \rangle = \langle N_2 \rangle = 5$, $g = 1$ и (a, b) $k = 0.001$ и (сверху вниз): 1 — $\delta = 0$; 2 — $\delta = 10$; 3 — $\delta = 100$. На графике (b) нижняя кривая соответствует значению $\langle R_g(t) \rangle + 0.1$, (c, d) $\delta = 10$, и (сверху вниз): 1 — $k = 0$, 2 — $k = 0.001$, 3 — $k = 0.01$. На графике (d) верхняя кривая соответствует значению $\langle R_e(t) \rangle + 0.2$, нижняя кривая соответствует $\langle R_e(t) \rangle - 0.2$

$$\begin{aligned}
 G_i^{(2)}(t) = & \frac{1}{\langle N_i(t) \rangle^2} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \left\{ \left(n_1^2 - n_1 \frac{\Delta}{2\Omega_{n_1 n_2}} \right) \langle \Psi_{n_1 n_2}^+ | W | \Psi_{n_1 n_2}^+ \rangle + \right. \\
 & + \left(n_1^2 + n_1 \frac{\Delta}{2\Omega_{n_1 n_2}} \right) \langle \Psi_{n_1 n_2}^+ | W | \Psi_{n_1 n_2}^+ \rangle - \\
 & \left. - 2n_i \gamma_{n_1 n_2}^+ \gamma_{n_1 n_2}^- \langle \Psi_{n_1 n_2}^+ | W | \Psi_{n_1 n_2}^- \rangle \cos(2\Omega_{n_1 n_2} t) \right\} - 1.
 \end{aligned}$$

Результаты компьютерного моделирования динамики корреляционной функции второго порядка представлены на рис. 2, a, b.

Рис. 2, a иллюстрирует временное поведение корреляционной функции для различных значений параметра расстройки. В отсутствие расстройки динамика корреляционной функции представлена характерными затуханиями и восстановлениями осцилляций Раби. При этом статистика поля является субпуассоновской. При отличных от нуля расстройках фотонная подсистема переходит от субпуассоновского типа статистики (на малых временах) к суперпуассоновскому. При больших расстройках амплитуды осцилляций Раби становятся очень малыми, и статистика поля близка к пуассоновской.

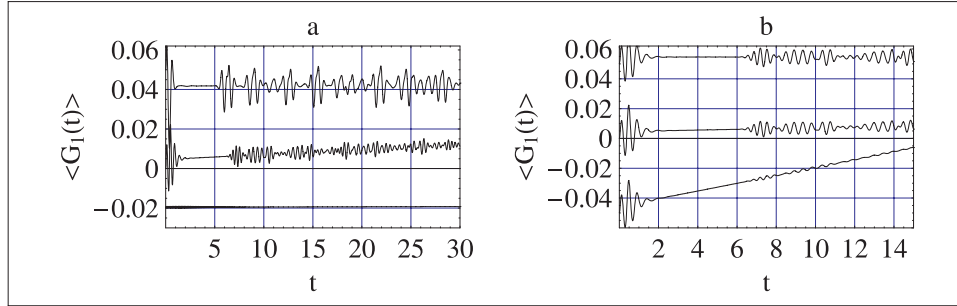


Рис. 2. Корреляционная функция второго порядка для $\langle N_1 \rangle = \langle N_2 \rangle = 5$, $g = 1$ и (а) $k = 0.001$ (сверху вниз): 1 — $\delta = 0$; 2 — $\delta = 10$; 3 — $\delta = 100$. Верхняя кривая соответствует значению $G_1^{(2)}(t) + 0.05$, нижняя — $G_1^{(2)}(t) - 0.02$, (б) $\delta = 10$ и (сверху вниз): 1 — $k = 0$; 2 — $k = 0.001$; 3 — $k = 0.01$. Верхняя кривая соответствует значению $G_1^{(2)}(t) + 0.05$, нижняя — $G_1^{(2)}(t) - 0.05$

На рис. 2,б продемонстрирована динамика корреляционной функции в зависимости от значения параметра скорости потерь фотонов k . В отсутствие потерь корреляционная функция осциллирует вблизи нулевого значения, при этом статистика поля все время изменяется от субпуассоновской до суперпуассоновской. При внесении расстройки в систему наблюдается уменьшение амплитуды осцилляций Раби корреляционной функции. При этом статистика поля является субпуассоновской только на малых временах, все остальное время фотонная мода демонстрирует суперпуассоновскую статистику. При увеличении параметра расстройки происходит дальнейшее уменьшение амплитуд осцилляций и фотонная мода демонстрирует более четкую суперпуассоновскую статистику.

5. Сжатие фотонной моды для когерентного начального состояния поля

Одним из наиболее важных свойств света, обнаруженных в последнее время, является сжатие [31]. Обычно в качестве количественной меры степени сжатия фотонных мод используют параметр S , определяемый следующим образом:

$$S_i = \langle : (a_i + a_i^\dagger) :^2 \rangle - (\langle a_i + a_i^\dagger \rangle)^2,$$

где i — номер соответствующей фотонной моды, $: (\dots) :$ — оператор нормального упорядочения.

Учитывая коммутационные соотношения для операторов рождения и уничтожения фотонов, а также тот факт, что $\langle N_i(t) \rangle = \langle a_i^\dagger a_i \rangle$, параметр сжатия S можно представить в виде

$$S_i = \langle a_i^2 \rangle + \langle a_i^{\dagger 2} \rangle + 2\langle N_i \rangle - (\langle a_i + a_i^\dagger \rangle)^2 + 1.$$

Случай $S < 1$ соответствует эффекту сжатия фотонной моды.

На рис. 3,а представлена динамика параметра сжатия S в зависимости от выбора значения параметра расстройки δ . При увеличении расстройки наблюдается уменьшение амплитуды и периода осцилляций Раби, при этом на одних и тех же малых временах для больших расстроек эффект сжатия менее заметен.

Рис. 3,б иллюстрирует временную зависимость параметра сжатия от значения скорости потерь фотонов из резонатора. Следует отметить, что даже весьма малое уменьшение добротности резонатора (увеличение k) приводит к исчезновению эффекта сжатия в системе.

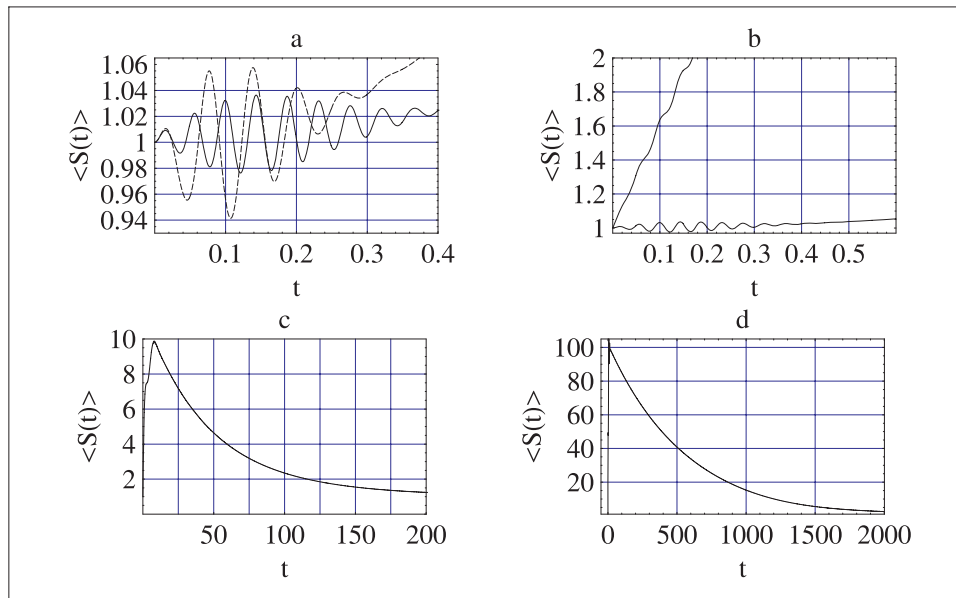


Рис. 3. Сжатие первой фотонной моды для $\langle N_1 \rangle = \langle N_2 \rangle = 50$, $g = 1$ и (а) $k = 0$ и $\delta = 10$ (штрихованная кривая); $\delta = 100$ (сплошная кривая), (б) $\delta = 0$ и (сверху вниз): 1 — $k = 0.0001$; 2 — $k = 0$, (с) — $k = 0$ и $\delta = 10$, (д) — $k = 0.001$ и $\delta = 10$

Параметр сжатия на больших временах для любого выбора значений параметров системы демонстрирует аналогичную динамику (рис. 3,с–д). На больших временах релаксационный процесс доминирует над прочими, и значение параметра сжатия стремится к 1, причем уменьшение добротности приводит к увеличению максимального значения S и росту времени его релаксации.

6. Случай сжатого начального состояния поля

Для начального сжатого состояния поля матрица плотности будет представлена уравнением (4.9), где коэффициенты p_{n_i} имеют вид:

$$p_{n_i} = \frac{1}{2^{n_i} n_i! |\mu_i|} \frac{|\nu_i|^{n_i}}{|\mu_i|^{n_i}} H_{n_i}(z_i / \sqrt{2\mu_i \nu_i}) H_{n_i}(z_i^* / \sqrt{2\mu_i \nu_i}) \times \\ \times \exp \left[-|z_i|^2 + \frac{\nu_i}{2\mu_i} (z_i^2 + z_i^{*2}) \right],$$

здесь $H_{n_i}(x)$ — полиномы Эрмита и

$$\mu_i = \cosh(r_i), \nu_i = \sinh(r_i), z_i = \mu_i \alpha_i + \nu_i \alpha_i^*, \bar{n}_i = |\alpha_i|^2 + \nu_i^2.$$

В данных выражениях индекс i нумерует фотонную моду, а величина r_i является параметром сжатия соответствующей фотонной моды.

Результаты исследования динамики наблюдаемых величин для начального сжатого состояния поля представлены на рис. 4–5. Рис. 4,a,b демонстрирует временное поведение среднего числа фотонов во второй моде и средней населенности возбужденного состояния атома для различных значений параметра расстройки. В отсутствие расстройки данные наблюдаемые демонстрируют характерные затухания и восстановления осцилляций Раби. При увеличении расстройки уменьшаются период и амплитуда осцилляций, что приводит к исчезновению эффекта затухания и восстановления осцилляций. Населенность возбужденного состояния при увеличении расстройки осциллирует вблизи большего квазистационарного уровня. Следует отметить, что временное поведение данных наблюдаемых для разных значений параметра утечки фотонов аналогично случаю когерентного начального состояния поля.

На рис. 5,a–d представлено временное поведение корреляционной функции второго порядка для первой и второй фотонных мод и для различного выбора значений параметров системы. Рис. 1,a иллюстрирует динамику корреляционной функции для различных значений параметра расстройки. В отсутствие расстройки корреляционная функция для данного выбора значений параметров системы осциллирует вблизи отрицательного значения, что соответствует субпуассоновской статистике поля. При внесении небольших расстроек наблюдаются уменьшение амплитуды осцилляций Раби и увеличение их частоты. При этом на больших временах статистика поля стремится от суб- к суперпуассоновской.

На рис. 5,b продемонстрирована зависимость корреляционной функции от значения параметра потерь фотонов k . В отсутствие потерь наблюдаются осцилляции Раби вблизи отрицательного значения, что соответствует субпуассоновской статистике поля. С увеличением параметра потерь фотонов наблюдаются уменьшение амплитуды и периода осцилляций Раби, а статистика поля стремится к суперпуассоновской. При дальнейшем увеличении потерь фотонов из резонатора данный эффект усиливается.

На рис. 5,c,d представлена динамика корреляционной функции для первой и второй фотонных мод для различных значений параметров сжатия. Анализ графиков показывает, что независимо от выбора параметров модели с увеличением параметра сжатия в любой из мод суперпуассоновская

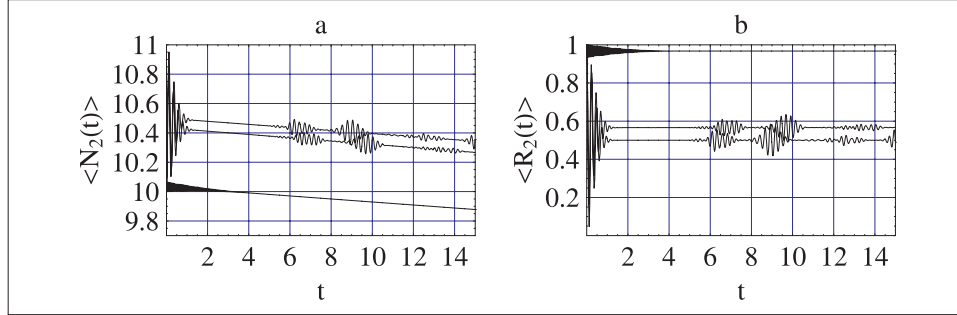


Рис. 4. Среднее число фотонов во второй моде (а) и средняя населенность возбужденного состояния (б) для начального сжатого состояния поля и значений параметров $\langle N_1 \rangle = 15$, $\langle N_2 \rangle = 10$, $k = 0.001$, $r_1 = 0.8$, $r_2 = 1$ и (сверху вниз): 1 — $\delta = 0$; 2 — $\delta = 10$; 3 — $\delta = 100$

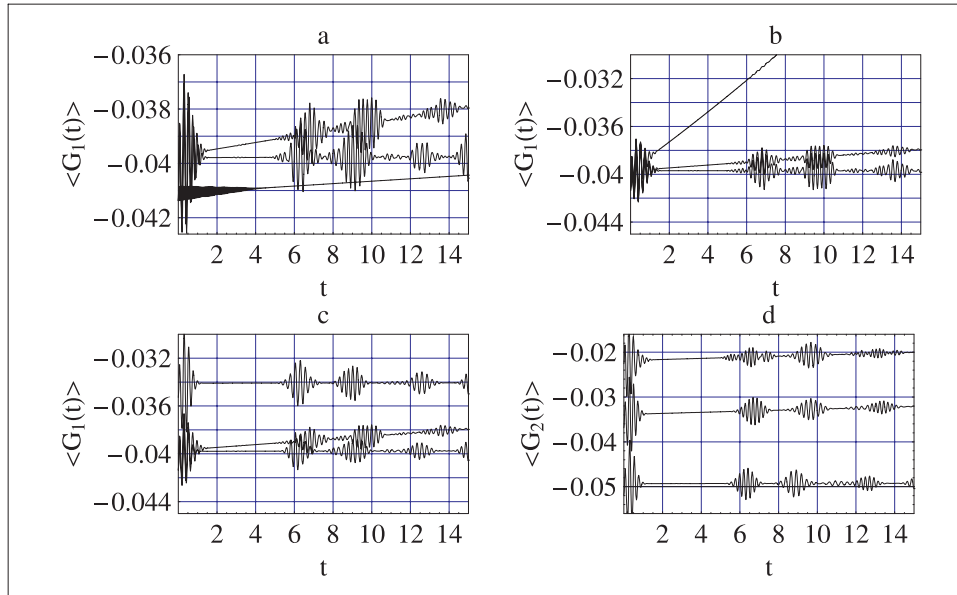


Рис. 5. Корреляционная функция для первой (а–с) и второй фотонной моды (д) для $\langle N_1 \rangle = 15$, $\langle N_2 \rangle = 10$ и (а) — $k = 0.001$ и (сверху вниз): 1 — $\delta = 10$; 2 — $\delta = 0$; 3 — $\delta = 100$, (б) — $\delta = 10$ и (сверху вниз): 1 — $k = 0$, 2 — $k = 0.001$, 3 — $k = 0.01$, (с) $\delta = 10$, $k = 0.001$ и (сверху вниз): 1 — $r_1 = 0.4$, $r_2 = 0.8$; 2 — $r_1 = 0.8$, $r_2 = 1$; 3 — $r_1 = 0.8$, $r_2 = 0.4$, (д) — $\delta = 10$, $k = 0.001$ и (сверху вниз): 1 — $r_1 = 0.8$, $r_2 = 1$; 2 — $r_1 = 0.8$, $r_2 = 0.4$; 3 — $r_1 = 0.4$, $r_2 = 0.8$

статистика соответствующей моды на больших временах становится более ярко выраженной.

Таким образом, в настоящей работе на основе управляющего уравнения проведено исследование невырожденной модели двухуровневого атома в неидеальном резонаторе. При этом найдены временное поведение среднего числа фотонов, средних атомных населенностей, статистики и параметра сжатия фотонных мод для случая вакуумного, когерентного и сжатого начального состояния поля. Показано, что в данной модели возможно наблюдать субпуассоновскую статистику и сжатие поля. Показано, что учет неидеальности резонатора особенно важен при описании статистики и сжатия фотонных мод. В частности, в неидеальном резонаторе для начального когерентного состояния поля сжатие отсутствует. Исследование атомного сжатия и поведения вектора состояния и энтропии системы для различных начальных состояний атома и поля будет являться предметом нашей следующей работы.

Литература

- [1] Shore B.W., Knight P.L. Topic review on the Jaynes—Cummings model // J. Mod. Opt. 1993. V. 40. P. 1195.
- [2] Вальтер Г. Одноатомный мазер и другие эксперименты по квантовой электродинамике резонатора // УФН. 1996. Т. 166. No. 4. С. 777–794.
- [3] Brune M., Raimond J.M., Goy P. et al. Realization of a two-photon maser oscillator // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. P. 1899.
- [4] Gerry C.C. Two-photon Jaynes—Cummings model interacting with squeezed vacuum // Phy. Rev. 1988. V. A37. No. 7. P. 2683–2686.
- [5] Li Xiao-shen, Lin D.P., George T.F. Squeezing of atomic variables in the one-photon and two-photon Jaynes—Cummings model // Phy. Rev. 1989. V. A40. No. 5. P. 2504–2507.
- [6] Abdel-Hafez A.M., Obada A.-S.F. Amplitude-squared squeezing in the multiphoton Jaynes—Cummings model: Effect of phases // Phy. Rev. 1991. V. A44. No. 4. P. 6017–6022.
- [7] Mubeen A. Mir, Razmi M.S.K. Amplitude-squared squeezing in the multiphoton Jaynes—Cummings model // Phy. Rev. 1991. V. A44. No. 9. P. 6071–6076.
- [8] Bartzis V., Nayak N. Two-photon Jaynes—Cummings model // J. Opt. Soc. Am. B. 1991. V. 8. No. 8. P. 1779–1786.
- [9] Joshi A., Puri R.R. Dynamical evolution of the two-photon Jaynes—Cummings model in a Kerr-like medium // Phy. Rev. 1992. V. A45. No. 7. P. 5056–5060.
- [10] Mubeen A. Mir. Amplitude-squared squeezing in the multiphoton Jaynes—Cummings model: Effects of the atomic coherent states and detuning // Phys. Rev. 1993. V. A47. No. 5. P. 4384–4391.

- [11] Tahira Nasreen, Zaheer K. Evolution of wave functions in the two-photon Jaynes—Cummings model: The generation of superpositions of coherent states // *Phys. Rev.* 1994. V. A49. No. 1. P. 616–619.
- [12] Ling-sheng He, Xun-li Feng. Two-photon spectrum of a two-level atom in an ideal cavity // *Phys. Rev.* 1994. V. A49. No. 5. P. 4009–4015.
- [13] Mao-Fa Fang, Hui-En Liu. Properties of entropy and phase of the field in the two-photon Jaynes—Cummings model with an added Kerr medium // *Phys. Lett.* 1995. V. A200. P. 250–256.
- [14] Zhou Ling, Song He-shan, Yao Li. The two-photon degenerate Jaynes-Cummings model with and without rotating-wave approximation // *Chinese Physics.* 2001. V. 10. No. 5. P. 413–417.
- [15] Ashraf M.M., Razmi M.S.K. Atomic-dipole squeezing and emission spectra of the nondegenerate two-photon Jaynes—Cummings model // *Phys. Rev.* 1992. V. A45. No. 11. P. 8121–8128.
- [16] Abdel-Hafez A.M. Degenerate and nondegenerate two-mode normal squeezing in a two-level atom and two-mode systems shraf M.M. // *Phys. Rev.* 1992. V. A45. No. 9. P. 6610–6614.
- [17] Ashraf M.M. Cavity field spectra of the nondegenerate two-photon Jaynes—Cummings model // *Phys. Rev.* 1994. V. A50. No. 6. P. 5116–5121.
- [18] Mahmood S., Ashraf M.M. Squeezing of an effective dipole in a non-degenerate two-photon Jaynes—Cummings model with Stark shift // *Optics Communications.* 1996. V. 33. P. 355–358.
- [19] Iwasawa H., Matsuo K. Exact solution of Heisenberg operators for two-photon non-degenerate Jaynes—Cummings model // *Optics Commun.* 1995. V. 117. P. 550–559.
- [20] Iwasawa H., Matsuo K. Dynamical behaviors of two-photon non-degenerate Jaynes—Cummings model by Heisenberg picture // *Prog. Crystal Growth and Characterization Communications.* 1996. V. 132. P. 457–463.
- [21] Gao-xiang Li, Jin-sheng Peng. Generation of pure states in a nondegenerate two-photon micromaser // *Z. Phys.* 1996. V. B100. No. 11. P. 91–93.
- [22] Obada A.-S.F., Abdel-Hafez A.M., Hessien H.A. Two-mode normal squeezing of a nondegenerate bimodal multiquanta Jaynes—Cummings model in the presence of Stark Shifts // *Intern. J. Theor. Phys.* 2000. V. 39. No. 6. P. 1499–1513.
- [23] Abdel-Aty M., Abdel-Khalek S., Obada A.-S.F. Entropy evolution of the bimodal field interacting with an effective two-level atom via the Raman transition in Kerr medium // *Chaos, Solitons and fractals.* 2001. V. 12. P. 2015–2022.
- [24] Rui Hua Xie, Smith V.H. Generation of higher-order atomic dipole squeezing in a high-Q micromaser cavity. (IV) Discussion of the nondegenerate two-photon Jaynes—Cummings model The generation of superpositions of coherent states // *Physica A.* 2002. V. A307. P. 207–220.

- [25] Hessian H.A., Ritsch. Influence of phase damping on nonclassical properties of the two-mode Jaynes—Cummings model // J. Phys. B.: At. Mol. Opt. Phys. 2002. V. 35. P. 4619–4635.
- [26] Abdalla M.S., Abdel-Aty M., Obada A.-S.F. Entropy and entanglement of time dependent two-mode Jaynes—Cummings model // Physica A. 2003. V. A326. P. 203–219.
- [27] Puri R.R., Agarwal G.S. Coherent two-photon transitions in Rydberg atoms in the cavity with finite Q // Phys. Rev. A. V. 39. No. 10. 1988. P. 3879–3883.
- [28] Башкиров Е.К., Русакова М.С. Временная эволюция двухуровневого атома с многофотонными переходами в неидеальном резонаторе с расстройкой // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия 2005. №2(36). С. 156–167.
- [29] Zhou L., Song H.S., Luo Y.X. et al. Dissipative dynamics of two-photon Jaynes—Cummings model with the Stark shift in the dispersive approximation // Phys. Lett. 2001. V. A284. P. 156–161.
- [30] Zhou Ling, Song He-Shan, Li Chong et al. The effect of degenerate atomic levels on the field state dissipation in two-photon Jaynes—Cummings model // Chinese Physics. 2003. V. 12. No. 1. P. 45–50.
- [31] Scully M.O., Zubairy M.S. Quantum Optics // Скалли М.О., Зубайри М.С. Квантовая оптика / Пер. с англ.; Под ред. В.В. Самарцева. М.: Физматлит, 2003. 690 с.

Поступила в редакцию 28/IV/2005;
в окончательном варианте — 28/IV/2005.

DISSIPATIVE DYNAMICS OF NONDEGENERATE TWO-PHOTON JAYNES—CUMMINGS MODEL IN A FINITE-Q CAVITY⁴

© 2005 E.K. Bashkirov⁵ M.S. Rusakova⁶

In this work the temporal behavior of a two-level nondegenerate atom in a finite-Q cavity is considered. The analytic expressions for mean photon number and atomic populations are obtained on the basis of master equation solution for initial vacuum field state. The observable dynamics is investigated for coherent initial field state and squeezed initial field state for various system parameters values. The field mode statistics is considered.

Paper received 28/IV/2005.

Paper accepted 28/IV/2005.

⁴Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. V.A. Saleev.

⁵Bashkirov Eugeney Konstantinovich (bash@ssu.samara.ru), Dept. of General and Theoretical Physics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.

⁶Rusakova Margarita Sergeevna (rusakova__@mail.ru), Dept. of Informatics and Computational Mathematics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.