МЕХАНИКА

К 75-ЛЕТИЮ Д.Д. ИВЛЕВА

© 2005 Ю.Н. Радаев[1]

6 сентября 2005 года исполняется 75 лет Дюису Даниловичу Ивлеву — доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному деятелю науки Российской Федерации. С его именем связаны становление и развитие научной школы механики идеально пластических тел и конструкций в Воронеже, Самаре, Владивостоке, Чебоксарах, подготовка кадров высшей квалификации в этой области механики деформируемого твердого тела. Д.Д. Ивлеву принадлежит свыше двухсот опубликованных научных работ, в том числе шесть монографий. Его вклад в математическую теорию пластичности по праву можно назвать выдающимся. В рамках возглавляемой им научной школы работает свыше 20 докторов и около 100 кандидатов наук.

Д.Д. Ивлев родился 6 сентября 1930 г. в г. Чебоксары Чувашской Республики. После окончания средней школы в 1948 г. он поступает на механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, который заканчивает в 1953 г. В 1956 г., после окончания аспирантуры при Институте механики МГУ, он успешно защитил диссертацию "Приближенное решение упруго-пластических задач методом малого параметра" в совете при МГУ (оппонентами по этой работе выступили В.В. Соколовский и Г.С. Шапиро, а председательствовал на защите А.Ю. Ишлинский) и получил ученую степень кандидата физико-математических наук. С февраля 1957 г. по октябрь 1958 г. он работает в должности младшего научного сотрудника Института механики АН СССР. В 1959 г., после защиты диссертационной работы "Пространственная задача теории идеальной пластичности" (также в совете при МГУ) Д.Д. Ивлев получает степень доктора физико-математических наук. Оппонентами по докторской диссертационной работе выступили Л.А. Галин, Л.М. Качанов и Г.С. Шапиро.

В октябре 1959 г. Д.Д. Ивлев 29-летним доктором физико-математических наук, будучи уже известным ученым в области математической теории пластичности, по приглашению ректора Воронежского университета Б.И. Михантьева приезжает в г. Воронеж. Наряду с А.Ю. Ишлинским Д.Д. Ивлев уже принадлежит к числу основоположников нового направ-

[1]Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

ления в построении математической теории пластичности — теории течения. В декабре 1959 г. Д.Д. Ивлев возглавил созданную им в ВГУ кафедру теории упругости и пластичности. Талантливый ученый, прекрасный организатор и педагог Дюис Данилович сумел в короткий срок активизировать научную и методическую работу. Лекции и научные семинары проф. Д.Д. Ивлева оставляли незабываемое впечатление и поражали способностью глубоко проникать в суть обсуждаемых вопросов. Созданная проф. Д.Д. Ивлевым воронежская школа механики деформируемого твердого тела быстро получила всесоюзное признание. Проводимые исследования были связаны с фундаментальными и прикладными проблемами механики сплошных сред. Работы Д.Д. Ивлева и его учеников всегда вызывали интерес у ученых нашей страны и зарубежья, их существенное влияние на формирование математической теории пластичности было и остается общепризнанным. Под руководством профессора Д.Д. Ивлева ежегодно проводились научные конференции и школы, в работе которых принимали участие ученые из Москвы, Ленинграда, Киева, Новосибирска, Ростова-на-Дону, Казани, Перми, Харькова, Краснодара, Куйбышева, Риги и других городов СССР.

В Воронежском государственном университете на математико-механическом факультете Д.Д. Ивлев работал вместе с профессорами М.А. Красносельским, С.Г. Крейном, В.И. Соболевым. Творческое взаимодействие механиков и математиков Воронежского университета было заложено именно в те годы.

Параллельно с заведованием кафедрой теории упругости и пластичности в ВГУ профессор Д.Д. Ивлев в течение ряда лет заведовал кафедрой сопротивления материалов в Воронежском политехническом институте, куда его пригласил ректор В.С. Постников. В эти же годы Д.Д. Ивлев по просьбе ректора Л.Н. Талова читает лекции в Воронежском педагогическом институте. Следует отметить, что уже в годы работы в Воронежском университете началось сотрудничество Д.Д. Ивлева с одним из своих аспирантов — Геннадием Ивановичем Быковцевым, которое вскоре дало превосходные плоды — научные результаты, имеющие фундаментальное значение для механики деформируемого твердого тела. Одним из талантливых учеников Д.Д. Ивлева той поры также был В.В. Дудукаленко. Г.И. Быковцев стал первым деканом нового факультета — прикладной математики и механики, возглавил созданную им кафедру технической кибернетики и теории автоматического регулирования. Через несколько лет Геннадий Иванович возглавил кафедру механики деформируемого твердого тела в Куйбышевском (Самарском) государственном университете.

В 1966 г. Д.Д. Ивлев возвращается в Москву, где сначала работает профессором МВТУ им. Н.Э. Баумана (1966–1970 гг.) и заведует кафедрой высшей математики, а затем (1971–1982 гг.) — заведующим кафедрой высшей математики во Всесоюзном заочном политехническом институте (сейчас Московский государственный открытый университет). Вместе со свои-

ми учениками профессорами Г.И. Быковцевым и И.А. Бережным он активно участвовал в создании научной школы механики деформируемого твердого тела в г. Куйбышеве.

В 1982 г. Д.Д. Ивлев приезжает на родину в г. Чебоксары, где работает заведующим кафедрой математического анализа, затем — заведующим кафедрой механики деформируемого твердого тела в Чувашском государственном университете. В 1985–1993 гг. он является деканом физико-математического факультета. В 1993 г. Д.Д. Ивлев переходит на работу в в Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, где в настоящее время заведует кафедрой математического анализа.

Работы Д.Д. Ивлева посвящены механике деформируемого тела, в основном математической теории пластичности[2]. Ряд результатов Д.Д. Ивлева имеет фундаментальный характер для всей механики деформируемого твердого тела.

Пластические свойства проявляют практически все прочные металлы в условиях нормальной температуры (сталь, медь, алюминий)[3]. Возникновение теории пластичности принято относить ко времени появления работы французского инженера Треска (H. Tresca, 1864 г.), который, опираясь на результаты собственных экспериментов, сформулировал критерий текучести для металлов. Треска установил, что текучесть металлов наступает тогда, когда максимальное касательное напряжение достигает некоторого критического значения.

Сен-Венану (B. Saint-Venant, 1870 г.) первому[4] удалось сформулировать уравнения, удовлетворительно описывающие законы пластического течения металлов на языке механики сплошных сред. Этот успех во многом был обязан экспериментальным исследованиям Треска. Ключевым положением теории пластичности Сен-Венана выступала гипотеза о пропорциональности девиатора напряжений и скорости пластических деформаций. Сен-Венан и затем Леви (M. Levy, 1871 г.) указали основные соотношения плоской и пространственной задачи теории идеальной пластичности[5].

---

[2]Среди них шесть монографий: “Теория идеальной пластичности” (1966); “Теория упрочняющегося пластического тела” (в соавторстве с Г.И. Быковцевым, 1971); “Метод возмущений в теории упругопластического тела” (в соавторстве с Л.В. Ершовым, 1978); ”Теория пластичности” (в соавторстве с Г.И. Быковцевым, 1998); “Математическая теория пластичности” (в соавторстве с А.Ю. Ишлинским, 2001); фундаментальная двухтомная монография “Механика пластических сред” (2001, 2002).

[3]Пластические свойства различных материалов были известны очень давно и изучались еще Кулоном (C.A. Coulomb, 1776 г.)

[4]Saint-Venant B. Memóire sur l’etablissement des équations differéntielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles an delá des limites oú l’élasticité pourrait les ramener á leur premier état // Liouville J. Math. 1871. V. 16. P. 308–316, 373–382.

[5]Переводы на русский язык трудов основоположников математической теории пластичности помещены в сборник: Теория пластичности: Сб. статей / Ред. акад. Ю.Н. Работнов. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1948. 452 с.

Леви при формулировке уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности принял в качестве условия текучести уравнение грани призмы Треска и присоединил в качестве определяющего уравнение, выражающее пропорциональность девиатора тензора напряжений и тензора скорости деформации. Теория Леви не нашла применения и представляет ныне лишь исторический интерес.

Соотношения Сен-Венана для плоской пластической деформации — статически определимая система уравнений гиперболического типа, что и позволило позднее развить теорию полей скольжения, связываемую обычно с именами Генки (H. Hencky, 1923 г.) и Гейрингер (H. Geiringer, 1930 г.). Математический аппарат, соответствующий соотношениями Сен-Венана для плоской задачи, оказался, таким образом, вполне адекватным экспериментальным и теоретическим представлениям о течении идеально пластического материала.

Основным объектом математического исследования в теории пластичности являются нелинейные гиперболические системы дифференциальных уравнений в частных производных и краевые задачи для них, сформулированные для областей с неизвестными границами. Считается, что первые работы по математической теории пластичности в нашей стране появились в 1936 г. и они обычно связываются с именами А.А. Ильюшина и С.А. Христиановича[6]. Справедливости ради следует отметить, что известны две более ранних работы С.Л. Соболева и С.Г. Михлина[7]. В послевоенные годы только в изданиях Академии наук было опубликовано свыше двухсот работ, обзор которых дан в статье: Вакуленко А.А., Качанов Л.М. Теория пластичности // Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1972. С. 79–118.

Теория идеальной пластичности, преодолевая трудности начального периода развития, относящегося к 70-м годам XIX в., в 50-е годы XX в. сформировалась как важнейшее самостоятельное направление механики деформируемого твердого тела.

Сборник состоит из 28 статей, принадлежащих перу Сен-Венана, Леви, Мизеса, Прандтля, Генки, Рейсса, Прагера. Эти работы отражают процесс становления и развития математической теории пластичности и дают возможность в подлиннике ознакомиться с ее основными концепциями, методами и результатами, оригинальность и своеобразие которых уже к 1948 г. позволили редактору сборника утверждать: “Эта теория, которую называют теорией пластичности (в узком смысле слова), не может считаться окончательно установленной; однако исследования последних лет выяснили с несомненностью некоторые основные законы, позволяющие считать многие результаты совершенно достоверными”.

[6]См.: Христианович С.А. Плоская задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре // Мат. сб. Новая серия. 1936. Т. 1. Вып. 4. С. 511–534.

[7]См.: Sobolev S. The problem of propagation of plastical state // Тр. Сейсмологического ин-та АН СССР. Л., 1935. №49. С. 28–39; Михлин С.Г. Основные уравнения математической теории пластичности. Л.: Изд-во АН СССР, 1934. 71 с.

Распространение математического аппарата, описывающего плоское течение идеального жесткопластического материала на общий трехмерный случай, явилось предметом целого ряда исследований, относящихся к 40–50-м годам XX столетия. К этому времени уже было известно, что закон течения Мизеса (R. von Mises, 1913 г.), выражающий условие пропорциональности компонент девиаторов напряжений и скоростей пластической деформации, в общем случае приводит к статически неопределимой системе уравнений, обосновать гиперболичность которой не удается, и что уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности являются статически определимыми и гиперболическими при условии полной пластичности Хаара—Кармана (A. Haar, Th. von Karman). (В 1909 г. Хаар и Карман выдвинули условие полной пластичности, которое, по существу, устанавливает соответствие напряженного состояния ребру призмы Треска[8]. В 1923 г. Генки предложил использовать условие полной пластичности Хаара—Кармана в случае осесимметричного напряженного состояния, что привело его к статически определимой системе уравнений равновесия, которая, как он установил, оказывается гиперболической). Существование действительных характеристических поверхностей является большим математическим преимуществом. Если еще учесть, что характеристические поверхности суть поверхности скольжения, то с физической точки зрения трудно объяснить отсутствие действительных характеристических поверхностей в случае уравнений пространственной задачи при использовании критерия текучести Мизеса. Поверхности и линии скольжения не являются только математическим понятием. Они существуют в действительности, и их можно выявить травлением отполированной поверхности или разреза деформированного металла. Линии скольжения играют чрезвычайно важную роль как в теоретических, так и в прикладных исследованиях напряженного состояния пластически деформированного тела. Геометрия линий скольжения во многих случаях вполне определяет напряженное состояние. На этот факт, по-видимому, впервые отчетливо указал Д.К. Чернов[9].

Тем не менее экспериментальные исследования показывают, что условие пластичности Мизеса значительно лучше согласуется с опытными данными, чем условие пластичности Треска. Сомневаться в достоверности данных многочисленных экспериментов не приходится, тем более, что они указывают на систематическое отклонение поведения металлов в состоянии текуче-

[8]Сформулируем ту же самую мысль, но в более отчетливой форме: состояние полной пластичности описывается в рамках условия пластичности Треска и соответствует ребру призмы Треска.

[9]Дмитрий Константинович Чернов (1839–1921 гг.) — великий русский инженер и ученый, основатель металлографии, разработавший учение о кристаллах и кристаллографии, создатель научных основ обработки металлов давлением. Как ученый Д.К. Чернов оставался вне поля зрения официальной русской науки, даже когда его заслуги в области металлургии и металловедения были признаны всем миром. Его биография и список научных трудов опубликованы в книге: Гумилевский Л.И. Чернов / Научн. ред. проф. И.Я. Конфедератов. М.: Молодая гвардия, 1975. 208 с.

сти от условия Треска. Однако можно предположить, что лучшее соответствие условия Мизеса опытным данным объясняется влиянием различных посторонних факторов, таких как упрочнение, деформационная анизотропия, поврежденность, элиминировать которые при проведении экспериментов не удается. Известно также, что чем ярче у материала на диаграмме одноосного растяжения выражена площадка текучести (т.е. чем ближе его поведение к идеально пластическому), тем лучше данные испытаний согласуются с критерием пластичности Треска. Таким образом, критерий текучести Треска, по-видимому, действительно лучше, чем все остальные мыслимые критерии, выражает сущность идеальной пластичности. В пользу этого вывода, т.е. большего соответствия условия Треска физике пластической деформации, высказывались многие ученые.

В 1944 г. А.Ю. Ишлинский исследовал осесимметричную задачу теории пластичности, предполагая выполнение условия полной пластичности, доказав статическую определимость и гиперболичность основных уравнений.

Соотношения пространственной задачи теории пластичности, когда аналогично условию полной пластичности имеется два соотношения между главными напряжениями, были предложены и проанализированы А.Ю. Ишлинским (1946 г.), который также использовал обобщенный закон пластического течения, не предполагающий столь жесткие ограничения на скорости пластических деформаций, устанавливаемые традиционным требованием пропорциональности тензора скорости пластических деформаций и девиатора тензора напряжений. Результаты А.Ю. Ишлинского предвосхитили более поздние исследования Д.Д. Ивлева (1959 г.), в которых было показано фундаментальное значение условия полной пластичности Хаара—Кармана для всей теории пластичности и блестяще развит соответствующий вариант теории пластичности: сингулярное условие текучести (в частности, ребро призмы Треска) и обобщенный ассоциированный закон пластического течения. Было установлено, что при условии полной пластичности (т.е. когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска) уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности являются статически определимыми и принадлежат к гиперболическому типу. Характеристические направления (нормали к характеристическим поверхностям) уравнений статики при этом образуют конус, касающийся площадок максимальных касательных напряжений, построенных в вершине конуса. Характеристическими будут также направления, ортогональные главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему (наименьшему) главному напряжению. Кинематические уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности в случае, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска, также гиперболичны и имеют точно такие же характеристические направления, как и статические уравнения.

Было доказано, что именно состояние полной пластичности и только оно позволяет сформулировать общую теорию идеальной пластичности с единым математическим аппаратом статически определимых уравнений ги-

перболического типа, соответствующим сдвиговой природе идеально пластического деформирования. Эти результаты позднее были распространены на случай анизотропного и сжимаемого идеально пластического материала.

В дальнейшем Д.Д. Ивлевым была исследована пространственная задача при произвольном кусочно-линейном условии текучести и в результате показано, что как в пространственном, так и в осесимметричном случае на ребре кусочно-линейного условия текучести уравнения математической теории пластичности являются гиперболическими и имеют характеристические элементы, совпадающие с площадками максимальных касательных напряжений.

Д.Д. Ивлевым исследованы разрывные решения пространственного состояния идеально пластических тел, даны решения уравнений теории идеальной пластичности, определяющих предельное состояние идеально пластического материала, сжатого шероховатыми плитами.

Значительное внимание в работах Д.Д. Ивлева было посвящено вопросам двойственности: альтернативным вариантам построения теории пластичности, исходя либо из определения функции нагружения и ассоциированного закона пластического течения, либо определения диссипативной функции и ассоциированного закона нагружения.

Д.Д. Ивлевым проанализированы различные принципы, лежащие в основе теории пластичности, найдены интегральные неравенства, приводящие к ассоциированному закону пластического течения и ассоциированному закону нагружения.

Д.Д. Ивлев выполнил также ряд работ, посвященных анализу законов течения и нагружения в обобщенных переменных.

В работах Д.Д. Ивлева дальнейшее развитие получило исследование стационарных и нестационарных плоских течений идеально пластических сред. Рассмотрены уравнения, определяющие общее плоское состояние идеально пластических тел, частными случаями которого являются плоское напряженное и плоское деформированное состояния, и получены соотношения, обобщающие известные соотношения Генки и Гейрингер, вдоль характеристик обобщенной плоской задачи.

В 1966 г. в издательстве "Наука" выходит в свет монография Д.Д. Ивлева "Теория идеальной пластичности". В этом оригинальном сочинении с высоким мастерством были изложены новые результаты и принципы математической теории идеальной пластичности и, прежде всего, теория пространственной и обобщенной плоской задачи. Заметим, что эта монография стоит в одном ряду с замечательными руководствами по теории пластичности, написанными советскими учеными-механиками, которые по мастерству изложения и богатству результатов до сих пор остаются непревзойденными образцами[10]. И в настоящее время "Теория

[10] Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. школа, 1969. 608 с. (это последнее третье издание; второе издание: Соколовский В.В. Теория пластичности. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. 396 с.; первое издание книги было выпущено в свет издатель-

идеальной пластичности" Д.Д. Ивлева служит незаменимым руководством для тех, кто пытается глубже проникнуть в основы математической теории идеальной пластичности, опираясь на блестящее и последовательное изложение, данное грандом этой науки.

В механике упрочняющихся пластических тел Д.Д. Ивлев (совместно с Г.И. Быковцевым) последовательно развивал представления, основанные на трансляционном механизме упрочнения, предложенные в исследованиях А.Ю. Ишлинского и В. Прагера (W. Prager). Результаты их совместных исследований легли в основу классической монографии, которая по сути представляет собой каноническое изложение математической теории пластичности упрочняющегося тела в случае малых деформаций. В этой монографии читатель найдет исчерпывающий анализ общих уравнений теории течения и свойств их решений, включая анализ сильных и слабых разрывов с помощью аппарата геометрических и кинематических условий совместности Адамара—Томаса (J. Hadamard, T. Tomas).

Им также предложен алгоритм построения моделей сложных сред, обладающих внутренними механизмами пластичности, вязкости и упругости.

В работах Д.Д. Ивлева дальнейшее развитие получил метод малого параметра применительно к задачам жесткопластического и упругопластического состояния тел. Дано решение ряда задач по определению границы, разделяющей зоны упругости и пластичности для плоских, осесимметричных и пространственных случаев упругопластического равновесия. На примере разложения в ряд классических решений Л.А. Галина и Г.П. Черепанова было установлено их совпадение с решениями, полученными непосредственно методом малого параметра и показана достаточно быстрая сходимость приближений.

Помимо перечисленных Д.Д. Ивлеву принадлежат различные результаты в области предельного состояния конструкций, статики и динамики сыпучих сред, устойчивости равновесия упругопластических тел, гидродинамики, теории трещин и механики разрушения. Следует отметить обстоятельный обзор работ по механике разрушения с изложением основных результатов этой части механики деформируемого твердого тела, сделанный им в момент острой дискуссии, посвященной механике трещин (см.: Ивлев Д.Д. О теории трещин квазихрупкого разрушения // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1967. №6. С. 88–128). Через сорок лет после этой дискуссии стало очевидным, что она нанесла значительный ущерб российской науке.

ством АН СССР в 1946 г.); Ильюшин А.А. Пластичность. М.: Гостехтеоретиздат, 1948. 376 с.; Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с. (первое издание этой книги: Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. 324 с.); Мосолов П.П., Мясников В.П. Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.; Аннин Б.Д., Черепанов Г.П. Упруго-пластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 240 с.

В Самарском государственном университете на кафедре механики сплошных сред в течение трех десятилетий проводятся исследования в рамках научного направления, вектор которого был задан Д.Д. Ивлевым в его работах по теории пространственной задачи математической теории пластичности конца 50-х годов. Это один из самых сложных и наименее изученных разделов механики деформируемого твердого тела. Основополагающие результаты в этой области принадлежат Д.Д. Ивлеву. Они подытожены в фундаментальной двухтомной монографии "Механика пластических сред"[11]. Современное состояние теории пространственной задачи математической теории пластичности изложено в ряде публикаций сотрудников кафедры (см., например: Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Издательство "Самарский университет", 2004. 147 с.). Мы стремились дать полное и систематическое изложение методов и результатов, связанных с исследованием трехмерных уравнений математической теории пластичности в изостатической координатной сетке, делая акцент на новых общих методах, которые обеспечивают решение прикладных задач механики деформируемого твердого тела. В последние годы удалось получить целый спектр новых результатов, касающихся трехмерных уравнений математической теории пластичности с условием пластичности Треска и ассоциированным с ним законом течения для напряженных состояний, соответствующих ребру поверхности текучести[12]. Найдена замечательная инвариантная векторная форма уравнений равновесия, позволяющая исследовать геометрию поля главных направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному напряжению. Дана классификация решений трехмерных статических уравнений в зависимости от завихренности указанного поля главных направлений. Ука-

[11] См.: Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. 1. Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001. 448 с.

Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. М.: Физматлит, 2002. 448 с.

[12] Согласно современным представлениям, идеально пластическое течение возникает как результат малых скольжений по определенным площадкам скольжения, и линии скольжения, наблюдаемые при пластическом течении металлов, суть частное проявление физического механизма скольжения. Именно условие пластичности Треска, как известно, позволяет развить математическую теорию пластичности, вполне соответствующую сдвиговому механизму пластического течения. Для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Треска, обобщенный ассоциированный закон течения не устанавливает никаких ограничений на тензор скоростей пластических деформаций (помимо условий несжимаемости и соосности тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций), следовательно, пластическое течение имеет наибольшую свободу и именно поэтому возрастает вероятность построить решения ряда важнейших прикладных задач, рассматривая ребро условия текучести Треска. Ясно, что напряженные состояния, соответствующие граням призмы Треска, могут реализовываться лишь в исключительных случаях, поскольку при этом имеется весьма сильное кинематическое ограничение: одна из главных скоростей пластических деформаций должна быть равна нулю.

заны инварианты, сохраняющие свои значения вдоль линий главных напряжений. Дан анализ трехмерных уравнений математической теории пластичности для приращений напряжений и деформаций в ортогональных изостатических координатах. С помощью новых подходов проведен анализ плоской и осесимметричной задачи. Исследованы автомодельные решения осесимметричной задачи математической теории пластичности и получены новые автомодельные решения, обобщающие известные решения Шилда (R.T. Shield). Проведен групповой анализ уравнений осесимметричной и пространственной задачи, сформулированных в изостатической системе координат. Построены новые инвариантно-групповые решения, являющиеся следствием высокой степени симметричности пространственных уравнений Д.Д. Ивлева.

Преподавание математической теории пластичности в Самарском государственном университете имеет свою историю и традиции, связанные прежде всего с именем известного специалиста в теории упрочняющихся идеально пластических тел — Г.И. Быковцева. Для него всегда было характерно сочетание собственно механического содержания теории пластичности с глубоким и изящным математическим исследованием гиперболических задач для дифференциальных уравнений в частных производных, к которым приводит изучение полей напряжений и скоростей деформаций в зонах пластического течения[13]. Такой синтез требовал также особого курса по теории дифференциальных уравнений в частных производных математической физики, в котором излагались такие редко освещаемые в современной учебной литературе темы, как общая теория характеристик для нелинейных уравнений первого и второго порядков, метод каскадного интегрирования Лапласа, метод тангенциального преобразования, метод фазового преобразования.

Д.Д. Ивлев — член Национального комитета РАН по теоретической и прикладной механике, член редколлегий журналов “Известия РАН — Механика твердого тела” и “Прикладная математика и механика”, член экспертного совета по математике и механике ВАК Минобразования и науки РФ, председатель диссертационного совета по присуждению ученой степени доктора физико-математических наук, действительный член Национальной академии наук и искусств Чувашской Республики, заслуженный деятель науки и техники РФ. Среди учеников Д.Д. Ивлева — доктора и кандидаты наук, которые работают в различных городах России — Москве, Воронеже, Самаре, Чебоксарах, Владивостоке.

Профессорско-преподавательский состав Самарского государственного университета, ученики и коллеги поздравляют Дюиса Даниловича с 75-летием и желают ему здоровья и творческих успехов в научной и педагогической деятельности.

[13] С избранными научными статьями Г.И. Быковцева заинтересованный читатель может познакомиться по книге: Быковцев Г.И. Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: Сб. ст. Владивосток: Дальнаука, 2002. 566 с.

СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ Д.Д. ИВЛЕВА[14]

1955

1. К теории простого деформирования пластических тел // Прикл. матем. и механика. 1955. Т. 19. Вып. 6. С. 734–735.

1956

2. К использованию линейной тензорной связи в пластичности // Прикл. матем. и механика. 1956. Т. 20. Вып. 2. С. 289–292.
3. Выпучивание эксцентричной трубы // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. 1956. №10. С. 112–166.

1957

4. О потере несущей способности вращающихся дисков, близких круговому // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. 1957. №1. С. 141–144.
5. Упруго-пластическое состояние конической трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник МГУ. 1957. №2. С. 51–52 (совм. с Л.В. Ершовым).
6. Выпучивание толстостенной трубы, ослабленной пологой осесимметричной выточкой // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. 1957. №5. С. 113–118.
7. Приближенное решение упруго-пластических задач теории идеальной пластичности // Докл. АН СССР. 1957. Т. 113. №2. С. 294–296.
8. Приближенное решение задач теории малых упруго-пластических деформаций // Докл. АН СССР. 1957. Т. 113. №2. С. 527–528.
9. Упруго-пластическое напряженное состояние полого толстостенного тора, находящегося под действием внутреннего давления // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. 1957. №7. С. 129–131 (совм. с Л.В. Ершовым).
10. О выпучивании толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. 1957. №8. С. 149–152 (совм. с Л.В. Ершовым).
11. Упруго-пластическое состояние эллиптической трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. 1957. №9. С. 130–134 (совм. с Л.В. Ершовым).
12. Вдавливание тонкого лезвия в пластическую среду // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. 1957. №10. С. 89–93.

[14] Подготовлен к печати А.И. Фроловым. Работы располагаются в хронологическом порядке.

13. Об определении перемещений в задаче Л.А. Галина // Прикл. матем. и механика. 1957. Т. 21. Вып. 5. С. 716–718.
14. Приближенное решение плоских упругопластических задач теории идеальной пластичности // Вестник МГУ. 1957. №5. С. 17–26 (совм. с Л.В. Ершовым).

1958

15. О потере устойчивости вращающихся дисков // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. 1958, №1. С. 124–125 (совм. с Л.В. Ершовым).
16. О некоторых работах К.Н. Шевченко по теории пластичности // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. 1958. №2. С. 159–162.
17. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды // Прикл. матем. и механика. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 90–96.
18. Приближенное решение упругопластических осесимметрических задач теории идеальной пластичности // Вестник МГУ. 1958. №2. С. 47–56 (совм. с Л.В. Ершовым).
19. О разрывных решениях пространственных задач теории идеальной пластичности // Прикл. матем. и механика. 1957. Т. 22. Вып. 4. С. 480–486.
20. О некоторых частных решениях уравнений осесимметричной теории идеальной пластичности и обобщение решения Л. Прандтля о сжатии пластической полосы шероховатыми плитами // Прикл. матем. и механика. 1958. Т. 22. Вып. 5. С. 673–678.
21. К построению теории идеальной пластичности // Прикл. матем. и механика. 1958. Т. 22. Вып. 6. С. 850–855.
22. Об одном классе решений общих уравнений теории идеальной пластичности // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. 1958. №11. С. 107–109.
23. Об одном частном решении общих уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах // Докл. АН СССР. 1958. Т. 123. №6. С. 488–490.

1959

24. Об одном частном решении общих уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах при условии пластичности Треска // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. 1959. №1. С. 132–133.
25. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска и его обобщениях // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. №6. С. 546–549.
26. О вдавливании жестких штампов в пластическое полупространство // Прикл. матем. и механика. 1959. Т. 23. Вып. 2. С. 247–281.

27. К теории разрушения твердых тел // Прикл. матем. и механика. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 618–624.
28. О выводе соотношений, определяющих пластическое течение при условии полной пластичности // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. 1959. №3. С. 137.
29. Об изотропном упрочнении пластических тел // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. №4. С. 777–779.
30. К определению перемещений в задаче Л.А. Галина // Прикл. матем. и механика. 1959. Т. 23. Вып. 5. С. 987–988.
31. К теории идеальной пластической анизотропии // Прикл. матем. и механика. 1959. Т. 23. Вып. 6. С. 1107–1114.
32. К теории осесимметричного напряженного состояния при условии пластичности Треска // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. Мех. и машиностроение. 1959. №6. С. 112–114.

1960

33. К теории идеально затвердевающих сред // Докл. АН СССР. 1960. Т. 130. №4. С. 742–745.
34. Об уравнениях линеаризованных пространственных задач теории идеальной пластичности // Докл. АН СССР. 1960. Т. 130. №6. С. 1232–1235.
35. О границе пластического состояния материала // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. Мех. и машиностроение. 1960. №1. С. 161.
36. О свойствах соотношений закона анизотропного упрочнения пластического материала // Прикл. матем. и механика. 1960. Т. 24. Вып. 1. С. 144–146.
37. О постулате изотропии в теории пластичности // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. Мех. и машиностроение. 1960. №2. С. 125–127.
38. К теории плоской деформации упрочняющегося пластического материала // Прикл. матем. и механика. 1960. Т. 24. Вып. 4. С. 707–710.
39. Об экстремальных свойствах условий пластичности // Прикл. матем. и механика. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 951–955.
40. К построению гидродинамики вязкой жидкости // Докл. АН СССР. 1960. Т. 135. №2. С. 280–282.
41. О работе В.С. Ленского "Некоторые новые данные о пластичности металлов при сложном нагружении" // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. Мех. и машиностроение. 1960. №6. С. 179–180.
42. К теории вдавливания штампа в пластическую среду // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1960. №3. С. 214–216 (совм. с В.А. Жалниным).
43. 0 вдавливании тонкого тела вращения в пластическое полупространство // Журнал прак. механики и технич. физики. 1960. №4. С. 75–78.

1961

44. Об определении предельной нагрузки тел, вдавливаемых в пластическую среду // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. Мех. и машиностроение. 1961. №1. С. 173–174 (совм. с Г.И. Быковцевым).
45. К теории неустановившейся ползучести // Проблемы механики сплошной среды: Сб. статей, посв. 70-летию акад. Н.И. Мусхелишвили. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 157–160.
46. Об определении поверхности выпучивающегося материала при вдавливании тонкого лезвия в пластическое полупространство // Прикл. матем. и механика. 1961. Т. 25. Вып. 2. С. 332–335.
47. К теории сферического деформированного состояния идеально пластических сред // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1961. №1. С. 72–75 (совм. с Т.Н. Мартыновой).
48. Об устойчивости полосы при сжатии // Докл. АН СССР. 1961. Т. 138. №5. С. 1047–1049 (совм. с Л.В. Ершовым).
49. К построению теории упругости // Докл. АН СССР. 1961. Т. 138. №6. С. 1321–1324.
50. Об основных соотношениях теории анизотропной сыпучей среды // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1961. №2. С. 116–121 (совм. с Т.Н. Мартыновой).
51. О математическом описании поведения упругого изотропного тела при помощи кусочнолинейного потенциала // Прикл. матем. и механика. 1961. Т. 25. Вып. 5. С. 897–905.
52. О кручении винтовых стержней из идеально жесткопластического материала // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. Мех. и машиностроение. 1961. №5. С. 124–126.
53. О вдавливании кольцевого штампа в пластическое полупространство // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1961. №6. С. 153–154 (совм. с В.А. Жалниным, В.С. Мищенко).
54. Об учете сжимаемости в теории идеально пластических сред // Прикл. матем. и механика. 1961. Т. 25. Вып. 6. С. 1126–1128 (совм. с Т.Н. Мартыновой).
55. О двойных числах и их функциях // Математическое просвещение. 1961. №6. С. 197–203.

1962

56. Об идеально пластическом течении материала с учетом остаточных микронапряжений // Прикл. матем. и механика. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 709–714.
57. К теории предельного равновесия оболочек вращения при кусочнолинейных условиях пластичности // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. Мех. и машиностроение. 1962. №6. С. 95–102.

1963

58. К теории сжимаемых идеально пластических сред // Прикл. матем. и механика. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 589–592 (совм. с Т.Н. Мартыновой).
59. О кручении призматических стержней из упрочняющегося материала при линеаризованном условии пластичности // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. Мех. и машиностроение. 1963. №3. С. 115–118 (совм. с В.В. Дудукаленко).
60. К теории сложных сред // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. №1. С. 64–67.
61. Об условии полной пластичности для осесимметричного состояния // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1963. №3. С. 102–104 (совм. с Т.Н. Мартыновой).
62. О предельном состоянии осесимметричных тел при условиях сопротивления сдвигу и отрыву // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. Мех. и машиностроение. 1963. №5. С. 79–85 (совм. с Т.Н. Мартыновой).
63. О кручении анизотропно упрочняющихся стержней при линеаризованном законе пластического течения // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. Мех. и машиностроение. 1963. №5. С. 173–175 (совм. с В.В. Дудукаленко).
64. О кручении призматических стержней из идеально пластического материала с учетом микронапряжений // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1963. №5. С. 154–157 (совм. с И.А. Бережным).
65. Об уравнениях вязкопластического тела при кусочнолинейных потенциалах // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. Мех. и машиностроение. 1963. №6. С. 12–16 (совм. с В.А. Знаменским).
66. О сжатии полосы из упрочняющегося пластического материала жесткими шероховатыми плитами // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153. №5. С. 1024–1026 (совм. с В.В. Дудукаленко).

1964

67. К теории осесимметричного состояния идеально пластического материала // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1964. №5. С. 102–108 (совм. с Г.И. Быковцевым, Т.Н. Мартыновой).
68. О функциях нагружения анизотропного упрочняющегося пластического материала // Прикл. матем. и механика. 1964. Т. 28. Вып. 4. С. 794–797 (совм. с Г.И. Быковцевым, В.В. Дудукаленко).
69. О предельном состоянии слоистых пластин и оболочек вращения // Изв. АН СССР. Отд. технич. наук. Мех. и машиностроение. 1964. №4. С. 77–86 (совм. с Ю.П. Листровой, Ю.В. Немировским).
70. Об устойчивости пластин в общем случае нелинейной деформационной теории при малых деформациях // Прикл. механика. 1964. №2. С. 117–123 (совм. с И.Д. Легеней).

71. Пластичности теория (математич.) // Физический энциклопедич. словарь. М.: Сов. энцикл., 1964. С. 37–39.
72. Пластический шарнир // Физический энциклопедич. словарь. М.: Сов. энцикл., 1964. С. 37.
73. Пластичности условия // Физический энциклопедич. словарь. М.: Сов. энцикл., 1964. С. 39.

1965

74. О влиянии вязкости на механическое поведение упруго-пластических сред // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163. №3. С. 595–598 (совм. с И.А. Бережным).
75. О свойствах общих уравнений теории идеальной пластичности // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164. №4 (совм. с Т.Н. Мартыновой).
76. О свойствах общих уравнений теории идеальной пластичности при кусочнолинейных потенциалах // Изв. АН СССР. Механика. тверд. тела. 1965. №1. С. 56–69 (совм. с Г.И. Быковцевым, Т.Н. Мартыновой).
77. К теории устойчивости пластины в общем случае деформационной теории: Труды всесоюзн. конф. по устойчивости. М.: Стройиздат, 1965.

1966

78. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.

1967

79. О некоторых случаях интегрируемости соотношений теории упрочняющихся пластических сред при сингулярных поверхностях текучести // Инж. журнал. Механика тверд. тела. 1967. №1. С. 143–144 (совм. с Л.В. Ершовым).
80. О диссипативной функции в теории упрочняющихся пластических сред // Прикл. матем. и механика. 1967. Т. 31. Вып. 2. С. 346–348.
81. Об условиях квазихрупкого разрушения // Прикл. матем. и механика. 1967. Т. 31. Вып. 5. С. 537–542 (совм. с Л.В. Ершовым).
82. О деформационных теориях пластичности при сингулярных поверхностях нагружения // Прикл. матем. и механика. 1967. Т. 32. Вып. 5. С. 887–889.
83. О диссипативной функции в теории пластических сред // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. №5. С. 1037–1039.
84. О соотношениях на поверхностях разрыва напряжений в трехмерных идеально-пластических телах // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. №5. С. 1039–1042 (совм. с Г.И. Быковцевым, Ю.М. Мяснянкиным).

85. Об одном построении теории трещин // Инж. журнал. Механика тверд. тела. 1967. №6. С. 91–94.
86. О теории трещин квазихрупкого разрушения // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1967. №6. С. 88–128.

1968

87. О соотношениях на поверхности разрыва напряжений в трехмерных идеально жесткопластических телах // Прикл. матем. и механика. 1968. Т. 38. Вып. 3. С. 472–477 (совм. с Г.И. Быковцевым, Ю.М. Мяснянкиным).
88. О кинематических соотношениях на поверхности скольжения в идеальных жесткопластических телах // Прикл. матем. и механика. 1968. Т. 38. Вып. 4. С. 623–631 (совм. с Г.И. Быковцевым, Ю.М. Мяснянкиным).
89. К задаче о внедрении гладкого клинообразного в плане штампа с плоским основанием в жесткопластическое пространство // Инж. журнал. Механика тверд. тела. 1968. №6. С. 115–118 (совм. с Р.И. Непершиным).

1969

90. О деформационных теориях пластичности // Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды: Сб. статей, посв. 60-летию акад. Л.И. Седова. М., 1969. С. 233–239.

1970

91. О диссипативных функциях в теории вязкопластических сред // Проблемы механики сплошной среды (К 60-летию акад. В.В. Новожилова). 1970. С. 67–70. (совм. с И.А. Бережным, Е.В. Макаровым).
92. Об одной неполной задаче теории идеальной пластичности // Труды НИИ математики ВГУ. 1970. С. 145–148.
93. О деформационных моделях теории пластичности и сплошных сред // Прикл. матем. и механика. 1970. Т. 40. Вып. 3. С. 553–557 (совм. с И.А. Бережным, Е.В. Макаровым).

1971

94. Об уравнениях теории идеальной пластичности в компонентах скоростей перемещений // Прикл. матем. и механика. 1971. Т. 41. Вып. 1. С. 183–185 (совм. с А.Д. Чернышевым).
95. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с. (совм. с Г.И. Быковцевым).

1972

96. О приобретенной анизотропии пластических тел // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. Сб. статей, посв. 80-летию акад. Н.И. Мусхелишвили. М., 1972. С. 601–605 (совм. с И.А. Бережным, В.В. Дудукаленко).
97. Об общих соотношениях теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды // Прикл. матем. и механика. 1972. Т. 42. Вып. 5. С. 957–959.
98. О построении модели сыпучих сред исходя из определения диссипативной функции // Основы пластичности: Сб. трудов симпозиума. Варшава, 1973. С. 601–605 (совм. с И.А. Бережным, В.Б. Чадовым).

1973

99. О построении модели сыпучих сред на основе диссипативных функций // Докл. АН СССР. 1973. Т. 123. №6 (совм. с И.А. Бережным, В.Б. Чадовым).
100. Внедрение гладкого сферического штампа в жесткопластическое полупространство // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1973. №4. С. 159–166 (совм. с Р.И. Непершиным).
101. Об одном обобщении решения Прандтля для сферического деформированного состояния // Труды НИИ математики ВГУ. Воронеж, 1973. Вып. 10. С. 1–3.

1974

102. О диссипативной функции в теории анизотропных пластических сред // Изв. вузов. Машиностр. МВТУ. 1974. С. 21–24 (совм. с В.Б. Чадовым).
103. О некоторых моделях, построенных на основе механизмов упругости, вязкости и пластичности с переменными определяющими параметрами // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1974. №1 (совм. с И.А. Бережным, Н.В. Герасимовым).
104. О функции нагружения для идеально пластических моделей // Избр. проблемы прикл. механики: Сб. статей, посв. 60-летию акад. В.Н. Челомея. М., 1974. С. 113–117 (совм. с И.А. Бережным, В.И. Цейлером).

1975

105. Об определении перемещений в упруго-пластических задачах теории идеальной пластичности // Успехи механики деформируемых сред (К 100-летию со дня рождения акад. Б.Г. Галеркина). М., 1975. С. 236–240.

106. О построении поверхностей сложных жесткопластических моделей // Механика деформируемых тел и конструкций: Сб. статей. М.: Машиностроение, 1975. С. 62–70 (совм. с И.А. Бережным, В.И. Цейлером).
107. О течении жидкости с управляемой вязкостью // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223. №3. С. 582–584 (совм. с И.А. Бережным, Н.В. Герасимовым, В.И. Цейлером).
108. О некоторых экспериментах со сходящимися кольцевыми волнами на поверхности тяжелой жидкости // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223. №4. С. 810–811 (совм. с И.А. Бережным, Р.К. Логвиновой).

1976

109. Об определяющих неравенствах в теории пластичности // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. №4. С. 824–826 (совм. с И.А. Бережным).

1977

110. Диссипативная функция в теории пластичности // Механика деформируемого тела: Межвуз. сб. Куйбышев, 1977. Вып. 3. С. 5–22 (совм. с И.А. Бережным).

1978

111. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с. (совм. с Л.В. Ершовым).
112. Об условиях пластичности сжимаемого упругопластического материала при плоской деформации // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1978. №4. С. 80–87 (совм. с Е.В. Макаровым, Ю.М. Марушкей).

1980

113. Об интегральных неравенствах теории упругопластического тела // Прикл. матем. и механика. 1980. Т. 44. №3. С. 540–549 (совм. с И.А. Бережным).

1981

114. Определяющие неравенства в теории упругопластического тела: Тезисы докл. V Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Алма-Ата, 1981 (совм. с И.А. Бережным).

1982

115. Об уравнениях стареющих пластических тел // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1982. Т. XXV. №5. С. 22–25 (совм. с Н.Х. Арутюняном).

116. Об обобщении решения Л. Прандтля о сжатии пластического слоя шероховатыми плитами // Современные проблемы механики и авиации: Сб. статей в честь 60-летия акад. И.Ф. Образцова. М.: Машиностроение, 1982. С. 137–144 (совм. с Л.В. Ершовым, А.В. Романовым).
117. Об обобщении решения Прандтля в сферической системе координат // Прикл. матем. и механика. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 524–527 (совм. с А.В. Романовым).

1983

118. О влиянии внутреннего механизма вязкости на поведение идеально пластических сред // Прикл. матем. и механика. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 524–527 (совм. с М.А. Артемовым).
119. Об одной предельной модели сплошной среды // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. №5. С. 1074–1076 (совм. с И.Т. Артемьевым).

1984

120. К теории предельного состояния хрупких тел с разрывными решениями // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1984. №1. С. 111–116 (совм. с И.Т. Артемьевым).
121. Об одном точном неавтомодельном решении теории идеальной пластичности // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. №5. С. 1080–1083 (совм. с А.В. Романовым).
122. Об одном классе точных неавтомодельных задач теории идеальной пластичности // Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела: Сб. статей, посв. 60-летию акад. Ю.Н. Работнова. М.: Наука, 1984. С. 90–97 (совм. с А.В. Романовым).

1985

123. Краевая задача для сред с предельным сопротивлением всестороннему растяжению // Краевые задачи и их приложение. Чебоксары: ЧГУ, 1985. С. 3–9 (совм. с И.Т. Артемьевым).

1986

124. О течении идеально вязкой среды // Краевые задачи и их приложение. Чебоксары: ЧГУ, 1986. С. 33–42 (совм. с А.А. Горбуновым).
125. Об упругопластическом состоянии клина при предельном сопротивлении сдвигу и отрыву // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1986. №1. С. 157–161 (совм. с И.Т. Артемьевым).
126. О нижней границе несущей способности тел, определяемой условиями, предельного состояния: Аннотации докл. VI Всесоюзн. съезда по теоретической и прикладной механике. Ташкент, 1986. С. 51 (совм. с И.Т. Артемьевым, А.А. Горбуновым).

127. Об определяющих соотношениях в теории предельного сопротивления сдвигу и среднему напряжению // Актуальные задачи механики сплошных сред. Чебоксары: ЧГУ, 1986. С. 45–52 (совм. с А.А. Горбуновым).
128. Об изгибе пластической полосы, ослабленной пологими выточками // Взаимодействие тел в жидкости со свободными границами. Чебоксары: ЧГУ, 1986. С. 57–60 (совм. с Л.Б. Шитовой).

1988

129. Определение напряженного состояния в деформируемом объеме порошкового материала методом характеристик // Порошковая металлургия. 1988. №1. С. 6–10 (совм. с Н.А. Чайниковым).
130. Упругопластические равновесия остроугольного клина при предельном сопротивлении сдвигу, среднему растягивающему напряжению и отрыву // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1988. №4. С. 157–162 (совм. с И.Т. Артемьевым).
131. Линеаризированные уравнения теории анизотропного идеального жесткопластического тела // Актуальные вопросы теории краевых задач и их приложений. Чебоксары: ЧГУ, 1988. С. 55–58 (совм. с Л.Б. Шитовой).

1989

132. Об образовании шейки при течении анизотропной жесткопластической полосы // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1989. №2. С. 183–185 (совм. с Е.А. Григорьевым, Л.Б. Шитовой).
133. Об образовании шейки при растяжении плоского образца с учетом влияния среднего напряжения // Краевые задачи и их приложения. Чебоксары: ЧГУ, 1989. С. 117–119 (совм. с Л.Б. Шитовой).

1992

134. Пластичности теория (математическая) // Физическая энциклопедия. Т. 3. М.: Бол. российская энцикл., 1992. С. 628–631.
135. Пластический шарнир // Физическая энциклопедия. Т. 3. М.: Бол. российская энцикл., 1992. С. 628.
136. Пластичности условие // Физическая энциклопедия. Т. 3. М.: Бол. российская энцикл., 1992. С. 631.
137. К теории предельного состояния пластических пористых тел // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1992. №3. С. 163–165.
138. Об условиях текучести идеально пластического тела // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1992. №5. С. 107–109 (совм. с А.В. Романовым).

139. О свойствах основных соотношений теории идеальной пластической анизотропии // Актуальные проблемы механики деформ. тверд. тела: Сб. статей, посв. 70-летию Ж.С. Ержанова. Алма-Ата, 1992. С. 69–75 (совм. с И.Т. Артемьевым).

1993

140. Теория идеальной пластической анизотропии // Прикл. механика. 1993. Т. 29. №1. С. 73–78 (совм. с И.Т. Артемьевым).
141. Линеаризированные уравнения теории идеальной пластичности // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1993. №5. С. 107–113 (совм. с И.Т. Артемьевым).
142. О применении обобщенных функций комплексного переменного к двумерной задаче теории упругости // Прочность и надежность конструкций. Сб. статей, посв. 50-летию В.Д. Кулиева. М., 1993. С. 83–89 (совм. с М.В. Михайловой).

1994

143. Об общих соотношениях теории идеальной пластичности при кусочнолинейных условиях текучести // Изв. АН Чувашской республ. 1994. №2. С. 16–21 (совм. с М.А. Артемовым).
144. К теории идеально затвердевающих сред // Изв. АН Чувашской республ. 1994. №2. С. 22–25 (совм. с М.А. Артемовым).
145. К теории предельного состояния сыпучих сред // Деп. в ВИНИТИ 16.12.94. 2918-в94. 5 с. (совм. с Л.Б. Шитовой).

1995

146. О статических и кинематических соответствиях в теории идеальной пластичности при кусочнолинейных условиях текучести // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 1995. №3. С. 104–110 (совм. с М.А. Артемовым).
147. О линеаризованных уравнениях кинематически определимых задач // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 1995. №6. С. 104–110 (совм. с М.А. Артемовым).
148. К теории затвердевающих сред // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. 1995. №1. С. 14–21 (совм. с М.А. Артемовым).
149. О растяжении полосы и бруса переменного прямоугольного сечения из идеально-пластического материала // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. 1995. №1. С. 39–48 (совм. с А.М. Васильевой, М.В. Михайловой).

150. Приближенное решение плоских задач для идеальных упругопластических неоднородных тел // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. 1995. №1. С. 27–38 (совм. с Т.Л. Захаровой).
151. Об идеально пластическом состоянии полого кругового цилиндра при произвольном возмущении боковой поверхности // Известия инженерно технологической академии Чувашской республ. 1995. №1. С. 29–36 (совм. с А.М. Васильевой).

1996

152. Об одной модели предельного состояния тел // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 1996. №1. С. 61–64 (совм. с Л.Б. Шитовой).
153. О пластическом течении бруса прямоугольного сечения при растяжении // Динамика сплошных сред со свободной границей. Чебоксары, 1996. С. 8–17 (совм. с М.А. Артемовым).
154. О соотношениях теории пластической анизотропии // Динамика сплошных сред со свободной границей. Чебоксары, 1996. С. 121–125.
155. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности // Проблемы механики сплошной среды. Владивосток, 1996. С. 112–115.
156. О статической определимости предельного состояния твердого тела при отрыве // Проблемы механики. 1996. Т. 32. №6. С. 48–51.
157. О разрывных решениях теории пластичности // Проблемы механики. 1996. Т. 32. №7. С. 65–68 (совм. с М.А. Артемовым).
158. Об одном случае предельного состояния тел // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 1996. №3. С. 43–45 (совм. с М.А. Артемовым).
159. К теории дифференциальных соответствий в механике сплошной среды // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. 1996. №2. С. 5–7.
160. Об общих соотношениях теории идеальной пластичности при кусочнолинейных условиях текучести // Докл. РАН. 1996. Т. 350. №3. С. 332–334 (совм. с М.А. Артемовым).
161. О течении трубы, ослабленной пологими выточками // Изв. нац. акад. наук и искусств Чувашской республ. 1996. №6. С. 28–31 (совм. с Т.Л. Захаровой).
162. О растяжении полосы и бруса переменного прямоугольного сечения из идеально пластического материала // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 1996. №6. С. 79–87 (совм. с А.М. Васильевой, М.В. Михайловой).
163. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности // Изв. нац. акад. наук и искусств Чувашской республ. 1996. №6. С. 32–34.
164. Об образовании шейки в растягиваемой вязкопластической полосе // Изв. нац. акад. наук и искусств Чувашской республ. 1996. №6. С. 35–38 (совм. с Т.И. Рыбаковой).

1997

165. Об идеально пластическом состоянии призматических тел переменного прямоугольного сечения // Докл. РАН. 1997. Т. 353. №1. С. 47–50 (совм. с М.А. Артемовым).
166. К теории идеально затвердевающих сред // Докл. РАН. 1997. Т. 355. №5. С. 623–625 (совм. с М.А. Артемовым).
167. О напряженном состоянии идеально пластического полого цилиндра, близкого к круговому // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 1997. №4. С. 113–119 (совм. с А.М. Васильевой).
168. Приближенное решение плоских задач для идеальных упругопластических неоднородных тел // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1997. Т. 38. №5. С. 165–172 (совм. с Т.Л. Захаровой).
169. О соотношениях ассоциированного закона течения и нагружения в теории идеальной пластичности // Изв. нац. акад. наук и искусств Чувашской республ. 1997. №4. С. 78–94.

1998

170. О пространственном течении идеально пластического материала, сжатого шероховатыми плитами // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 1998. №1. С. 5–12.
171. О течении трубы, ослабленной выточками // Докл. РАН. 1998. Т. 359. №1. С. 40–42 (совм. с Т.Л. Захаровой).
172. Об устойчивости вязкопластической полосы // Докл. РАН. 1998. Т. 358. №4. С. 490–491 (совм. с Т.И. Рыбаковой).
173. Об общих соотношениях теории идеальной пластичности // Докл. РАН. 1998. Т. 361. №6. С. 765–767.
174. Об идеальном жесткопластическом течении плоской полосы // Докл. РАН. 1998. Т. 363. №4. С. 483–485 (совм. с Л.А. Максимовой).
175. О возмущенном течении растягиваемой идеально пластической полосы // Докл. РАН. 1998. Т. 363. №5. С. 632–633 (совм. с Л.А. Максимовой).
176. О соотношениях ассоциированного закона пластического течения в обобщенных переменных // Докл. РАН. 1998. Т. 363. №6. С. 775–776.
177. О предельном состоянии идеально пластического прямоугольного бруса, ослабленного пологими выточками // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 1998. №4. С. 173–179 (совм. с М.А. Артемовым).
178. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с. (совм. с Г.И. Быковцевым).
179. Изменение жесткости и процессы микроповреждений в хрупком материале // Изв. нац. акад. наук и искусств Чувашской республ. 1998. №5. С. 18–28 (совм. с В.В. Дудукаленко).

1999

180. Об определении соотношений ассоциированного закона идеально-пластического течения // Прикладные задачи механики сплошных сред. Воронеж, 1999. С. 116–123.
181. К теории кинематически определимых состояний идеальнопластических тел // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 1999. №1. С. 92–98 (совм. с М.А. Артемовым).
182. О соотношениях общей плоской задачи теории идеальной пластичности // Известия инженерно-технологической академии Чувашской республ. Чебоксары. Сводный том. №№3,4 (1998); №№1,2 (1999). С. 13–16 (совм. с Л.А. Максимовой).
183. Условия изотропии и обобщенный ассоциированный закон пластического течения // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 1999. №6. С. 39–54 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).
184. Полная пластичность в теории идеально пластического тела // Докл. РАН. 1999. Т. 368. №3. С. 333–334 (совм. с А.Ю. Ишлинским).

2000

185. О сдавливании круглого в плане идеально пластического слоя шероховатыми плитами // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 2000. №1. С. 129–140 (совм. с И.П. Григорьевым).
186. О плоских течениях идеально жесткопластической среды // Докл. РАН. 2000. Т. 370. №1. С. 43–45 (совм. с Л.А. Максимовой).
187. О вдавливании индентора в идеальную жесткопластическую полосу // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 2000. №3. С. 131–136 (совм. с Л.А. Максимовой).
188. О течениях изотропных сред // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 2000. №5. С. 5–12 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).
189. Условия изотропии и обобщенный ассоциированный закон пластического течения // Докл. РАН. 2000. Т. 371. №1. С. 49–51 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).
190. О свойствах соотношений общей плоской задачи теории идеальной пластичности // Докл. АН РАН. 2000. Т. 373. №1. С. 39–41 (совм. с Л.А. Максимовой).
191. О свойствах течений изотропной среды // Докл. АН РАН. 2000. Т. 375. №2. С. 191–194 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).
192. Об определении связи "деформация–напряжение" в теории сложного нагружения при выполнении постулата изотропии А.А. Ильюшина // Изв. нац. акад. наук и искусств Чувашской республ. 2000. №4. С. 15–28.

2001

193. О вдавливании жесткого штампа в идеально пластическое полупространство с учетом сдвиговых усилий // Докл. РАН. 2001. Т. 379. №2. С. 196–199 (совм. с Л.А. Максимовой, Р.И. Непершиным).
194. Об определении поля скоростей идеально пластического течения в случае общей плоской задачи // Докл. РАН. 2001. Т. 379. №6. С. 758–763 (совм. с Л.А. Максимовой, Р.И. Непершиным).
195. О характеристических соотношениях для напряжений и скоростей перемещений пространственной задачи идеально пластического тела при условии полной пластичности // Докл. РАН. 2001. Т. 381. №5. С. 616–622 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Р.И. Непершиным).
196. Математическая теория идеальной пластичности. Состояние и развитие: Доклад на VIII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике // Известия инженерно-технологической акад. Чувашской республ. Сводный том. №№3,4 (1999); №№1–4 (2000); №№1–4 (2001). С. 32–44 (совм. с А.Ю. Ишлинским).
197. О представлении состояния полной пластичности на диаграмме Мора // Известия инженерно-технологической акад. Чувашской республ. Сводный том. №№3,4 (1999); №№1–4 (2000); №№1–4 (2001). С. 45–51 (совм. с Л.А. Максимовой).
198. О соотношениях плоской задачи теории упругопластического тела для неоднородного материала // Известия инженерно-технологической акад. Чувашской республ. Сводный том. №№3,4 (1999); №№1–4 (2000); №№1–4 (2001). С. 52–59 (совм. с А.В. Горским, П.В. Горским).
199. Механика пластических сред. Т. 1. Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001. 448 с.
200. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с. (совм. с А.Ю. Ишлинским).
201. О предельных течениях изотропных сред // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. Минск, 2001. С. 223–227 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).
202. Условия изотропии и ассоциированный закон пластического деформирования // Проблемы механики деформируемых тел и горных пород. Сб. статей, посв. 70-летию проф. Л.В. Ершова. М.: Изд-во Московского государственного горного университета, 2001. С. 93–116 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).

2002

203. Механика пластических сред. Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. М.: Физматлит, 2002. 448 с.

204. О характеристических соотношениях для напряжений пространственной задачи сыпучей среды при полном предельном равновесии // Докл. РАН. 2002. Т. 383. №5. С. 638–642 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Р.И. Непершиным).
205. О характеристических соотношениях для скоростей перемещений в пространственной задаче полного предельного равновесия сыпучей среды // Докл. РАН. 2002. Т. 384. №1. С. 57–61 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Р.И. Непершиным).
206. Внедрение пирамиды в идеально пластическое полупространство // Докл. РАН. 2002. Т. 385. №6. С. 766–769 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Р.И. Непершиным).
207. О вдавливании плоского штампа в идеальное жесткопластическое полупространство при действии контактных касательных напряжений // Прикл. матем. и механика. 2002. Т. 66. Вып. 1. С. 134–139 (совм. с Л.А. Максимовой, Р.И. Непершиным).
208. О внедрении жесткой пирамиды в идеально пластическое полупространство // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 2002. №4. С. 57–62 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Р.И. Непершиным).
209. О свойствах моделей изотропных сред // Проблемы механики деформируемого твердого тела: Сб. статей к 70-летию акад. Н.Ф. Морозова. СПб, 2002. С. 149–153 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).

2003

210. О сдавливании идеально пластической пирамиды плоским штампом // Докл. РАН. 2003. Т. 391. №3. С. 337–339 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Р.И. Непершиным).
211. О статически определимых соотношениях теории идеальной пластичности // Докл. РАН. 2003. Т. 391. №4. С. 483–486.
212. Статически определимые соотношения теории идеальной пластичности // Докл. РАН. 2003. Т. 391. №5. С. 634–637 (совм. с М.В. Михайловой).
213. О линеаризированных уравнениях статически определимых соотношений теории идеальной пластичности // Докл. РАН. 2003. Т. 391. №6. С. 769–771 (совм. с М.В. Михайловой).
214. К теории статически определимых соотношений и предельного состояния пластических тел // Докл. РАН. 2003. Т. 392. №1. С. 59–62 (совм. с А.Ю. Ишлинским).
215. Статически определимые соотношения теории пластичности и предельное состояние и разрушение тел // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 2003. №3. С. 84–89 (совм. с А.Ю. Ишлинским).
216. Идеи и результаты А.Ю. Ишлинского в теории пластичности // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 2003. №4. С. 167–174.

217. Идеи и результаты А.Ю. Ишлинского в теории пластичности // Проблемы механики: Сб. статей к 90-летию А.Ю. Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 30–38.
218. О соотношениях теории идеальной пластичности при условии пластичности максимального приведенного напряжения // Проблемы нелинейной механики: Сб. статей к 80-летию Л.А. Толоконникова. Тула: ТулГУ, 2003. С. 178–184 (совм. с А.Ю. Ишлинским).
219. Статически определимые состояния теории идеальной пластичности: Тез. докл. межд. конф. "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула, 2003. С. 147.
220. Статически определимые соотношения теории идеальной пластичности // Изв. нац. акад. наук и искусств Чуваш. республ. 2003. №3. С. 36–46 (совм. с М.В. Михайловой).
221. Теория идеальной пластичности. Состояние и развитие // Прикладная механика. 2003. №11. С. 6–46.

2005

222. Теория предельного состояния и идеальной пластичности. Избранные работы. Воронеж: Воронежский госуниверситет, 2005. 357 с.
223. О статически определимых состояниях в теории идеальной пластичности // Вестник Чувашского педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2005. №2(44). С. 13–18 (совм. с Л.А. Максимовой).
224. Статически определимые соотношения теории сжимаемых идеально пластических сред // Теоретическая и прикладная механика: Межведомственный сб. Вып. 19. Белорусский национальный технический университет. Минск, 2005. С. 21–24.
225. О соотношениях ассоциированного закона течения теории сжимаемых идеально-пластических сред // Докл. РАН. 2005. Т. 405. №5.
226. О статически определимых соотношениях сжимаемых идеальнопластических сред // Изв. РАН. Механика тверд. тела. 2005. №5.

Поступила в редакцию $2/IX/2005$;
в окончательном варианте — $2/IX/2005$.