УДК 517.9

О ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕОДНОРОДНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ[1]

© 2005 В.Г. Цирулик, Д.В. Цирулик[2]

Предлагается метод отыскания частных решений одного класса неоднородных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений с правой частью специального вида и с переменными коэффициентами. Показано,что для уравнений и систем этого класса предлагаемый метод значительно сокращает объем вычислений по сравнению с известными методами, особенно в резонансном случае и при высоких степенях многочленов в правых частях уравнений.

1. Предварительные сведения

Многие задачи теории и практики приводят к необходимости интегрирования неоднородных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (ОЛДУ) и систем таких уравнений. Известно достаточно много методов, восходящих к работам Л. Эйлера, Ж. Лагранжа и О. Коши, позволяющих находить частные решения некоторых классов уравнений и систем в замкнутом виде. Укажем, к примеру, на методы неопределенных коэффициентов, метод исключения и метод вариации произвольных постоянных [1–10], метод функции отклика [1, 9], операционный метод [5]. В прикладных дисциплинах применяется еще метод комплексных амплитуд [3] и операторный метод [10].

Характерной особенностью перечисленных методов в применении, например, к уравнениям с постоянными коэффициентами является резкое увеличение объема вычислений в резонансном случае и с ростом степени многочленов в правой части уравнения. Предлагаемый же нами метод отыскания частных решений свободен от указанного недостатка, поскольку его применение сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с треугольной матрицей относительно искомого решения и его производных.

[1]Представлена доктором физико-математических наук профессором Л.М. Берковичем.

[2]Цирулик Владимир Григорьевич (tcrlk@pbox.ttn.ru), Цирулик Дмитрий Владимирович (doodle@pochta.ru), кафедра высшей математики Таганрогского государственного радиотехнического университета. 347922, Россия, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

Обозначим через $L_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i(x)\delta^i$ обыкновенный линейный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами, где n — порядок оператора, $\delta = \frac{d}{dx}$ — оператор дифференцирования по переменной x.

Рассмотрим уравнение

$$L_n(y) = f(x). \tag{1.1}$$

В основе рассматриваемого метода лежит следующее утверждение [11].

Теорема 1.1. Пусть правая часть уравнения (1.1) представлена в виде $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} c_i u_i(x)$, где не все числа $c_i = 0$, а функции $u_i(x)$, $(i = \overline{1, r})$ образуют фундаментальную систему (ФСР) решений ОЛДУ $X_r(y) = 0$. Тогда, если оператор $X_r L_n$ допускает факторизацию

$$X_r L_n = M_{n+r-q} Y_q, \tag{1.2}$$

в которой операторы L_n и Y_q $(0 < q)$ взаимно просты справа, то при $q = r$ частное решение уравнения (1.1) является линейной комбинацией ФСР уравнения $Y_q(y) = 0$. Если же $q < r$, то возможно, что частное решение имеет указанный вид.

В общем случае получение факторизации (1.2) является сложной проблемой. Наиболее полную информацию о ее состоянии можно найти в [12]. Отметим, что в этой же монографии предложен способ построения частного решения, когда левая часть уравнения (1.1) допускает факторизацию через операторы первого порядка, а также способ нахождения частного решения, когда левая часть уравнения приводима к уравнению с постоянными коэффициентами.

2. Частные решения коммутативно факторизуемых уравнений

Пусть $\omega(x)$ — достаточное число раз дифференцируемая вещественная функция. Обозначим через $\Omega = \int \frac{dx}{\omega(x)}$ любую ее первообразную, а через $S_q(\Omega) = \sum\limits_{i=0}^{q} s_i \Omega^i$ — многочлен от Ω с, вообще говоря, комплексными коэффициентами. Через $\omega(x)\delta$ обозначим оператор дифференцирования с умножением на функцию $\omega(x)$ слева — $\omega(x)\frac{d}{dx}$, тогда $(\omega\delta)^i$ — его i-я степень.

Расмотрим дифференциальное уравнение

$$L_m(y) \ = \ \sum_{i=0}^{m} a_i(\omega\delta)^i y = \ S_q(\Omega), \tag{2.1}$$

где a_i — комплексные числа, а оператор L_m несущественно отличается от общего вида коммутативно факторизуемых операторов [12]. В частности, при $\omega(x) = 1$ уравнение (2.1) — с постоянными коэффициентами, при $\omega(x) = x$ — уравнение Эйлера и т.д.

Убедимся, что многочлены от Ω обладают относительно дифференцирования $\omega\delta$ такими же свойствами, как и обычные многочлены относительно производной.

Лемма 2.1. Если $S_q(\Omega)$ — многочлен степени q, то $(\omega\delta)^q S_q(\Omega) \neq 0$, а $(\omega\delta)^{(q+j)} S_q(\Omega) = 0$ при $j > 0$.

Доказательство. Действительно, $\omega\delta\,\Omega = 1$, $(\omega\delta)^2\,\Omega^2 = 2!$. Допустим, что $(\omega\delta)^{q-1}\Omega^{q-1} = (q-1)!$. Тогда $(\omega\delta)^q\Omega^q = (\omega\delta)^{q-1}(\omega\delta\Omega^q) = q\,(\omega\delta)^{q-1}\Omega^{q-1} = q!$.

Многочлен $H(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i\lambda^i$ назовем характеристическим многочленом однородного уравнения $L_m(y) = 0$.

Лемма 2.2. Справедливо тождество

$$L_m(ue^{\lambda_0\Omega}) = e^{\lambda_0\Omega}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i!}H^{(i)}(\lambda_0)u^{(i)}, \tag{2.2}$$

где $H^{(i)}(\lambda_0)$ — значения производных характеристического многочлена при $\lambda = \lambda_0$. Тождество выводится аналогично [1, с. 83].

Утверждения, аналогичные следующей теореме, имеются в [1–9], но там их доказательства проводятся методом неопределенных коэффициентов. Дадим доказательство, приводящее к иному методу отыскания частного решения, применив теорему 1.1 в том случае, когда правая часть уравнения (1.1) является многочленом степени q от Ω, а оператор $L_m = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i(\omega\delta)^i$. В этом случае можно положить $X_{q+1} = (\omega\delta)^{q+1}$, и тождество (1.2) превратится в условие коммутирования операторов.

Теорема 2.1. Дифференциальное уравнение (2.1), где $a_i \in C$, $i = \overline{0,m}$, $a_0 \neq 0$ и $a_m \neq 0$, имеет частным решением многочлен $U_q(\Omega)$ степени q, удовлетворяющий треугольной системе уравнений

$$(\omega\delta)^i L_m(y) = (\omega\delta)^i S_q(\Omega), \quad i = \overline{0,q}, \tag{2.3}$$

рассматриваемой как алгебраическая относительно переменных y, $\omega\delta y$, ..., $(\omega\delta)^q y$.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по степени многочлена $S_q(\Omega)$. При $q = 0$ утверждение очевидно. При $q = 1$ искомое частное решение можно определить согласно лемме 2.1 из алгебраической относительно переменных $y, \omega\delta y$ системы: $a_1\omega\delta y + a_0 y = S_1(\Omega)$, $a_0\omega\delta y = \omega\delta S_1(\Omega)$.

Допустим, что утверждение справедливо при $q = k$, то есть система

$$(\omega\delta)^i L_m(y) = (\omega\delta)^i S_q(\Omega), \quad i = \overline{0,k} \tag{2.4}$$

как алгебраическая относительно переменных $y, \omega\delta y, ..., (\omega\delta)^k y$ определяет многочлен степени k и его производные до k порядка включительно. Положим $q = k + 1$ и рассмотрим уравнение

$$L_m(y) = S_{k+1}(\Omega). \tag{2.5}$$

Применив к этому уравнению оператор ωδ, получим по лемме 2.1

$$L_m(\omega\delta y) = S_k(\Omega). \tag{2.6}$$

Согласно предположению индукции, уравнение (2.6) имеет частным решением многочлен

$$\omega\delta y = y_k$$

степени k, удовлетворяющий вместе со своими производными системе (2.4), причем $(\omega\delta)^2 y = y_k^{(1)}, \ \ldots, \ (\omega\delta)^{k+1} y = y_k^{(k)}$.

Выразим из уравнения (2.5) $y = \dfrac{1}{a_0}(S_{k+1}(\Omega) - a_1\omega\delta y - \ldots - a_m(\omega\delta)^m y$. Если заменить в этом выражении производную $(\omega\delta)^i y$ на $(\omega\delta)^{i-1} y_k$, $i = \overline{1, m}$, то полученный многочлен $y = \dfrac{1}{a_0}(S_{k+1}(\Omega) - a_1 y_k - \ldots - a_m(\omega\delta)^{m-1} y_k$ степени $k+1$ должен удовлетворять уравнению (2.5) по построению, при этом многочлен $\omega\delta y = \dfrac{1}{a_0}(\omega\delta S_{k+1}(\Omega) - a_1\omega\delta y_k - \ldots - a_m(\omega\delta)^m y_k$ совпадает с многочленом y_k, удовлетворяющим вместе со своими производными системе (2.4). Таким образом, многочлен $y_{k+1} = \dfrac{1}{a_0}(S_{k+1}(\Omega) - a_1\omega\delta y - \ldots - a_m(\omega\delta)^m y$ удовлетворяет алгебраической системе $(\omega\delta)^i L_n(y) = (\omega\delta)^i S_{k+1}(\Omega)$, $i = \overline{0, k+1}$.

Замечание. Теорема 2.1 дает следующий способ отыскания полиномиального частного решения в рассматриваемом случае: применяя к исходному уравнению оператор ωδ с учетом тождества $(\omega\delta)^j y = 0$, $j > q$, составим и решим систему линейных уравнений (2.3) как алгебраическую относительно переменных y, $\omega\delta y$, ..., $(\omega\delta)^q y$. Очевидно, что эта неоднородная система всегда является треугольной с отличными от нуля элементами на диагонали.

Следствие. Дифференциальное уравнение

$$L_m(y) \ = \ \sum_{i=r}^{m} a_i(\omega\delta)^i y \ = P_s(\Omega),$$

где $0 \leqslant r < m$, $a_r \neq 0$, а $P_s(\Omega)$ — многочлен степени s, вообще говоря, с комплексными коэффициентами, имеет частным решением многочлен $y = \Omega^r \tilde{Q}_s(\Omega)$ степени $s + r$, где $\tilde{Q}_s(\Omega)$ — многочлен степени s.

Доказательство. Данное уравнение заменой $(\omega\delta)^i y = w$ сводится к уравнению (2.1) с отличным от нуля младшим коэффициентом.

Рассмотрим теперь уравнение с правой частью специального вида

$$L_m(y) = e^{a\Omega}(P_n(\Omega)\cos(b\Omega) + Q_k(\Omega)\sin(b\Omega)), \tag{2.7}$$

где a_i, a и b — вещественные числа, $P_n(\Omega), Q_k(\Omega)$ — многочлены с **вещественными** коэффициентами степени n и k соответственно.

Для отыскания частного решения уравнения (2.7) заменим его комплексифицированным уравнением, введя для этого новую неизвестную комплекснозначную функцию вещественного аргумента $z = y + iv$, где y, v — вещественные функции вещественного аргумента, $i^2 = -1$.

Уравнение

$$L_m(z) = e^{\lambda_0\Omega}(P_n(\Omega) - iQ_k(\Omega)), \tag{2.8}$$

где $\lambda_0 = a + ib$, называется комплексификацией уравнения (2.7).

Отделяя в уравнении (2.8) вещественную и мнимую части, легко убедиться, что его вещественная часть равносильна исходному вещественному уравнению.

Теорема 2.2. Уравнение (2.7) имеет частное решение вида

$$y = \Omega^r \exp(a\Omega)(\mathrm{Re}(U_s(\Omega)) \cos(b\Omega) - \mathrm{Im}(U_s(\Omega)) \sin(b\Omega)), \tag{2.9}$$

где r — кратность числа $\lambda_0 = a+ib$ как корня характеристического многочлена оператора L_m, $U_s(\Omega)$ — многочлен степени $s = \max(n, k)$ с комплексными коэффициентами, который при $r = 0$ находится из системы (2.3), а при $r > 0$ совпадает с многочленом $\tilde{Q}_s(\Omega)$ из следствия; $\mathrm{Re}\,(U_s(\Omega))$, $\mathrm{Im}\,(U_s(\Omega))$ — вещественная и мнимая части многочлена $U_s(x)$.

Доказательство. Сначала комплексифицируем уравнение (2.7), перейдя к уравнению $L_m(z) = P_n(\Omega) - iQ_k(\Omega)$. Воспользовавшись тождеством (2.2), выполним в этом уравнении замену переменной

$$z = ue^{\lambda_0\Omega}, \tag{2.10}$$

приведя его к виду

$$\tilde{L}_m(u) = \sum_{i=r}^{m} \frac{1}{i!} H^{(i)}(\lambda_0)(\omega\delta)^i u = T_s(\Omega),$$

где коэффициенты $H^{(i)}(\lambda_0)$, вообще говоря, комплексные числа, $T_s(\Omega) = P_n(\Omega) - iQ_k(\Omega)$.

Если в последнем уравнении $r \neq 0$, то, сделав еще одну замену

$$(\omega\delta)^r u = w,$$

приведем его к виду,

$$\tilde{L}_{m-r}(w) = \sum_{i=0}^{m-r} B_i(\lambda_0)(\omega\delta)^r w = T_s(\Omega),$$

где $B_0(\lambda_0) \neq 0$.

По теореме 2.1 последнее уравнение имеет частным решением многочлен $w = W_s(\Omega)$. Интегрируя при $r > 0$ дифференциальное уравнение $(\omega\delta)^r u = W_s(\Omega)$ при нулевых произвольных постоянных, получим $u = \Omega^r \tilde{Q}_s(\Omega)$. Если $r = 0$, то $u = W_s(\Omega)$. В силу подстановки (2.10) частное комплексное решение исходного уравнения имеет вид $z = \Omega^r U_s(\Omega) \exp(\lambda_0\Omega)$. Вещественное частное решение исходного уравнения находится по формуле $y = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$.

Приведем пример, иллюстрирующий обсуждаемый метод.

Пример 1. Найти частное решение уравнения $x^2y'' + 3xy' + 2y = x^{-1}\,[(\ln^2 x + 1) \cos(\ln x) + (\ln x - 2) \sin(\ln x)]$.

Решение. Переписав уравнение в виде $(x\delta)^2 y + 2x\delta y + 2y = \exp(-\ln x) \times [(\ln^2 x + 1) \cos(\ln x) + (\ln x - 2) \sin(\ln x)]$, видим, что $\omega(x) = x$, $\Omega = \ln x$.

Комплексифицировав последнее уравнение, получим $(x\delta)^2 z + 2x\delta z + 2z = \exp(\lambda_0 \ln x)(\ln^2 x + 1 - i\ln x + 2i)$, где $\lambda_0 = -1 + i$. Выполнив замену переменной $z = ue^{\lambda_0 \ln x}$, найдем $(x\delta)^2 u + 2ix\delta u = \ln^2 x + 1 - i\ln x + 2i$. Положив в последнем уравнении $x\delta u = w$, получим $x\delta w + 2iw = \ln^2 x + 1 - i\ln x + 2i$. Частное решение этого уравнения является многочленом второй степени относительно $\ln x$. Поэтому, действуя на уравнение для w слева оператором $x\delta$ с учетом условия $(x\delta)^j w = 0$ при $j > 2$, составим систему

$$\left.\begin{array}{ll} x\delta w + 2iw = & \ln^2 x + 1 - i\ln x + 2i, \\ (x\delta)^2 w + 2ix\delta w & = 2\ln x - i, \\ 2i(x\delta)^2 w & = 2, \end{array}\right\}$$

из которой найдем $w = \frac{-i\ln^2 x}{2} - \frac{i}{2} + 1$. Проинтегрировав уравнение $x\delta u = w$ при нулевых произвольных постоянных, получим $u = \ln x\left(\frac{-i\ln^2 x}{6} - \frac{i}{2} + 1\right)$. В данном случае многочлен $U_2(\ln x) = \frac{-i\ln^2 x}{6} - \frac{i}{2} + 1$. Поэтому по формуле (2.9) вещественное частное решение исходного уравнения имеет вид $y = x^{-1}\ln x\left(\cos(\ln x) + \left(\frac{\ln^2 x}{6} + \frac{1}{2}\right)\sin(\ln x)\right)$.

Нетрудно убедиться, что применение ранее упомянутых методов к отысканию даже частного решения уравнения, рассмотренного в примере, приводит к существенно большему объему вычислений.

3. Отыскание частных решений неоднородных систем

Покажем, что предложенный в предыдущем разделе метод отыскания частных решений применим к некоторому достаточно часто встречающемуся на практике классу неоднородных систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрим сначала системы вида

$$L(\overline{y}) = \sum_{i=0}^{m} A_i(\omega\delta)^i \overline{y} = \overline{S_q(\Omega)}, \tag{3.1}$$

где A_i — $n \times n$ матрицы с комплексными элементами, $\overline{y} = (y_1(x), ..., y_n(x))$ — столбец неизвестных, $\overline{S_q(\Omega)} = (S_{q_1}(\Omega), ..., S_{q_n}(\Omega))$ — столбец правых частей, в котором $S_{q_k}(\Omega)$ — заданные многочлены степени q_k, число $q = \max(q_1, ..., q_n)$ назовем весом вектора $\overline{S_q(\Omega)}$.

Заметим, что в [3] дано решение аналогичных систем с постоянными коэффициентами, но с правыми частями более общего вида, методом исключения, а также изложен метод их нормализации. С некоторыми общими методами интегрирования линейных систем можно познакомиться, например, по монографии [13].

Матричный многочлен $H(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{m} A_i\lambda^i$ назовем характеристическим многочленом системы (3.1).

Лемма 3.1. Если $\overline{S_q(\Omega)}$ — столбец веса q, то $(\omega\delta)^q\overline{S_q(\Omega)} = \overline{s} \neq 0$, где $\overline{s}$ — постоянный вектор, $(\omega\delta)^{(q+j)}\overline{S_q(\Omega)} = \overline{s} = 0$ при $j > 0$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.1.

Теорема 3.1. Если матрица A_0 обратима, то при условии совместности система дифференциальных уравнений (3.1) имеет частным решением столбец

$$\overline{\Phi_q(\Omega)} = (\Phi_{p_1}(\Omega), ..., \Phi_{p_n}(\Omega)) \tag{3.2}$$

веса q, удовлетворяющий треугольной системе матричных уравнений

$$(\omega\delta)^i L(\overline{y}) = (\omega\delta)^i\, \overline{S_q(\Omega)},\ i = \overline{0, q}, \tag{3.3}$$

рассматриваемой как алгебраическая относительно неизвестных $\overline{y}$, $\omega\delta\overline{y}$, ..., $(\omega\delta)^q\overline{y}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1.

Пример 2. Найти частное решение системы

$$A_3\overline{y}''' + A_2\overline{y}'' + A_1\overline{y}' + A_0\overline{y} = \overline{S_2(x)},$$

где $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\overline{S_2(x)} = (2x+1,\ x^2-2)$.

Решение. Согласно теореме 3.1, данная система имеет частным решением столбец веса два. Поэтому дифференцируя дважды исходную систему, получим следующую алгебраическую систему для отыскания частного решения:

$$\left.\begin{array}{lllllll} A_2\overline{y}'' & + & A_1\overline{y}' & + & A_0\overline{y} & = & \overline{S_2(\Omega)}, \\ A_1\overline{y}'' & + & A_0\overline{y}' & & & = & \delta\overline{S_2(\Omega)}, \\ A_0\overline{y}'' & & & & & = & \delta^2\overline{S_2(\Omega)}. \end{array}\right\}$$

Найденное из последней системы частное решение таково:

$$\overline{y} = \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{14}{3}x - \frac{13}{9},\ \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{10}{9}\right).$$

Следствие. Если система

$$L(\overline{y}) = \sum_{i=r}^{m} A_i(\omega\delta)^i\overline{y} = \overline{S_q(\Omega)}, \tag{3.4}$$

где $0 \leqslant r < m$, $\overline{S_q(\Omega)}$ — столбец веса q, совместна, а матрица A_r обратима, то она имеет частное решение вида

$$\overline{y} = \Omega^r\,\overline{\Phi_q(\Omega)}, \tag{3.5}$$

где $\overline{\Phi_q(\Omega)}$ — столбец веса q.

Доказательство утверждения состоит в приведении системы (3.4) заменой $(\omega\delta)^r\overline{y} = \overline{v}$ к виду (3.1) с последующим применением теоремы 3.1 и интегрированием системы $(\omega\delta)^r\overline{y} = \overline{v}$ при нулевых произвольных постоянных.

Рассмотрим теперь систему более общего вида

$$L(\overline{y}) = \exp(a\Omega)[\overline{S_q(\Omega)}\cos(b\Omega) + \overline{R_k(\Omega)}\sin(b\Omega)], \tag{3.6}$$

в котороой коэффициенты оператора L являются **вещественными** $n \times n$ матрицами, a и b — вещественные числа, $\overline{S_q(\Omega)}$ и $\overline{R_k(\Omega)}$ — столбцы многочленов с вещественными коэффициентами веса q и k соответственно.

Назовем комплексификацией системы (3.6) следующую систему:

$$L(\overline{z}) = \exp(\lambda_0\Omega)[\overline{S_q(\Omega)} - i\,\overline{R_k(\Omega)}] \tag{3.7}$$

где $\overline{z} = \overline{y} + i\overline{v}$ — новая неизвестная вектор-функция, $\overline{y}$ и $\overline{v}$ — вещественные вектор-функции вещественного аргумента, $\lambda_0 = a + ib$. Очевидно, что вещественная часть последней системы совпадает с системой (3.6).

Теорема 3.2. Если система (3.6) совместна и при $\lambda_0 = a+ib$ матрицы $H^{(i)}(\lambda_0)$, $i = \overline{0,\ r-1}$ нулевые, а матрица $H^{(r)}(\lambda_0)$ обратима, то система имеет частное решение вида

$$\overline{y} = \Omega^r \exp(a\,\Omega)[\mathrm{Re}(\overline{U_s(\Omega)})\cos(b\Omega) - \mathrm{Im}(\overline{U_s(\Omega)})\sin(b\Omega))], \tag{3.8}$$

где $\overline{U_s(\Omega)}$ — столбец веса $s = \max(q,\ k)$, который при $r = 0$ находится из системы вида (3.3), а при $r > 0$ совпадает со столбцом $\overline{\Phi_q(\Omega)}$, отыскиваемым, как и в следствии; $\mathrm{Re}\,(\overline{U_s(\Omega)})$ и $\mathrm{Im}\,(\overline{U_s(\Omega)})$ — вещественная и мнимая части столбца $\overline{U_s(\Omega)}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.2: комплексифицировав систему (3.6), выполним в полученной системе замену переменной $\overline{z} = \overline{u}\exp(\lambda_0\Omega)$, приведя ее к виду

$$\tilde{L}(\overline{u}) = \sum_{i=r}^{m}\frac{1}{i!}H^{(i)}(\lambda_0)(\omega\delta)^i\overline{u} = \overline{T_s(\Omega)}, \tag{3.9}$$

где коэффициенты $H^{(i)}(\lambda_0)$, вообще говоря, комплексные матрицы, $\overline{T_s(\Omega)} = \overline{S_q(\Omega)} - i\overline{R_k(\Omega)}$.

Если в последней системе $r \neq 0$, то, сделав еще одну замену

$$(\omega\delta)^r\overline{u} = \overline{w},$$

приведем ее к виду

$$\tilde{L}_{m-r}(\overline{u}) = \sum_{i=0}^{m-r}B_i(\lambda_0)(\omega\delta)^i\overline{w} = \overline{T_s(\Omega)},$$

где матрица $B_0(\lambda_0)$ обратима по предположению. Далее по теореме 3.1 или по следствию получаем требуемое.

Заключение

Для коммутативно факторизуемых неоднородных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, правая часть которых имеет специальный вид, и систем таких уравнений предложен метод, требующий меньших объемов вычислений, чем известные, необходимых для отыскания частного решения. Преимущества метода особенно отчетливо видны при его применении в резонансном случае и при высоких степенях многочленов в правых частях, поэтому он может быть эффективно использован и в учебном процессе.

Литература

[1] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1950. 468 с.

[2] Матвеев Н.С. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1963. 531 с.

[3] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1965. 331 с.

[4] Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М: Наука, 1976. 255 с.

[5] Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 350 с.

[6] Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. М.: Наука, 1981. 381 с.

[7] Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. 231 с.

[8] Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1991. 300 с.

[9] Боярчук А.К., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Ч. 5. М.: Эдиториал, 2001. 383 с.

[10] Эльсгольц Л.Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения. СПб.: Лань, 2002. 218 с.

[11] Цирулик В.Г. О методе неопределенных коэффициентов для неоднородных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2003. №39(11). С. 1571–1573.

[12] Беркович Л.М. Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002. 464 с.

[13] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.

Поступила в редакцию 22/*VI* /2005;
в окончательном варианте — 14/*VII*/2005.

SOLUTIONS OF INHOMOGENEOUS ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS AND SYSTEMS[3]

© 2005 V.G. Tsiroulik, D.V. Tsiroulik[4]

In the paper the method of finding solutions of some class of inhomogeneous ordinary differential equations and systems with right-hand side of a special form is proposed. It is proved that for equations and systems of equations of this class the proposed method considerably reduces the amount of calculations in comparison with the known methods especially in the resonance case when right-hand side contains the polynomial of a high degree.

Paper received 22/*VI* /2005.
Paper accepted 14/*VII*/2005.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. L.M. Berkovich.

[4]Tsiroulik Vladimir Grigorievich (`tcrlk@pbox.ttn.ru`), Tsiroulik Dmitri Vladimirovich (`doodle@pochta.ru`), Dept. of Mathematics, Taganrog State Radio Engineering University, Taganrog, 347922, Russia.