УДК 539.374

ПОСВЯЩАЕТСЯ 75-ЛЕТИЮ Д.Д. ИВЛЕВА

ОБ ОДНОЙ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНЕЧНОМЕРНОЙ ПОДАЛГЕБРЕ АЛГЕБРЫ СИММЕТРИЙ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

© 2005 Ю.Н. Радаев, В.А. Гудков[1]

В работе рассматривается одна естественная конечномерная подалгебра алгебры симметрий (алгебры Ли), соответствующей группе симметрий трехмерных уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности. Предполагается, что текучесть описывается критерием Треска и соответствует ребру призмы Треска. Система дифференциальных уравнений в частных производных сформулирована в изостатической координатной сетке. Группа симметрий этой системы вычислена в предшествующей публикации. Построена оптимальная система одномерных подалгебр естественной конечномерной подалгебры указанной алгебры симметрий, насчитывающая один трехпараметрический элемент, 9 двухпараметрических, 49 однопараметрических элементов и 87 индивидуальных элементов.

1. Постановка задачи и основные уравнения

Представляемая работа является прямым продолжением ранее опубликованной статьи [1], в которой были определены непрерывные группы симметрий трехмерных уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности (в предположении, что текучесть описывается критерием Треска и соответствует ребру призмы Треска), сформулированных в изостатической системе координат, алгебра симметрий и построена оптимальная система одномерных подалгебр одной конечномерной подалгебры указанной алгебры симметрий.

Уравнения пространственной задачи теории пластичности для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Треска, были получены и проанализированы Д.Д. Ивлевым в 1959 г. Вывод уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности для напряженных состоя-

[1]Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru), Гудков Василий Александрович (goodkov@ssu.samara.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

ний, соответствующих ребру призмы Треска, в координатной сетке линий главных напряжений приведен в работе [2] (см. также [3]).

Методы группового анализа применительно к системам дифференциальных уравнений в частных производных изложены в классической монографии [4]. Мы будем придерживаться терминологии и обозначений, принятых в этой книге.

Как уже упоминалось, соотношения пространственной задачи теории идеальной пластичности для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Треска, в координатной сетке линий главных напряжений получены в [2, 3]. Эти соотношения являются формально статически определимыми, если граничные условия заданы в напряжениях. Уравнения равновесия, следовательно, могут быть формально рассмотрены независимо от кинематических уравнений. Ребро призмы Треска определяется уравнениями

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k, \tag{1.1}$$

где σ_1, σ_2, σ_3 — главные нормальные напряжения, k — предел текучести при сдвиге[2]. Учитывая условия (1.1), уравнение равновесия $\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ можно представить в форме

$$\mathrm{grad}\sigma_3 \mp 2k\mathrm{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0}, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{n}$ — единичное векторное поле, имеющее направление главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему (наименьшему) собственному значению σ_3 тензора напряжений. Уравнение (1.2) принадлежит к гиперболическому типу, характеристические направления образуют конус с углом полураствора $\pi/4$ и осью, направленной вдоль вектора $\mathbf{n}$ (характеристическими являются также направления, ортогональные $\mathbf{n}$).

Воспользуемся свойством расслоенности векторного поля $\mathbf{n}$ в зоне пластического течения ($\mathbf{n} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{n} = 0$) [3]. Это условие позволяет нам ввести криволинейные координаты ω^j ($j = 1, 2, 3$), определяемые по векторному полю $\mathbf{n}$ так, что поверхности $\omega^3 = \mathrm{const}$ являются слоями поля $\mathbf{n}$. Расслоенное статически допустимое поле напряжений порождает каноническое отображение некоторой области пространства на область пластического течения (см. [3]) Подлежащее определению каноническое преобразование координат имеет форму

$$x_i = f_i(\omega^1, \omega^2, \omega^3) \quad (i = 1, 2, 3), \tag{1.3}$$

где x_i — пространственные декартовы координаты, ω^j — канонические изостатические координаты, причем поверхности $\omega^3 = \mathrm{const}$ являются слоями поля направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному напряжению. Отображающие функции f_i должны удовлетворять следующей нелинейной системе уравнений в частных производных:

---

[2]Пределы текучести при одноосном растяжении и сдвиге связаны, согласно критерию текучести Треска, соотношением $Y = 2k$.

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_1}{\partial\omega^3}+\frac{\partial f_2}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_2}{\partial\omega^3}+\frac{\partial f_3}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_3}{\partial\omega^3}=0,\\
&\frac{\partial f_1}{\partial\omega^2}\frac{\partial f_1}{\partial\omega^3}+\frac{\partial f_2}{\partial\omega^2}\frac{\partial f_2}{\partial\omega^3}+\frac{\partial f_3}{\partial\omega^2}\frac{\partial f_3}{\partial\omega^3}=0,\\
&\left(\frac{\partial f_2}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_3}{\partial\omega^2}-\frac{\partial f_3}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_2}{\partial\omega^2}\right)\frac{\partial f_1}{\partial\omega^3}+\left(\frac{\partial f_3}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_1}{\partial\omega^2}-\frac{\partial f_1}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_3}{\partial\omega^2}\right)\frac{\partial f_2}{\partial\omega^3}+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+\left(\frac{\partial f_1}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_2}{\partial\omega^2}-\frac{\partial f_2}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_1}{\partial\omega^2}\right)\frac{\partial f_3}{\partial\omega^3}=\pm1.
\end{aligned}\right. \tag{1.4}$$

В [1] была решена задача об отыскании непрерывных групп преобразований, относительно которых система дифференциальных уравнений в частных производных (1.4) будет инвариантной. Такие группы будут являться также группами симметрий этой системы. Напомним, что полная группа симметрий данной системы дифференциальных уравнений — наибольшая группа преобразований, действующая на зависимые и независимые переменные и обладающая свойством переводить решения системы в другие ее решения. В этой же статье указан инфинитезимальный оператор полной группы непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (1.4). Он зависит от девяти произвольных постоянных и одной произвольной функции $L = L(\omega^1, \omega^2)$. Структура инфинитезимального оператора полной группы непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (1.4) такова, что допускает одну конечномерную подалгебру алгебры симметрий. В работе [1] мы назвали ее естественной конечномерной подалгеброй алгебры непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (1.4). Ясно, что естественная конечномерная подалгебра обязана своим появлением лишь формальной схеме анализа определяющих полную группу непрерывных симметрий уравнений.

Целью представляемой работы являются получение более симметричных форм для инфинитезимального оператора полной группы непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений в частных производных (1.4), а также выявление такой конечномерной подалгебры алгебры непрерывных симметрий указанной системы, которая содержала бы инфинитезимальные операторы всех важнейших однопараметрических групп симметрий системы (1.4).

2. Естественная подалгебра алгебры симметрий пространственных уравнений

Получим, прежде всего, вместо (2.30) из работы [1], более симметричное выражение для инфинитезимального оператора полной группы непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (1.4). Для этого, начиная с уравнения (2.25) указанной работы, несколько изменим ход рассуждений.

Вместо функции K, введенной согласно (2.25), рассмотрим соотношения

$$\begin{aligned}\Xi^1 &= \frac{(3C_1 - C_2')}{2}\omega^1 + K_1(\omega^1, \omega^2),\\ \Xi^2 &= \frac{(3C_1 - C_2')}{2}\omega^2 + K_2(\omega^1, \omega^2).\end{aligned} \tag{2.1}$$

Тогда вместо уравнения (2.26) получим

$$\frac{\partial K_1}{\partial \omega^1} + \frac{\partial K_2}{\partial \omega^2} = 0. \tag{2.2}$$

Соотношения (2.27) заменятся

$$K_1 = \frac{\partial L(\omega^1, \omega^2)}{\partial \omega^2}, \tag{2.3}$$

$$K_2 = -\frac{\partial L(\omega^1, \omega^2)}{\partial \omega^1}. \tag{2.4}$$

Произвольную постоянную (ср. (2.28)) следует ввести как

$$C_2 = C_2' - 3C_1. \tag{2.5}$$

В результате инфинитезимальный оператор полной группы непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (1.4) будет иметь форму (ср. (2.29) статьи [1]):

$$\begin{aligned}(\varsigma \cdot \partial) = &\left(-\frac{C_2}{2}\omega^1 + \frac{\partial L(\omega^1, \omega^2)}{\partial \omega^2}\right)\frac{\partial}{\partial \omega^1} + \left(-\frac{C_2}{2}\omega^2 - \frac{\partial L(\omega^1, \omega^2)}{\partial \omega^1}\right)\frac{\partial}{\partial \omega^2} +\\ &+((3C_1 + C_2)\omega^3 + C_3)\frac{\partial}{\partial \omega^3} + (C_1 f_1 + A_3 f_2 - A_2 f_3 + B_1)\frac{\partial}{\partial f_1} +\\ &+(-A_3 f_1 + C_1 f_2 + A_1 f_3 + B_2)\frac{\partial}{\partial f_2} + (A_2 f_1 - A_1 f_2 + C_1 f_3 + B_3)\frac{\partial}{\partial f_3}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Положим далее

$$L(\omega^1, \omega^2) = C_{10}\omega^2 - C_{11}\omega^1 + C_{12}\omega^1\omega^2 + L_2(\omega^1, \omega^2),$$

где L_2 — новая произвольная функция, и подставим в (2.6). В итоге вместо (2.30) получим

$$\begin{aligned}(\varsigma \cdot \partial) = &C_1(3\omega^3\frac{\partial}{\partial \omega^3} + f_1\frac{\partial}{\partial f_1} + f_2\frac{\partial}{\partial f_2} + f_3\frac{\partial}{\partial f_3}) + C_2(\omega^3\frac{\partial}{\partial \omega^3} - \frac{\omega^1}{2}\frac{\partial}{\partial \omega^1} - \frac{\omega^2}{2}\frac{\partial}{\partial \omega^2})+\\ &+C_3\frac{\partial}{\partial \omega^3} + B_1\frac{\partial}{\partial f_1} + B_2\frac{\partial}{\partial f_2} + B_3\frac{\partial}{\partial f_3} + A_1(f_3\frac{\partial}{\partial f_2} - f_2\frac{\partial}{\partial f_3}) + A_2(f_1\frac{\partial}{\partial f_3} - f_3\frac{\partial}{\partial f_1})+\\ &+A_3(f_2\frac{\partial}{\partial f_1} - f_1\frac{\partial}{\partial f_2}) + C_{10}\frac{\partial}{\partial \omega^1} + C_{11}\frac{\partial}{\partial \omega^2} + C_{12}(\omega^1\frac{\partial}{\partial \omega^1} - \omega^2\frac{\partial}{\partial \omega^2})+\\ &+\frac{\partial L_2(\omega^1, \omega^2)}{\partial \omega^2}\frac{\partial}{\partial \omega^1} - \frac{\partial L_2(\omega^1, \omega^2)}{\partial \omega^1}\frac{\partial}{\partial \omega^2}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Структура инфинитезимального оператора (2.7) полной группы непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (1.4) такова, что допускает одну конечномерную подалгебру алгебры симметрий. Мы по-прежнему будем называть ее естественной конечномерной подалгеброй алгебры непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (1.4).

Введем следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
&(\varsigma_1\cdot\partial)=3\omega^3\frac{\partial}{\partial\omega^3}+f_1\frac{\partial}{\partial f_1}+f_2\frac{\partial}{\partial f_2}+f_3\frac{\partial}{\partial f_3},\\
&(\varsigma_2\cdot\partial)=\omega^3\frac{\partial}{\partial\omega^3}-\frac{\omega^1}{2}\frac{\partial}{\partial\omega^1}-\frac{\omega^2}{2}\frac{\partial}{\partial\omega^2},\\
&(\varsigma_3\cdot\partial)=\frac{\partial}{\partial\omega^3},\\
&(\varsigma_4\cdot\partial)=\frac{\partial}{\partial f_1},\\
&(\varsigma_5\cdot\partial)=\frac{\partial}{\partial f_2},\\
&(\varsigma_6\cdot\partial)=\frac{\partial}{\partial f_3},\\
&(\varsigma_7\cdot\partial)=f_3\frac{\partial}{\partial f_2}-f_2\frac{\partial}{\partial f_3},\\
&(\varsigma_8\cdot\partial)=f_1\frac{\partial}{\partial f_3}-f_3\frac{\partial}{\partial f_1},\\
&(\varsigma_9\cdot\partial)=f_2\frac{\partial}{\partial f_1}-f_1\frac{\partial}{\partial f_2},\\
&(\varsigma_{10}\cdot\partial)=\frac{\partial}{\partial\omega^1},\\
&(\varsigma_{11}\cdot\partial)=\frac{\partial}{\partial\omega^2},\\
&(\varsigma_{12}\cdot\partial)=\omega^1\frac{\partial}{\partial\omega^1}-\omega^2\frac{\partial}{\partial\omega^2}.
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Можно показать, что $(\varsigma_i\cdot\partial)$ линейно независимы. Поэтому можно ввести линейное пространство, представляющее собой линейную оболочку операторов $(\varsigma_i\cdot\partial)$. Двенадцатимерное линейное пространство с базисом из инфинитезимальных операторов (2.8) наделяется стандартной алгебраической структурой с помощью билинейной операции коммутации операторов (скобка Пуассона операторов). Чтобы доказать, что линейная оболочка операторов (2.8) образует алгебру Ли, необходимо составить таблицу коммутации базисных инфинитезимальных операторов $(\varsigma_i\cdot\partial)$. Таблица коммутации, приведенная ниже, показывает, что инфинитезимальные операторы (2.8) действительно определяют подалгебру алгебры непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (1.4).

Таблица

Таблица коммутации инфинитезимальных операторов (2.8), определяющих естественную конечномерную подалгебру алгебры непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (1.4)

	$(\varsigma_1\cdot\partial)$	$(\varsigma_2\cdot\partial)$	$(\varsigma_3\cdot\partial)$	$(\varsigma_4\cdot\partial)$	$(\varsigma_5\cdot\partial)$	$(\varsigma_6\cdot\partial)$	$(\varsigma_7\cdot\partial)$	$(\varsigma_8\cdot\partial)$	$(\varsigma_9\cdot\partial)$	$(\varsigma_{10}\cdot\partial)$	$(\varsigma_{11}\cdot\partial)$	$(\varsigma_{12}\cdot\partial)$
$(\varsigma_1\cdot\partial)$	0	0	$-3(\varsigma_3\cdot\partial)$	$-(\varsigma_4\cdot\partial)$	$-(\varsigma_5\cdot\partial)$	$-(\varsigma_6\cdot\partial)$	0	0	0	0	0	0
$(\varsigma_2\cdot\partial)$	0	0	$-(\varsigma_3\cdot\partial)$	0	0	0	0	0	0	$1/2(\varsigma_{10}\cdot\partial)$	$1/2(\varsigma_{11}\cdot\partial)$	0
$(\varsigma_3\cdot\partial)$	$3(\varsigma_3\cdot\partial)$	$(\varsigma_3\cdot\partial)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$(\varsigma_4\cdot\partial)$	$(\varsigma_4\cdot\partial)$	0	0	0	0	0	0	$(\varsigma_6\cdot\partial)$	$-(\varsigma_5\cdot\partial)$	0	0	0
$(\varsigma_5\cdot\partial)$	$(\varsigma_5\cdot\partial)$	0	0	0	0	0	$-(\varsigma_6\cdot\partial)$	0	$(\varsigma_4\cdot\partial)$	0	0	0
$(\varsigma_6\cdot\partial)$	$(\varsigma_6\cdot\partial)$	0	0	0	0	0	$(\varsigma_5\cdot\partial)$	$-(\varsigma_4\cdot\partial)$	0			
$(\varsigma_7\cdot\partial)$	0	0	0	0	$(\varsigma_6\cdot\partial)$	$-(\varsigma_5\cdot\partial)$	0	$(\varsigma_9\cdot\partial)$	$-(\varsigma_8\cdot\partial)$	0	0	0
$(\varsigma_8\cdot\partial)$	0	0	0	$-(\varsigma_6\cdot\partial)$	0	$(\varsigma_4\cdot\partial)$	$-(\varsigma_9\cdot\partial)$	0	$(\varsigma_7\cdot\partial)$	0	0	0
$(\varsigma_9\cdot\partial)$	0	0	0	$(\varsigma_5\cdot\partial)$	$-(\varsigma_4\cdot\partial)$	0	$(\varsigma_8\cdot\partial)$	$-(\varsigma_7\cdot\partial)$	0	0	0	0
$(\varsigma_{10}\cdot\partial)$	0	$-1/2(\varsigma_{10}\cdot\partial)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$(\varsigma_{10}\cdot\partial)$
$(\varsigma_{11}\cdot\partial)$	0	$-1/2(\varsigma_{11}\cdot\partial)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-(\varsigma_{11}\cdot\partial)$
$(\varsigma_{12}\cdot\partial)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-(\varsigma_{10}\cdot\partial)$	$(\varsigma_{11}\cdot\partial)$	0

3. Оптимальная система одномерных подалгебр

Построим однопараметрические группы автоморфизмов рассматриваемой алгебры Ли, порождаемые базисными векторами ς_j ($j=\overline{1,12}$). Для каждого базисного вектора ς_j ($j=\overline{1,12}$) имеем соответствующую группу внутренних автоморфизмов, действующую на постоянные C_1, C_2, C_3, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_{10}, C_{11}, C_{12} в разложении общего инфинитезимального оператора (2.7), определяемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений [4, с. 189]:

$$
\begin{array}{l}
1)\ \dot C_1'=0,\quad \dot C_2'=0,\quad \dot C_3'=3C_3',\quad \dot B_1'=B_1',\quad \dot B_2'=B_2',\quad \dot B_3'=B_3',\\
\quad \dot A_1'=0,\quad \dot A_2'=0,\quad \dot A_3'=0,\quad \dot C_{10}'=0,\quad \dot C_{11}'=0,\quad \dot C_{12}'=0;\\
2)\ \dot C_1'=0,\quad \dot C_2'=0,\quad \dot C_3'=C_3',\quad \dot B_1'=0,\quad \dot B_2'=0,\quad \dot B_3'=0,\\
\quad \dot A_1'=0,\quad \dot A_2'=0,\quad \dot A_3'=0,\quad \dot C_{10}'=-\frac12 C_{10}',\quad \dot C_{11}'=-\frac12 C_{11}',\quad \dot C_{12}'=0;\\
3)\ \dot C_1'=0,\quad \dot C_2'=0,\quad \dot C_3'=-3C_1'-C_2',\quad \dot B_1'=0,\quad \dot B_2'=0,\quad \dot B_3'=0,\\
\quad \dot A_1'=0,\quad \dot A_2'=0,\quad \dot A_3'=0,\quad \dot C_{10}'=0,\quad \dot C_{11}'=0,\quad \dot C_{12}'=0;\\
4)\ \dot C_1'=0,\quad \dot C_2'=0,\quad \dot C_3'=0,\quad \dot B_1'=-C_1',\quad \dot B_2'=A_3',\quad \dot B_3'=-A_2',\\
\quad \dot A_1'=0,\quad \dot A_2'=0,\quad \dot A_3'=0,\quad \dot C_{10}'=0,\quad \dot C_{11}'=0,\quad \dot C_{12}'=0;\\
5)\ \dot C_1'=0,\quad \dot C_2'=0,\quad \dot C_3'=0,\quad \dot B_1'=-A_3',\quad \dot B_2'=-C_1',\quad \dot B_3'=A_1',\\
\quad \dot A_1'=0,\quad \dot A_2'=0,\quad \dot A_3'=0,\quad \dot C_{10}'=0,\quad \dot C_{11}'=0,\quad \dot C_{12}'=0;\\
6)\ \dot C_1'=0,\quad \dot C_2'=0,\quad \dot C_3'=0,\quad \dot B_1'=A_2',\quad \dot B_2'=-A_1',\quad \dot B_3'=-C_1',\\
\quad \dot A_1'=0,\quad \dot A_2'=0,\quad \dot A_3'=0,\quad \dot C_{10}'=0,\quad \dot C_{11}'=0,\quad \dot C_{12}'=0;\\
7)\ \dot C_1'=0,\quad \dot C_2'=0,\quad \dot C_3'=0,\quad \dot B_1'=0,\quad \dot B_2'=B_3',\quad \dot B_3'=-B_2',\\
\quad \dot A_1'=0,\quad \dot A_2'=A_3',\quad \dot A_3'=-A_2',\quad \dot C_{10}'=0,\quad \dot C_{11}'=0,\quad \dot C_{12}'=0;\\
8)\ \dot C_1'=0,\quad \dot C_2'=0,\quad \dot C_3'=0,\quad \dot B_1'=-B_3',\quad \dot B_2'=0,\quad \dot B_3'=B_1',\\
\quad \dot A_1'=-A_3',\quad \dot A_2'=0,\quad \dot A_3'=A_1',\quad \dot C_{10}'=0,\quad \dot C_{11}'=0,\quad \dot C_{12}'=0;\\
9)\ \dot C_1'=0,\quad \dot C_2'=0,\quad \dot C_3'=0,\quad \dot B_1'=B_2',\quad \dot B_2'=-B_1',\quad \dot B_3'=0,\\
\quad \dot A_1'=A_2',\quad \dot A_2'=-A_1',\quad \dot A_3'=0,\quad \dot C_{10}'=0,\quad \dot C_{11}'=0,\quad \dot C_{12}'=0;\\
10)\ \dot C_1'=0,\quad \dot C_2'=0,\quad \dot C_3'=0,\quad \dot B_1'=0,\quad \dot B_2'=0,\quad \dot B_3'=0,\\
\quad \dot A_1'=0,\quad \dot A_2'=0,\quad \dot A_3'=0,\quad \dot C_{10}'=\frac12 C_2'-C_{12}',\quad \dot C_{11}'=0,\quad \dot C_{12}'=0;\\
11)\ \dot C_1'=0,\quad \dot C_2'=0,\quad \dot C_3'=0,\quad \dot B_1'=0,\quad \dot B_2'=0,\quad \dot B_3'=0,\\
\quad \dot A_1'=0,\quad \dot A_2'=0,\quad \dot A_3'=0,\quad \dot C_{10}'=0,\quad \dot C_{11}'=\frac12 C_2'+C_{12}',\quad \dot C_{12}'=0;\\
12)\ \dot C_1'=0,\quad \dot C_2'=0,\quad \dot C_3'=0,\quad \dot B_1'=0,\quad \dot B_2'=0,\quad \dot B_3'=0,\\
\quad \dot A_1'=0,\quad \dot A_2'=0,\quad \dot A_3'=0,\quad \dot C_{10}'=C_{10}',\quad \dot C_{11}'=-C_{11}',\quad \dot C_{12}'=0.
\end{array}
\tag{3.1}
$$

Здесь дифференцирование (обозначаемое точкой) производится по параметру τ. Решая каждую из двенадцати выписанных систем с начальными данными

$$
\begin{gathered}
C_1'\big|_{\tau=0}=C_1,\quad C_2'\big|_{\tau=0}=C_2,\quad C_3'\big|_{\tau=0}=C_3,\\
B_1'\big|_{\tau=0}=B_1,\quad B_2'\big|_{\tau=0}=B_2,\quad B_3'\big|_{\tau=0}=B_3,\\
A_1'\big|_{\tau=0}=A_1,\quad A_2'\big|_{\tau=0}=A_2,\quad A_3'\big|_{\tau=0}=A_3,\\
C_{10}'\big|_{\tau=0}=C_{10},\quad C_{11}'\big|_{\tau=0}=C_{11},\quad C_{12}'\big|_{\tau=0}=C_{12},
\end{gathered}
$$

в результате определим, как действуют на постоянные C_1, C_2, C_3, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_{10}, C_{11}, C_{12} в разложении общего инфинитезимального оператора (2.7) однопараметрические группы автоморфизмов, соответствующие базисным касательным векторным полям ς_j $(j = \overline{1,12})$:

$$
\begin{array}{l}
1)\ C_1' = C_1,\ C_2' = C_2,\ C_3' = C_3e^{3\tau},\ B_1' = B_1e^{\tau},\ B_2' = B_2e^{\tau},\ B_3' = B_3e^{\tau},\\
\quad A_1' = A_1,\ A_2' = A_2,\ A_3' = A_3,\ C_{10}' = C_{10},\ C_{11}' = C_{11},\ C_{12}' = C_{12};\\
2)\ C_1' = C_1,\ C_2' = C_2,\ C_3' = C_3e^{\tau},\ B_1' = B_1,\ B_2' = B_2,\ B_3' = B_3,\\
\quad A_1' = A_1,\ A_2' = A_2,\ A_3' = A_3,\ C_{10}' = C_{10}e^{-\tau/2},\ C_{11}' = C_{11}e^{-\tau/2},\\
\quad C_{12}' = C_{12};\\
3)\ C_1' = C_1,\ C_2' = C_2,\ C_3' = C_3 - 3\tau C_1 - \tau C_2,\ B_1' = B_1,\ B_2' = B_2,\\
\quad B_3' = B_3,\ A_1' = A_1,\ A_2' = A_2,\ A_3' = A_3,\ C_{10}' = C_{10},\ C_{11}' = C_{11},\\
\quad C_{12}' = C_{12};\\
4)\ C_1' = C_1,\ C_2' = C_2,\ C_3' = C_3,\ B_1' = B_1 - \tau C_1,\ B_2' = B_2 + \tau A_3,\\
\quad B_3' = B_3 - \tau A_2,\ A_1' = A_1,\ A_2' = A_2,\ A_3' = A_3,\ C_{10}' = C_{10},\\
\quad C_{11}' = C_{11},\ C_{12}' = C_{12};\\
5)\ C_1' = C_1,\ C_2' = C_2,\ C_3' = C_3,\ B_1' = B_1 - \tau A_3,\ B_2' = B_2 - \tau C_1,\\
\quad B_3' = B_3 + \tau A_1,\ A_1' = A_1,\ A_2' = A_2,\ A_3' = A_3,\ C_{10}' = C_{10},\\
\quad C_{11}' = C_{11},\ C_{12}' = C_{12};\\
6)\ C_1' = C_1,\ C_2' = C_2,\ C_3' = C_3,\ B_1' = B_1 + \tau A_2,\ B_2' = B_2 - \tau A_1,\\
\quad B_3' = B_3 - \tau C_1,\ A_1' = A_1,\ A_2' = A_2,\ A_3' = A_3,\ C_{10}' = C_{10},\\
\quad C_{11}' = C_{11},\ C_{12}' = C_{12};\\
7)\ C_1' = C_1,\ C_2' = C_2,\ C_3' = C_3,\ B_1' = B_1,\ B_2' = B_2\cos(\tau) + B_3\sin(\tau),\\
\quad B_3' = B_3\cos(\tau) - B_2\sin(\tau),\ A_1' = A_1,\ A_2' = A_2\cos(\tau) + A_3\sin(\tau),\\
\quad A_3' = A_3\cos(\tau) - A_2\sin(\tau),\ C_{10}' = C_{10},\ C_{11}' = C_{11},\ C_{12}' = C_{12};\\
8)\ C_1' = C_1,\ C_2' = C_2,\ C_3' = C_3,\ B_1' = B_1\cos(\tau) - B_3\sin(\tau),\ B_2' = B_2,\\
\quad B_3' = B_3\cos(\tau) + B_1\sin(\tau),\ A_1' = A_1\cos(\tau) - A_3\sin(\tau),\\
\quad A_2' = A_2,\ A_3' = A_3\cos(\tau) + A_1\sin(\tau),\ C_{10}' = C_{10},\ C_{11}' = C_{11},\ C_{12}' = C_{12};\\
9)\ C_1' = C_1,\ C_2' = C_2,\ C_3' = C_3,\ B_1' = B_1\cos(\tau) + B_2\sin(\tau),\\
\quad B_2' = B_2\cos(\tau) - B_1\sin(\tau),\ B_3' = B_3,\ A_1' = A_1\cos(\tau) + A_2\sin(\tau),\\
\quad A_2' = A_2\cos(\tau) - A_1\sin(\tau),\ A_3' = A_3,\ C_{10}' = C_{10},\ C_{11}' = C_{11},\ C_{12}' = C_{12};\\
10)\ C_1' = C_1,\ C_2' = C_2,\ C_3' = C_3,\ B_1' = B_1,\ B_2' = B_2,\ B_3' = B_3,\\
\quad A_1' = A_1,\ A_2' = A_2,\ A_3' = A_3,\ C_{10}' = C_{10} + \frac{1}{2}\tau C_2 - \tau C_{12},\ C_{11}' = C_{11},\\
\quad C_{12}' = C_{12};\\
11)\ C_1' = C_1,\ C_2' = C_2,\ C_3' = C_3,\ B_1' = B_1,\ B_2' = B_2,\ B_3' = B_3,\\
\quad A_1' = A_1,\ A_2' = A_2,\ A_3' = A_3,\ C_{10}' = C_{10},\ C_{11}' = C_{11} + \frac{1}{2}\tau C_2 + \tau C_{12},\\
\quad C_{12}' = C_{12};\\
12)\ C_1' = C_1,\ C_2' = C_2,\ C_3' = C_3,\ B_1' = B_1,\ B_2' = B_2,\ B_3' = B_3,\\
\quad A_1' = A_1,\ A_2' = A_2,\ A_3' = A_3,\ C_{10}' = C_{10}e^{\tau},\ C_{11}' = C_{11}e^{-\tau},\ C_{12}' = C_{12}.
\end{array}
\tag{3.2}
$$

Построение оптимальной системы одномерных подалгебр естественной конечномерной подалгебры алгебры непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (1.4) мы осуществим с помощью "наивного" подхода, состоящего в том, что "конечномерная" часть общего инфинитезимального оператора (2.7) (точнее коэффициенты C_1, C_2, C_3, A_1, A_2, A_3, B_1,

B_2, B_3, C_{10}, C_{11}, C_{12}) подвергается различным преобразованиям из списка (1)–(12) так, чтобы "упростить" его настолько, насколько это представляется возможным (в частности, стремясь привести к нулевому значению как можно больше из указанных девяти постоянных). Далее мы выбираем из каждого класса инфинитезимальных операторов, переводящихся друг в друга автоморфизмами (1)–(12), по одному простейшему представителю и формируем оптимальную систему одномерных подалгебр Θ_1 естественной конечномерной подалгебры алгебры непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений в частных производных (1.4).

При поиске указанных простейших представителей, кроме однопараметрических групп автоморфизмов, будем применять также преобразование, заключающееся в умножении простейшего инфинитезимального оператора на некоторую постоянную (так называемое преобразование умножения).

Рассмотрим, как изменяются коэффициенты C_1, C_2, C_3, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_{10}, C_{11}, C_{12} в представлении "конечномерной" части общего инфинитезимального оператора (2.7) группы симметрий системы уравнений (1.4) при применении к ним однопараметрических групп автоморфизмов из приведенного выше списка (1)–(12).

Рассмотрим A_i и B_i как компоненты векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в трехмерном пространстве x_1, x_2, x_3. Тогда автоморфизмы (7), (8), (9) представляют собой повороты их как жесткого целого на различные углы τ вокруг осей x_1, x_2, x_3.

Если вектор $\mathbf{A}$ ненулевой (т.е. хотя бы одна из его компонент A_i не равна нулю), то такими поворотами можно перевести вектор $\mathbf{A}$ в положение, когда он будет коллинеарен оси x_1. Ясно, что тогда $A_2 = A_3 = 0$, $A_1 \neq 0$. При этом, если вектор $\mathbf{B}$ не равен нулю (т.е. хотя бы одна из его компонент B_i отлична от нуля), то поворотом вокруг оси x_1 вектор $\mathbf{B}$ можно преобразовать так, чтобы его проекция на ось x_3 (компонента B_3) была бы равна нулю ($B_3 = 0$). Применяя последовательно автоморфизмы (5), (6) при значениях τ, равных соответственно $\dfrac{B_2C_1}{C_1^2 + A_1^2}$ и $\dfrac{B_2A_1}{C_1^2 + A_1^2}$, можно добиться того, чтобы коэффициент B_2 стал нулевым, не изменяя при этом нулевого значения B_3.

Если вектор $\mathbf{A}$ равен нулю (т.е. $A_1 = A_2 = A_3 = 0$), то поворотами (7), (8), (9) вектор $\mathbf{B}$ заведомо может быть переведен в такое положение, когда он будет коллинеарен оси x_1, и поэтому снова получаем $B_2 = B_3 = 0$.

Таким образом, при любых обстоятельствах можно добиться того, чтобы выполнялись равенства $A_2 = A_3 = 0$ и $B_2 = B_3 = 0$.

Следует отметить, что если $C_1 \neq 0$, то, применяя автоморфизм (4) при τ, равном $\dfrac{B_1}{C_1}$, удается привести к нулевому значению B_1.

Дальнейшие рассуждения удобнее всего разбить на четыре этапа.

I. Будем считать до простейшего представителя (3.14), что выполняется условие $C_2 \pm 2C_{12} \neq 0$. Если C_2, C_{12} выбираются так, что $C_2 \pm 2C_{12} \neq 0$, то, применяя автоморфизмы (10) и (11) при τ, соответственно равном $\dfrac{2C_{10}}{2C_{12}-C_2}$ и $\dfrac{-2C_{11}}{2C_{12}+C_2}$, можно привести к нулевому значению C_{10} и C_{11}.

Если C_1, C_2 выбираются так, что $3C_1+C_2 \neq 0$, то, применяя автоморфизм (3) при τ, равном $\dfrac{C_3}{3C_1+C_2}$, можно привести к нулевому значению C_3; применяя затем преобразование умножения, приводим C_1 к единице и, таким образом, получаем множество простейших представителей вида:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) + D_1(\varsigma_2 \cdot \partial) + D_2(\varsigma_7 \cdot \partial) + D_3(\varsigma_{12} \cdot \partial). \tag{3.3}$$

где D_1, D_2, D_3 — произвольные постоянные.

Если $C_1 = 0$, то коэффициент B_1 привести к нулевому значению не удается. Если, кроме того, $C_2 \neq 0$ и $B_1 \neq 0$, то, применяя автоморфизм (1) при τ, равном $\ln|C_2/B_1|$, добиваемся того, чтобы C_2 и B_1 стали равными по абсолютной величине. В результате получаем простейших представителей вида:

$$(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) + D_1(\varsigma_7 \cdot \partial) + D_2(\varsigma_{12} \cdot \partial). \tag{3.4}$$

Если $C_1 = 0$ и $B_1 = 0$, то получаем следующих простейших представителей:

$$(\varsigma_2 \cdot \partial) + D_1(\varsigma_7 \cdot \partial) + D_2(\varsigma_{12} \cdot \partial). \tag{3.5}$$

Если $3C_1 + C_2 = 0$, то коэффициент C_3 сделать нулевым не удается. Если, кроме того, $C_1 \neq 0$, то, применяя автоморфизм (2) при τ, равном $\ln|C_1/C_3|$, приводим C_1 и C_3 к значениям, равным по модулю, и, следовательно, получаем множество простейших представителей вида:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) - 3(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_3 \cdot \partial) + D_1(\varsigma_7 \cdot \partial) + D_2(\varsigma_{12} \cdot \partial). \tag{3.6}$$

В случае, когда $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$, находим, что C_3 и B_1 могут не быть равными нулю. Если при этом $C_3 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$, то, применяя автоморфизм (1) при τ, равном $\ln|A_1/B_1|$, убеждаемся, что A_1 и B_1 приводятся к равным по модулю значениям, и, применяя после этого автоморфизм (2) при τ, равном $\ln|A_1/C_3|$, приводим к равным абсолютным значениям величины A_1 и C_3. В итоге получаем простейших представителей

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) + D(\varsigma_{12} \cdot \partial). \tag{3.7}$$

Здесь D — произвольная постоянная.

В случае, когда один из коэффициентов C_3, B_1 равен нулю, получаем представителей

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) + D(\varsigma_{12} \cdot \partial), \tag{3.8}$$

$$(\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) + D(\varsigma_{12} \cdot \partial). \tag{3.9}$$

В случае, когда A_1 равен нулю, применяя автоморфизм (1) при τ, равном $\ln|C_{12}/B_1|$, убеждаемся, что C_{12} и B_1 приводятся к равным по модулю значениям, и, применяя после этого автоморфизм (2) при τ, равном $\ln|C_{12}/C_3|$, приводим к равным абсолютным значениям величины C_{12} и C_3. В результате получаем представителей

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{12} \cdot \partial). \tag{3.10}$$

Если два или все три коэффициента из C_3, B_1, A_1 равны нулю, то получаем представителей

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{12} \cdot \partial), \tag{3.11}$$

$$(\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{12} \cdot \partial), \tag{3.12}$$

$$(\varsigma_7 \cdot \partial) + D(\varsigma_{12} \cdot \partial), \tag{3.13}$$

$$(\varsigma_{12} \cdot \partial). \tag{3.14}$$

II. Если C_2, C_{12} выбираются так, что $C_2 - 2C_{12} = 0$, но $C_2 + 2C_{12} \neq 0$ (т.е. $C_2 = 2C_{12} \neq 0$), то коэффициент C_{10} сделать нулевым не удается. Считаем $C_{10} \neq 0$. Применяя автоморфизм (11) при τ, равном $\dfrac{-2C_{11}}{2C_{12} + C_2}$, можно привести к нулевому значению C_{11}.

Если $C_1 \neq 0$ и $3C_1 + C_2 \neq 0$, то, применяя автоморфизмы (4) и (3) при τ, соответственно равном $\dfrac{B_1}{C_1}$ и $\dfrac{C_3}{3C_1 + C_2}$, можно привести к нулевому значению B_1 и C_3. Так как $C_{10} \neq 0$, то, применяя автоморфизм (12) при τ, равном $\ln|C_1/C_{10}|$, убеждаемся, что C_1 и C_{10} приводятся к равным по модулю значениям; применяя затем преобразование умножения, приводим коэффициент C_1 к значению, равному единице, и, таким образом, получаем множество простейших представителей вида:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) + D_1((\varsigma_2 \cdot \partial) + \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial)) + D_2(\varsigma_7 \cdot \partial). \tag{3.15}$$

Если $C_1 = 0$, то коэффициент B_1 привести к нулевому значению не удается. Применяя автоморфизм (12) при τ, равном $\ln|C_2/C_{10}|$, убеждаемся, что C_2 и C_{10} приводятся к равным по модулю значениям. Если $B_1 \neq 0$, то, применяя автоморфизм (1) при τ, равном $\ln|C_2/B_1|$, добиваемся того, чтобы C_2 и B_1 стали равными по абсолютной величине. В результате получаем простейших представителей вида:

$$(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) + \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial). \tag{3.16}$$

Если $C_1 = 0$ и $B_1 = 0$, то получаем следующих простейших представителей:

$$(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) + \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial). \tag{3.17}$$

Если $3C_1 + C_2 = 0$, то коэффициент C_3 сделать нулевым не удается. Если, кроме того, $C_1 \neq 0$, то, применяя автоморфизмы (2) и (12) при τ, равном соответственно $\ln|C_1/C_3|$ и $\ln|C_1/C_{10}|$, приводим C_1, C_3 и C_{10} к значениям, равным по модулю, и, следовательно, получаем множество простейших представителей вида:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) - 3(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) - \frac{3}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial). \qquad (3.18)$$

III. Если C_2, C_{12} выбираются так, что $C_2 + 2C_{12} = 0$, но $C_2 - 2C_{12} \neq 0$ (т.е. $C_2 = -2C_{12} \neq 0$), то коэффициент C_{11} сделать нулевым не удается. Полагаем, что $C_{11} \neq 0$. Применяя автоморфизм (10) при τ, равном $\dfrac{2C_{10}}{2C_{12} - C_2}$, можно привести к нулевому значению коэффициент C_{10}.

Если $C_1 \neq 0$ и $3C_1 + C_2 \neq 0$, то, применяя автоморфизмы (4) и (3) при τ, соответственно равном $\dfrac{B_1}{C_1}$ и $\dfrac{C_3}{3C_1 + C_2}$, можно привести к нулевому значению B_1 и C_3. Так как $C_{11} \neq 0$, то, применяя автоморфизм (12) при τ, равном $-\ln|C_1/C_{11}|$, убеждаемся, что C_1 и C_{11} приводятся к равным по модулю значениям; применяя затем преобразование умножения, приводим C_1 к единице и, таким образом, получаем множество простейших представителей вида:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial) + D_1((\varsigma_2 \cdot \partial) - \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial)) + D_2(\varsigma_7 \cdot \partial). \qquad (3.19)$$

Если $C_1 = 0$, то коэффициент B_1 привести к нулевому значению не удается. Кроме того, применяя автоморфизм (12) при τ, равном $-\ln|C_2/C_{11}|$, убеждаемся, что C_2 и C_{11} приводятся к равным по модулю значениям.

Если $B_1 \neq 0$, то, применяя автоморфизм (1) при τ, равном $\ln|C_2/B_1|$, добиваемся того, чтобы C_2 и B_1 стали равными по абсолютной величине. В результате получаем простейших представителей вида:

$$(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial) - \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial). \qquad (3.20)$$

Если $C_1 = 0$ и $B_1 = 0$, то получаем следующих простейших представителей:

$$(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial) - \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial). \qquad (3.21)$$

Если $3C_1 + C_2 = 0$, то коэффициент C_3 сделать нулевым не удается. Если, кроме того, $C_1 \neq 0$, то, применяя автоморфизмы (2) и (12) при τ, равном соответственно $\ln|C_1/C_3|$ и $-\ln|C_1/C_{11}|$, приводим C_1, C_3 и C_{11} к значениям, равным по модулю, и, следовательно, получаем множество простейших представителей вида:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) - 3(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial) + \frac{3}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial). \qquad (3.22)$$

IV. В случае, когда $C_2 = 0$ и $C_{12} = 0$, находим, что C_{10} и C_{11} могут не быть равными нулю. Если $C_{10} \neq 0$ и $C_{11} \neq 0$, то, применяя автоморфизм (12) при τ, равном $\dfrac{1}{2}\ln|C_{11}/C_{10}|$, убеждаемся, что C_{10} и C_{11} приводятся к равным по модулю значениям.

Если $C_1 \neq 0$, то, применяя автоморфизмы (4) и (3) при τ, соответственно равном $\dfrac{B_1}{C_1}$ и $\dfrac{C_3}{3C_1}$, удается привести к нулевому значению B_1 и C_3. Действуя автоморфизмом (2) при τ, равном $-2\ln|C_1/C_{10}|$, убеждаемся, что C_1 и C_{10} приводятся к равным по модулю значениям; применяя затем преобразование умножения, приводим C_1 к единице и, таким образом, получаем множество простейших представителей вида:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial). \tag{3.23}$$

Далее будем считать, что $C_1 = 0$. Если при этом $C_3 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$, то, применяя автоморфизм (1) при τ, равном $\ln|A_1/B_1|$, убеждаемся, что A_1 и B_1 приводятся к равным по модулю значениям, и, применяя после этого автоморфизм (2) при τ, равном $\ln|A_1/C_3|$, приводим к равным абсолютным значениям величины A_1 и C_3. В итоге получаем простейшего представителя

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) + D((\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial)). \tag{3.24}$$

В случае, когда $B_1 = 0$, применяя автоморфизм (2) при τ, равном $-2\ln|A_1/C_{10}|$, убеждаемся, что A_1 и C_{10} приводятся к равным по модулю значениям, и, применяя после этого автоморфизм (1) при τ, равном $\ln|A_1/C_3|/3$, приводим к равным абсолютным значениям величины A_1 и C_3. В итоге получаем простейшего представителя

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial). \tag{3.25}$$

В случае, когда $C_3 = 0$, применяя автоморфизм (1) при τ, равном $\ln|A_1/B_1|$, убеждаемся, что A_1 и B_1 приводятся к равным по модулю значениям, и, применяя после этого автоморфизм (2) при τ, равном $-2\ln|A_1/C_{10}|$, приводим к равным абсолютным значениям величины A_1 и C_{10}. В итоге получаем простейшего представителя

$$(\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial). \tag{3.26}$$

В случае, когда $A_1 = 0$, применяя автоморфизм (1) при τ, равном $\ln|1/B_1|/3$, приравниваем $B_1 = 1$, и, применяя после этого автоморфизм (2) при τ, равном $\ln|1/C_3|$, приравниваем $C_3 = 1$. (Применяя автоморфизмы (1) и (2) при τ, связанных равенством $\tau_{(2)} = -2\tau_{(1)}$, получим преобразование, по своему действию совпадающее с преобразованием умножения, т.е. преобразования (1), (2) и преобразование умножения не являются независимыми). В итоге получаем простейшего представителя

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) + D((\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial)). \tag{3.27}$$

Если два или все три коэффициента из C_3, B_1, A_1 равны нулю, то получаем представителей

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \tag{3.28}$$

$$(\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \tag{3.29}$$

$$(\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \tag{3.30}$$

$$(\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial). \tag{3.31}$$

Если $C_{11} = 0$, то при $C_1 \neq 0$ получаем выражение, совпадающее с (3.15) при $D_1 = 0$. В случае $C_1 = 0$, действуя далее так же, как и при получении простейших представителей (3.24)–(3.31), получим простейших представителей

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \tag{3.32}$$

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \tag{3.33}$$

$$(\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \tag{3.34}$$

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) + D(\varsigma_{10} \cdot \partial), \tag{3.35}$$

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \tag{3.36}$$

$$(\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \tag{3.37}$$

$$(\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \tag{3.38}$$

$$(\varsigma_{10} \cdot \partial). \tag{3.39}$$

Если $C_{10} = 0$, то при $C_1 \neq 0$ получаем выражение, совпадающее с (3.19) при $D_1 = 0$. В случае $C_1 = 0$, действуя далее так же, как и при получении простейших представителей (3.24)–(3.31), получим простейших представителей

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \tag{3.40}$$

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \tag{3.41}$$

$$(\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \tag{3.42}$$

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) + D(\varsigma_{11} \cdot \partial), \tag{3.43}$$

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \tag{3.44}$$

$$(\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \tag{3.45}$$

$$(\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \tag{3.46}$$

$$(\varsigma_{11} \cdot \partial). \tag{3.47}$$

Если $C_{10} = 0$ и $C_{11} = 0$, то получаем простейших представителей, совпадающих с (3.3) при $D_1 = 0$ и $D_3 = 0$, и с (3.7), (3.8), (3.9), (3.13) при $D = 0$. Остаются простейшие представители

$$(\varsigma_3 \cdot \partial), \tag{3.48}$$

$$(\varsigma_4 \cdot \partial). \tag{3.49}$$

Перечисленные выше инфинитезимальные операторы образуют оптимальную систему Θ_1 одномерных подалгебр естественной конечномерной подалгебры алгебры непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (1.4). Для удобства полный список элементов, составляющих систему Θ_1, приводится в прил. 1. В приложении 2 дано наглядное представление алгоритма построения оптимальной системы Θ_1.

Построенная оптимальная система одномерных подалгебр естественной конечномерной подалгебры алгебры симметрий системы дифференциальных уравнений (1.4) насчитывает один трехпараметрический элемент, 9 двухпараметрических, 49 однопараметрических элементов и 87 индивидуальных элементов. В этом списке знаки не согласованы и могут быть выбраны независимо. В каждом элементе списка один из базисных операторов $(\varsigma_j \cdot \partial)$ может быть замещен своим коллинеарным аналогом. При построении списка не учтены дискретные симметрии системы дифференциальных уравнений (1.4).

Оптимальная система Θ_1 используется для редукции системы дифференциальных уравнений в частных производных (1.4) к системам, содержащим лишь две независимых переменных, которые, в свою очередь, могут быть подвергнуты групповому анализу также с целью их дальнейшей редукции к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Ясно, что этот процесс является достаточно трудоемким, но, при очевидном отсутствии альтернативы, единственным имеющимся в распоряжении средством развития теории пространственной задачи теории пластичности.

Свойства симметрии чрезвычайно важны при анализе нелинейных математических моделей и здесь теоретико-групповые методы (теория групп и алгебр Ли) играют главенствующую роль. В этом плане, несмотря на то, что теория симметрий систем дифференциальных уравнений в частных производных была создана более ста лет тому назад, в математической теории пластичности в настоящее время наблюдается заметный пробел, который должен быть восполнен. Более или менее систематическое изложение основ теории вариационных симметрий и вывод с их помощью основных соотношений механики деформируемого твердого тела имеется в работе [5]. Следуя по этому пути, возможно, можно будет найти новые точные решения пространственных соотношений теории пластичности. Как свидетельствует проведенный анализ, трехмерные уравнения Д.Д. Ивлева обладают высокой степенью симметрии, что оставляет надежду получить ряд новых точных решений, описывающих трехмерное напряженное состояние жесткопластических тел при условии полной пластичности.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ОПТИМАЛЬНАЯ СИСТЕМА Θ_1

1) $(\varsigma_1\cdot\partial)+D_1(\varsigma_2\cdot\partial)+D_2(\varsigma_7\cdot\partial)+D_3(\varsigma_{12}\cdot\partial)$,
2) $(\varsigma_2\cdot\partial)\pm(\varsigma_4\cdot\partial)+D_1(\varsigma_7\cdot\partial)+D_2(\varsigma_{12}\cdot\partial)$,
3) $(\varsigma_2\cdot\partial)+D_1(\varsigma_7\cdot\partial)+D_2(\varsigma_{12}\cdot\partial)$,
4) $(\varsigma_1\cdot\partial)-3(\varsigma_2\cdot\partial)\pm(\varsigma_3\cdot\partial)+D_1(\varsigma_7\cdot\partial))+D_2(\varsigma_{12}\cdot\partial)$,
5) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial)+D(\varsigma_{12}\cdot\partial)$, $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial)+D(\varsigma_{12}\cdot\partial)$,
6) $(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial)+D(\varsigma_{12}\cdot\partial)$, $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_{12}\cdot\partial)$,
7) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_{12}\cdot\partial)$, $(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_{12}\cdot\partial)$, $(\varsigma_7\cdot\partial)+D(\varsigma_{12}\cdot\partial)$, $(\varsigma_{12}\cdot\partial)$,
8) $(\varsigma_1\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)+D_1((\varsigma_2\cdot\partial)+\frac{1}{2}(\varsigma_{12}\cdot\partial))+D_2(\varsigma_7\cdot\partial)$,
9) $(\varsigma_2\cdot\partial)\pm(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)+\frac{1}{2}(\varsigma_{12}\cdot\partial)+D(\varsigma_7\cdot\partial)$,
10) $(\varsigma_2\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)+\frac{1}{2}(\varsigma_{12}\cdot\partial)+D(\varsigma_7\cdot\partial)$,
11) $(\varsigma_1\cdot\partial)-3(\varsigma_2\cdot\partial)\pm(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)-\frac{3}{2}(\varsigma_{12}\cdot\partial)+D(\varsigma_7\cdot\partial))$,
12) $(\varsigma_1\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)+D_1((\varsigma_2\cdot\partial)-\frac{1}{2}(\varsigma_{12}\cdot\partial))+D_2(\varsigma_7\cdot\partial)$,
13) $(\varsigma_2\cdot\partial)\pm(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)-\frac{1}{2}(\varsigma_{12}\cdot\partial)+D(\varsigma_7\cdot\partial)$,
14) $(\varsigma_2\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)-\frac{1}{2}(\varsigma_{12}\cdot\partial)+D(\varsigma_7\cdot\partial)$,
15) $(\varsigma_1\cdot\partial)-3(\varsigma_2\cdot\partial)\pm(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)+\frac{3}{2}(\varsigma_{12}\cdot\partial)+D(\varsigma_7\cdot\partial))$,
16) $(\varsigma_1\cdot\partial)+D(\varsigma_7\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$,
17) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial)+D((\varsigma_{10}\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial))$,
18) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$,
19) $(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$,
20) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_4\cdot\partial)+D((\varsigma_{10}\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial))$,
21) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$,
22) $(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$,
23) $(\varsigma_7\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$,
24) $(\varsigma_{10}\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$,
25) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)$,
26) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)$,
27) $(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)$,
28) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_4\cdot\partial)+D(\varsigma_{10}\cdot\partial)$,
29) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)$, $(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)$, $(\varsigma_7\cdot\partial)\pm(\varsigma_{10}\cdot\partial)$, $(\varsigma_{10}\cdot\partial)$,
30) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$,
31) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$,
32) $(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$,
33) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_4\cdot\partial)+D(\varsigma_{11}\cdot\partial)$,
34) $(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$, $(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$, $(\varsigma_7\cdot\partial)\pm(\varsigma_{11}\cdot\partial)$, $(\varsigma_{11}\cdot\partial)$,
35) $(\varsigma_3\cdot\partial)$, $(\varsigma_4\cdot\partial)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ Θ_1

- 1-7: $C_2 \pm 2C_{12} \neq 0$, при этом коэффициенты C_{10}, C_{11} приводятся к нулю
  - 1-4: $C_1 \neq 0$ или $C_2 \neq 0$
    - 1-3: $3C_1 + C_2 \neq 0$, при этом коэффициент C_3 приводится к нулю
      - 1: $C_1 \neq 0$, при этом коэффициент B_1 приводится к нулю
      - 2-3: $C_1 = 0$
        - 2: $B_1 \neq 0$
        - 3: $B_1 = 0$
    - 4: $3C_1 + C_2 = 0$
  - 5-7: $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$
    - 5-6: ни один или лишь один из коэффициентов C_3, B_1, A_1 равен нулю
    - 7: два или три из коэффициентов C_3, B_1, A_1 равны нулю;
- 8-11: $C_2 - 2C_{12} = 0$, $C_2 + 2C_{12} \neq 0$, при этом C_{11} приводится к нулю
  - 8-10: $3C_1 + C_2 \neq 0$, при этом коэффициент C_3 приводится к нулю
    - 8: $C_1 \neq 0$, при этом коэффициент B_1 приводится к нулю
    - 9-10: $C_1 = 0$
      - 9: $B_1 \neq 0$
      - 10: $B_1 = 0$
  - 11: $3C_1 + C_2 = 0$;
- 12-15: $C_2 + 2C_{12} = 0$, $C_2 - 2C_{12} \neq 0$, при этом C_{10} приводится к нулю
  - 12-14: $3C_1 + C_2 \neq 0$, при этом коэффициент C_3 приводится к нулю
    - 12: $C_1 \neq 0$, при этом коэффициент B_1 приводится к нулю
    - 13-14: $C_1 = 0$
      - 13: $B_1 \neq 0$
      - 14: $B_1 = 0$
  - 15: $3C_1 + C_2 = 0$;
- 16-35: $C_2 = 0$, $C_{12} = 0$
  - 16: $C_1 \neq 0$
  - 17-35: $C_1 = 0$
    - 17-24: $C_{10} \neq 0$, $C_{11} \neq 0$
      - 17: ни один из коэффициентов C_3, B_1, A_1 не равен нулю
      - 18-20: лишь один из коэффициентов C_3, B_1, A_1 равен нулю
      - 21-23: ровно два из коэффициентов C_3, B_1, A_1 равны нулю
      - 24: все три коэффициента C_3, B_1, A_1 равны нулю
    - 25-29: $C_{10} \neq 0$, $C_{11} = 0$
      - 25: ни один из коэффициентов C_3, B_1, A_1 не равен нулю
      - 26-28: лишь один из коэффициентов C_3, B_1, A_1 равен нулю
      - 29: два или три из коэффициентов C_3, B_1, A_1 равны нулю
    - 30-34: $C_{11} \neq 0$, $C_{10} = 0$
      - 30: ни один из коэффициентов C_3, B_1, A_1 не равен нулю
      - 31-33: лишь один из коэффициентов C_3, B_1, A_1 равен нулю
      - 34: два или три из коэффициентов C_3, B_1, A_1 равны нулю
    - 35: $C_{10} = 0$, $C_{11} = 0$.

Номера соответствуют строкам в списке элементов оптимальной системы Θ_1.

Литература

[1] Радаев Ю.Н., Гудков В.А., Бахарева Ю.Н. Группы симметрий и алгебра симметрий трехмерных уравнений математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2005. №2(36). С. 106–124.

[2] Радаев Ю.Н. О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1990. №1. С. 86–94.

[3] Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2004. 147 с.

[4] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

[5] Радаев Ю.Н., Лычев С.А. Нелинейная теория упругости как физическая теория поля. Самара: Изд-во Универс-групп, 2005. 60 с.

Поступила в редакцию $2/IX/2005$;
в окончательном варианте — $2/IX/2005$.

ON A NATURAL SUBALGEBRA OF THE LIE ALGEBRA OF THREE-DIMENSIONAL EQUATIONS OF THE MATHEMATICAL PLASTICITY

© 2005 Y.N. Radayev, V.A. Gudkov[3]

Group analysis of the system of partial differential equations of three-dimensional plastic equilibrium is given. The Tresca yielding criterion is employed to formulate the involved system. Stress state is presumed correspond to an edge of the Tresca prism thus allowing formally consider the static equations independently on the flow rule. The system of static equilibrium equations is represented in the stress principal lines co-ordinate net (isostatic net). The symmetry group of this system is obtained. The Lie algebra and a first order optimal system of subalgebras of the symmetry group of partial differential equations of the three-dimensional mathematical theory of plasticity are studied. The optimal system which consists of 1 three-parametric, 9 two-parametric, 49 one-parametric and 87 individual elements is obtained.

Paper received 2/*IX*/2005.
Paper accepted 2/*IX*/2005.

[3]Radayev Yuri Nickolaevich (`radayev@ssu.samara.ru`), Gudkov Vasilij Alexandrovich (`goodkov@ssu.samara.ru`), Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.