УДК 539.374

МИР ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ И МИР ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ

© 2005 Д.Д. Ивлев[1]

Физика металлов
Металлы, они как бы живые ...

Н.Д. Кузнецов

На самом деле, по видимому, каждый металл, каждое состояние любого из металлов следует своему особому закону.

Д. Драккер

По мере того как я старею, я упрощаю мою науку, мою религию. Книги значат меньше для меня, молитвы значат меньше для меня, лекарства значат меньше для меня, но мир, дружба, любовь, жизнь, полная полезности, значат для меня больше, определенно больше.

Сайлс Хаббард

Краткое жизнеописание

Жизнь металла в основном проходит под действием нагрузки. Если подумать, то что тут особенного, так и надо, и, конечно, действительно, ничего особенного, так и надо. Но если вникнуть в проблему поглубже, то окажется, что она, эта жизнь, не менее драматична и многострадальна, чем наша.

Металл (металлическая конструкция) "живет", пока он способен выдерживать возрастающие нагрузки, и "жизнь" покидает его, когда возможность сопротивления, запас прочности исчерпан, точно так же, когда исчезает возможность сопротивляться накатывающимся волнам бытия.

[1]Ивлев Дюис Данилович, кафедра математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева, 428000, Россия, Чебоксары, ул. Карла Маркса, 38.

Молодость, как всегда, безоблачна. Вначале металл ведет себя как упругое тело. Сброс нагрузки, разгрузка приводят металл в исходное состояние, никаких остаточных явлений, словом, без последствий.

Со "временем", с ростом нагрузки, достигается предел пластичности, появляются остаточные деформации, время берет свое. За пределом пластичности у многих металлов наступает период упрочнения, обнаруживается, что предел пластичности повышается, металл ведет себя более упруго при больших нагрузках, чем раньше, хотя и остаточных деформаций уже больше, чем может быть нужно, но, если их не принимать во внимание, кажется, что "здоровья" стало побольше. Но ничто не проходит бесследно. Это увеличение "выносливости" носит "профессиональный", направленный характер. Повышение предела пластичности в одном направлении снижает его в противоположном, металл становится анизотропным (эффект Баушингера), словом, время не обманешь, молодости не вернуть. А дальше то, о чем было сказано, — нагрузки растут, наступает момент, когда способность к сопротивлению выходит на предел, несущая способность исчерпана, конструкция разрушается, и будем считать, что повезло, если все это не сопровождается катастрофой.

Статически определимые и неопределимые состояния

Итак, слово "жить" мы отнесли к той поре металла (металлической конструкции), когда металл способен выдерживать приращение нагрузок. "Жизнь" покидает металл (конструкцию), когда он выходит на предел возможности сопротивляться нагрузкам.

Рассмотрим металлический стержень под растягивающей нагрузкой. Обозначим нагрузку через P, поперечное сечение стержня — S, напряжение $\sigma = P/S$ (рис. 1).

Диаграмма $\sigma - \varepsilon$ (напряжение–деформация) представлена на рис. 2, материал ведет себя как идеально-пластический, хотя можно предположить, что при достижении предела пластичности (текучести) $\sigma = \sigma_S$ наступает разрушение. В данном случае металл "живет" в пределах $\sigma < \sigma_S$, и "жизнь" покидает его при $\sigma = \sigma_S$.

Обычно считают, что стержень, находящийся под действием растягивающей нагрузки (рис. 1), находится в статически определимом состоянии. Собственно оно так и есть: однородный стержень равномерно деформируется, и напряжения σ одинаковы по сечению. Реальное равномерное напряженное состояние однородного стержня обуславливается кинематикой деформирования: равномерным удлинением стержня. Но определение возможных статически допустимых напряжений не связано с кинематикой деформирования. Представим себе, что стержень состоит из трех частей (рис. 3), (можно представить, что стержень состоит из n частей), усилия в каждой

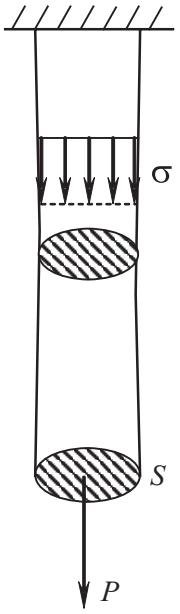

Рис. 1

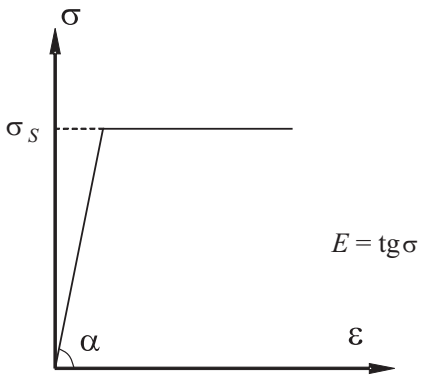

Рис. 2

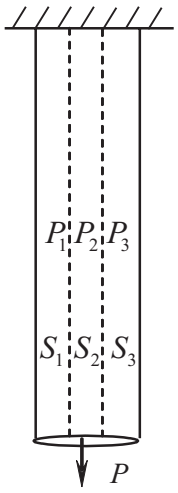

Рис. 3

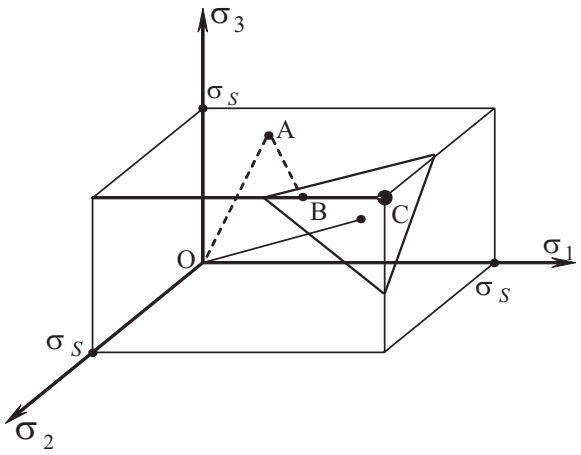

Рис. 4

из частей обозначим P_1, P_2, P_3, площадь поперечных сечений S_1, S_2, S_3, из условий равновесия следует

$$P = P_1 + P_2 + P_3, \tag{1}$$

а также

$$S = S_1 + S_2 + S_3. \tag{2}$$

Напряжения в каждой из частей

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{S_1}, \quad \sigma_2 = \frac{P_2}{S_2}, \quad \sigma_3 = \frac{P_3}{S_3}, \quad \sigma_i \leqslant \sigma_S. \tag{3}$$

Из формул (1)–(3) следует

$$\sigma = \sigma_1 \cos\alpha_1 + \sigma_2 \cos\alpha_2 + \sigma_3 \cos\alpha_3, \tag{4}$$

где $\cos\alpha_i = S_i/S$.

Рассмотрим трехмерное ортогональное пространство с осями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Изменение напряжений ограничено в пределах

$$0 \leqslant \sigma_i \leqslant \sigma_S, \tag{5}$$

а также ограничено плоскостями, ортогональными к осям σ_i, отсекающими отрезки длиной σ_S (рис. 4).

Соотношение (4) определяет плоскость в пространстве σ_i, перемещающуюся параллельно самой себе с ростом σ. Часть плоскости (4), лежащая в кубе (рис. 4), определенном соотношениями (5), соответствует статическим возможным напряженным состояниям стержня.

Стержень теряет несущую способность (разрушается) при $\sigma = \sigma_i = \sigma_S$ при напряженном состоянии, соответствующем точке C на рис. 4

$$\sigma_S = \sigma_S \cos\alpha_1 + \sigma_S \cos\alpha_2 + \sigma_S \cos\alpha_3. \tag{6}$$

Достижение напряженным состоянием предельной точки C может происходить различным образом: например, при достижении одной, затем другой части предельного соотношения: траектория $OABC$ на рис. 4.

Итак, пока система сохраняет возможность выбора статически допустимых соотношений, другими словами, является статически неопределимой, она способна сопротивляться приращениям напряжений, она "живет". Система теряет способность сопротивляться нагрузкам, когда состояние статической неопределимости исчерпано, и она переходит в предельное статическое определимое состояние.

Теория идеальной пластичности и теория предельного состояния

Кулон (1773) развил представление о предельном состоянии грунтов (оползни и т. п.). Сен-Венан (1870) дал соотношения плоской задачи теории идеальной пластичности. Хаар и Карман (1909) показали, что теории предельного состояния и идеальной пластичности имеют общие основы.

Начнем с плоского случая. Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0, \tag{7}$$

где σ_x, σ_y — нормальные, τ_{xy} — касательное напряжения.

Система уравнений равновесия (7) относительно трех неизвестных является незамкнутой и определяет множество статически допустимых решений. Конкретная траектория изменения напряженного состояния в пространстве напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ может быть определена из замкнутой системы уравнений, куда входят уравнения (2). Обычно вводятся две дополнительные переменные u, v, определяющие перемещения в плоскости, три компоненты деформации e_x, e_y, e_{xy}, связанные условием совместности, и три уравнения, определяющие связь $\sigma_{ij} - e_{ij}$.

Классическим примером статически неопределимой среды является упругое тело, связь $\sigma_{ij} - e_{ij}$ определяется законом Гука.

Соотношения теории упругости определяют статически неопределимое состояние и сами по себе не накладывают никаких ограничений на изменение нагрузок и деформаций. Известно, что уравнения плоской задачи линейной теории упругости принадлежат к эллиптическому типу и сводятся к решению бигармонического уравнения.

Условия предельного состояния могут быть записаны в виде

$$f(\sigma_{ij}) = 0. \tag{8}$$

Соотношения (7), (8) определяют плоскую статически определимую задачу. В качестве (8) Сен-Венан использовал условие пластичности Треска

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2. \tag{9}$$

Обычно используют замену переменных

$$\sigma_x = \sigma + k\cos 2\theta, \quad \sigma_y = \sigma - k\cos 2\theta, \quad \tau_{xy} = k\sin 2\theta,$$

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), \quad \theta = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{10}$$

и из (7), (9) получают систему квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} - 2k\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2k\cos\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial y} + 2k\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2k\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0. \tag{11}$$

Прандтль (1913) показал, что система уравнений (11) принадлежит к гиперболическому типу, и развил методы решения задач.

Статически определимые соотношения теории идеальной пластичности определяют только предельное состояние. Покажем это на примере толстостенной трубы радиусов $\rho = a$, $\rho = b$, $a < b$, находящейся под действием внутреннего давления.

Уравнение равновесия в полярной системе координат $\rho\theta$ имеет вид

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0. \tag{12}$$

Условие пластичности

$$\sigma_\rho - \sigma_\theta = -2k, \quad k > 0, \quad \sigma_\theta > \sigma_\rho. \tag{13}$$

Из (12), (13) следует

$$\sigma_\rho = 2k\ln\rho + C, \quad \sigma_\theta = 2k(1+\ln\rho) + C, \quad C - \text{const}. \tag{14}$$

Напряженное состояние трубы (14) является статически определимым. Из граничного условия отсутствия нагрузки на внешней границе трубы

$$\sigma_\rho = 0 \quad \text{при} \quad \rho = b, \tag{15}$$

из (14), (15) определяется предельное напряженное состояние трубы

$$\sigma_\rho = 2k\ln\frac{\rho}{b}. \tag{16}$$

Предельное внутреннее давление на внутреннем контуре трубы $\sigma_\rho = p$ при $\rho = a$ следует из (16)

$$p = -2k\ln\frac{a}{b}. \tag{17}$$

В плоском случае различий между теорией идеальной пластичности и теорией предельного состояния нет.

Рассмотрим пространственный случай. Имеют место три уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} = 0,\\
&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} = 0,\\
&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = 0
\end{aligned} \tag{18}$$

относительно шести компонент напряжений σ_{ij}.

Соотношения теории идеальной пластичности могут быть рассмотрены при условии пластичности

$$f(\sigma_{ij}) = 0. \tag{19}$$

Система уравнений становится замкнутой, если воспользоваться соотношениями ассоциированного закона течения (Мизес, 1928 г.)

$$\varepsilon^p_{ij} = \lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}, \quad \lambda \geqslant 0, \tag{20}$$

где ε^p_{ij} — компоненты скорости пластической деформации.

Соотношения (18), (19) определяют множество статически допустимых решений. Определение двух условий пластичности

$$f_1(\sigma_{ij}) = 0, \quad f_2(\sigma_{ij}) = 0 \tag{21}$$

приводит к пяти уравнениям (17), (19) и в принципе не изменяет ситуации. Для определения замкнутой системы уравнений требуется введение поля деформаций (поле скоростей деформации) и определение связи $\sigma_{ij} - e_{ij}$, например, посредством обобщенного ассоциированного закона пластического течения (Рейсс, 1933 г.)

$$\varepsilon^p_{ij} = \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_{ij}} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial\sigma_{ij}}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0. \tag{22}$$

Соотношения теории идеальной пластичности (18)–(20), а также (18), (21), (22) являются статически неопределимыми и не являются соотношениями теории предельного состояния.

Предельное состояние возникает при выполнении

$$f_1(\sigma_{ij}) = 0, \quad f_2(\sigma_{ij}) = 0, \quad f_3(\sigma_{ij}) = 0. \tag{23}$$

Система шести уравнений (17)–(20) относительно шести компонент напряжения σ_{ij} является замкнутой, статически определимой.

Предположим, что тело изотропное. В этом случае условия пластичности (20) зависят от трех инвариантов тензора напряжений, в качестве которых могут быть взяты три главных напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:

$$f_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \quad f_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \quad f_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0. \tag{24}$$

Из трех соотношений (24) следует

$$\sigma_1 = \text{const}, \quad \sigma_2 = \text{const}, \quad \sigma_3 = \text{const}. \tag{25}$$

Очевидно, случай (25) особого интереса не представляет.

В случае изотропного тела существует напряженное состояние полной пластичности

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \sigma_1 = \sigma_3 + 2k, \quad k — \text{const}. \tag{26}$$

которое приводит к статически определимым соотношениям [2].

$$\begin{aligned}
&\sigma_x = \sigma - \frac{2}{3}k + 2k\cos^2\theta_1, \quad \tau_{xy} = 2k\cos\theta_1\cos\theta_2,\\
&\sigma_y = \sigma - \frac{2}{3}k + 2k\cos^2\theta_2, \quad \tau_{yz} = 2k\cos\theta_2\cos\theta_3,\\
&\sigma_z = \sigma - \frac{2}{3}k + 2k\cos^2\theta_3, \quad \tau_{xz} = 2k\cos\theta_1\cos\theta_3,\\
&\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 = 1, \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z),
\end{aligned} \tag{27}$$

где $\cos\theta_1$, $\cos\theta_2$, $\cos\theta_3$ — направляющие косинусы, определяющие ориентацию третьего главного напряжения σ_3 в декартовой системе координат xyz.

Из (24) следует

$$\begin{aligned}
&\sigma_x = \sigma - \frac{2}{3}k + \frac{\tau_{xy}\tau_{xz}}{\tau_{yz}}, \quad \sigma_y = \sigma - \frac{2}{3}k + \frac{\tau_{xy}\tau_{yz}}{\tau_{xz}},\\
&\sigma_z = \sigma - \frac{2}{3}k + \frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau_{xy}}, \quad \frac{\tau_{xy}\tau_{xz}}{\tau_{yz}} + \frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau_{xz}} + \frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau_{xu}} = 2k.
\end{aligned} \tag{28}$$

Из соотношений (18), (27), аналогично (7), (10), следует система уравнений, принадлежащая к гиперболическому типу, сохраняющая все особенности плоской задачи теории идеальной пластичности.

Мир эллиптический и мир гиперболический

Итак, в рамках статически неопределимых соотношений, когда существует возможность выбора статически допустимых состояний, а также со-

храняется связь между приращениями напряжений и деформаций, система сохраняет возможность сопротивляться возрастающим нагрузкам, она "живет".

Характерно то, что "живущее" статически неопределимое состояние описывается уравнениями эллиптического типа, а потерявшее способность к сопротивлению — гиперболического.

Для эллиптических уравнений характерны краевые задачи: любое возмущение краевых условий распространяется на все тело: "живой" организм отзывается реакцией в каждой своей точке, "нервная система" функционирует.

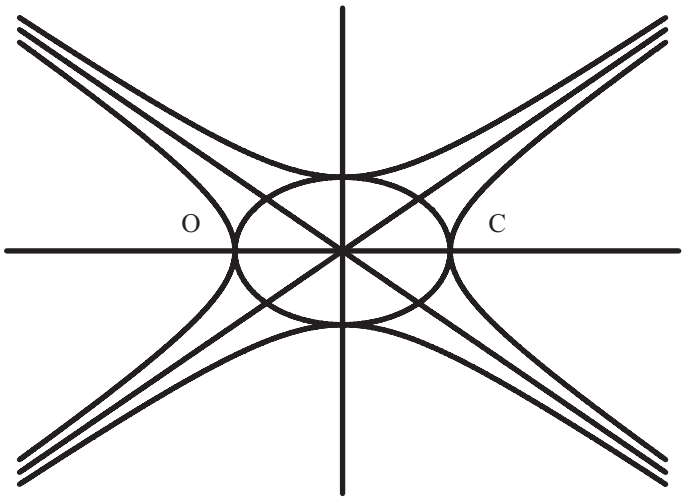

Рис. 5

Предельное состояние достигается только на основе статически определимых соотношений, все возможности перераспределения нагрузок исчерпаны, связь между напряженным и деформированным состоянием утрачена. Уравнения становятся гиперболическими.

Итак, что же мы имеем? Пока металл "живой", он находится в "эллиптическом" мире, этот мир может быть линейным или нелинейным, это не имеет принципиального значения. Но когда "жизнь" покидает металл, когда способность к сопротивлению нагрузкам исчерпана, мир для него становится совершенно другим — гиперболическим, а гиперболические уравнения характеризуют совершенно другие задачи ... Вот так[2].

Если приглядеться повнимательнее, то окажется, что мы живем в эллиптическом мире. Идеальной в этом мире является окружность, у каждого из нас свой эллипс, свой эксцентриситет. Судя по всему (рис. 5), при переходе от эллипса к гиперболе полуоси сохраняются. Так что имеет смысл, пока возможно, уменьшить эксцентриситет, чтобы упорядочить гиперболический мир.

[2]Вообще говоря, все не так просто...

Итак, что дальше? Дальше — у каждого своя гипербола, свои асимптоты, возможно, у кого-то просто пересекающиеся прямые. А что еще? — Об этом можно посмотреть в учебнике по аналитической геометрии ...

Литература

[1] Теория пластичности: Сб. статей / Под ред. Ю.Н. Работнова. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.

[2] Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука; Физматлит, 1966.

Поступила в редакцию $04/X/2005$;
в окончательном варианте — $04/X/2005$.