

УДК 517.928.1

## ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МЕТОД ЭЙЛЕРА С ВОЗМУЩЕНИЯМИ И ПРИНЦИП УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© 2005 О.П. Филатов<sup>1</sup>

Для односторонне липшицевых дифференциальных включений с медленными переменными дается обоснование разностной интегральной схемы Эйлера с возмущениями. В качестве следствия из этой теоремы получается принцип усреднения для дифференциальных включений.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения

$$\dot{x} \in \mu F(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где  $F : D \rightarrow Kv(\mathbb{R}^m)$  — отображение в множество непустых и выпуклых компактов пространства  $\mathbb{R}^m$ ,  $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ ,  $\mu > 0$  — малый параметр. Задача рассматривается на отрезке времени  $I_\mu = [0, 1/\mu]$ .

Решения этой и других задач понимаются в смысле Каратеодори. Таким образом, рассматриваются абсолютно непрерывные функции, которые почти всюду удовлетворяют соответствующим дифференциальным включениям.

На отрезке  $I_\mu$  введем сетку  $\Pi_\mu = \{t : t = j\Delta, j = 0, 1, \dots, n\}$  с шагом  $\Delta > 0$  и обозначение для частичного отрезка  $I_j = [t_j, t_{j+1}]$ . Задаче (1) сопоставим интегральную схему Эйлера с возмущениями

$$\dot{y} \in \mu F(t, y_j) + \mu G(t, y_j), \quad y(0) = x_0, \quad t \in I_j, \quad (2)$$

где  $j = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $\mu\Delta n = 1$ ,  $y_\mu(t_j) = y_j \in \mathbb{R}^m$ .

Здесь  $y_\mu(\cdot)$  — решение задачи (2). Измеримое по  $t$  отображение  $G : D \rightarrow Kv(\mathbb{R}^m)$  играет роль возмущений в интегральном методе Эйлера, при этом на модуль множества  $|G(t, y)| = \sup_{g \in G(t, y)} \|g\|$  далее будут наложены некоторые естественные ограничения.

<sup>1</sup>Филатов Олег Павлович (filt@ssu.samara.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Россия, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Отображение  $G$ , в частности, моделирует погрешность выбора средней скорости на отрезке времени  $I_j$ , если рассматривать интегральную схему (2) на сетке  $\Pi_\mu$ :

$$y_{j+1} = y_j + \mu \Delta(f_j + g_j), \quad y_0 = x_0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3)$$

где

$$f_j \in \frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(t, y_j) dt, \quad g_j \in \frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} G(t, y_j) dt.$$

Для дифференциальных включений классический метод Эйлера в классе односторонне липшицевых правых частей обоснован в [1]. Основная цель данной работы заключается в том, чтобы распространить интегральный метод Эйлера на дифференциальные включения вида (1) в классе односторонне липшицевых правых частей в ситуации, когда шаг сетки  $\Delta = \Delta_\mu \rightarrow \infty$  при  $\mu \rightarrow 0$ , и установить связь метода с задачами усреднения дифференциальных включений.

Дело в том, что при реализации разностной схемы (3) на каждом частичном отрезке  $I_j, j = 0, 1, \dots, n-1$ , требуется вычислять среднюю скорость движения. Обычно при доказательстве теорем усреднения для дифференциальных включений с медленными переменными [2] или с медленными и быстрыми [3] применяют операцию усреднения на каждом частичном отрезке достаточно большой длины при условии, что среднее по времени  $t$  при фиксированном значении фазовой переменной  $x$  существует.

Эти соображения позволяют в качестве следствия из интегрального метода Эйлера получить теорему усреднения для дифференциальных включений с медленными переменными [2, 4, 5], которая является одним из вариантов принципа усреднения.

В данной статье для простоты изложения усредненное дифференциальное включение считается автономным

$$\dot{\xi} \in \mu F_0(\xi), \quad \xi(0) = x_0. \quad (4)$$

Здесь выпуклый компакт

$$F_0(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t, \xi) dt \quad (5)$$

при условии существования равномерного по  $\xi \in B(x_0, r)$  предела при некотором  $r$ , которое уточним ниже. Предел рассматривается в метрике Хаусдорфа  $h(A, C) = \max\{ex(A, C), ex(C, A)\}$ , где полуотклонение множества  $A \subset \mathbb{R}^m$  от множества  $C \subset \mathbb{R}^m$  определяется соотношением

$$ex(A, C) = \inf\{r > 0 : A \subset C + B(0, r)\}.$$

Здесь сумма множеств алгебраическая:  $C + B = \{x : x = c + b, c \in C, b \in B\}$ . Евклидово расстояние между множествами  $A, B \subset \mathbb{R}^m$  будем обозначать  $\rho(A, B) = \inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\}$ .

Для обозначения опорной функции множества  $A \subset \mathbb{R}^m$  используем символы

$$c(A, \psi) = \sup_{a \in A} \langle a, \psi \rangle,$$

где  $\psi \in \mathbb{R}^m$ . Свойства опорных функций, которые используются в данной статье, можно найти, например, в [6].

## 2. Условия и леммы

Введем класс  $L_1^b \subset L_1^{loc}$  локально интегрируемых функций  $\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , для каждой из которых найдутся числа  $T = T(\lambda) > 0$  и  $l = l(\lambda) > 0$  такие, что

$$\int_t^{t+\Delta} \lambda(s) ds \leq l\Delta, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \Delta \geq T.$$

Кроме того, введем класс  $\mathcal{K}$  непрерывных строго монотонных функций  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\varphi(0) = 0$ .

Для отображения

$$F : D \rightarrow Kv(\mathbb{R}^m), \quad (t, x) \rightarrow F(t, x) \quad (6)$$

будем использовать следующие условия:

1) отображение  $F(\cdot, x)$  является измеримым для любого  $x \in \mathbb{R}^m$ , при этом существует функция  $\gamma_1 \in L_1^b$  такая, что модуль множества  $F(t, x)$  удовлетворяет оценке линейного роста:

$$|F(t, x)| = \sup_{f \in F(t, x)} \|f\| \leq \gamma_1(t)(1 + \|x\|), \quad (t, x) \in D;$$

2) существуют функции  $\gamma_2 \in L_1^b$ ,  $\sigma \in \mathcal{K}$  такие, что

$$h(F(t, x), F(t, y)) \leq \gamma_2(t)\sigma(\|x - y\|), \quad (t, x) \in D;$$

3) для некоторой функции  $\gamma_3 \in L_1^b$  и произвольных  $x, y \in \mathbb{R}^m$ ,  $v \in F(t, x)$  найдется вектор  $w \in F(t, y)$  такой, что

$$\langle x - y, v - w \rangle \leq \gamma_3(t)\|x - y\|^2.$$

Последнее условие обобщает условие Липшица по основным переменным  $x$  отображения (6) и называется односторонним условием Липшица [1].

Далее для функции  $\gamma_i$  из условия  $i \in \{1, 2, 3\}$  соответствующие постоянные, определяемые включением  $\gamma_i \in L_1^b$ , будем обозначать  $l_i = l(\gamma_i)$  и  $T_i = T(\gamma_i)$ .

Будем использовать также следующие обозначения:

$$M(x_0, \mu, t) = (\|x_0\| + \mu\Gamma_1(t)) \exp(\mu\Gamma_1(t)), \quad \Gamma_1(t) = \int_0^t \gamma_1(s) ds,$$

$$M_0 = (\|x_0\| + l_1) \exp(l_1),$$

где функция  $\gamma_1$  — из условия 1.

На основании леммы Гронуолла—Беллмана нетрудно доказать следующую лемму.

**Лемма 1.** Пусть отображение  $F$  из задачи (1) удовлетворяет условию 1, и существует решение  $x_\mu(\cdot)$  этой задачи на отрезке  $I_\mu$ . Тогда имеет место неравенство

$$\|x_\mu(t)\| \leq M(x_0, \mu, t), \quad t \in I_\mu.$$

Если  $\mu \leq 1/T_1$ , то  $M(x_0, \mu, t) \leq M_0$  для любого  $t \in I_\mu$ .

Для того чтобы сформулировать аналог леммы 1 для задачи (2), предположим, что модуль множества  $|G(t, y)|$  для любых  $(t, y) \in D$  удовлетворяет оценке  $|G(t, y)| \leq \gamma_0(t)$ , где  $\gamma_0 \in L_1^b$ , при этом постоянную  $l_0 = l(\gamma_0)$  будем обозначать через  $\varepsilon > 0$ , постоянная  $T_0 = T(\gamma_0)$ .

Отсюда следует, что для функции  $\gamma_0$  при любых  $a, t \geq 0$  имеет место оценка

$$\int_a^{a+t} \gamma_0(s) ds \leq d_{t,\varepsilon}, \quad d_{t,\varepsilon} = \varepsilon \max\{T_0, t\}.$$

Обозначим

$$N(x_0, \mu, t, \varepsilon) = (\|x_0\| + \mu d_{t,\varepsilon} + \mu \Gamma_1(t)) \exp(\mu \Gamma_1(t)),$$

$$N_0 = N_0(\varepsilon) = (\|x_0\| + \varepsilon + l_1) \exp(l_1).$$

**Лемма 2.** Пусть отображение  $F$  из задачи (2) удовлетворяет условию 1,  $|G(t, y)| \leq \gamma_0(t)$ ,  $\gamma_0 \in L_1^b$ ,  $\varepsilon = l(\gamma_0)$ . Тогда для любого решения  $y_\mu(\cdot)$  этой задачи выполняется неравенство

$$\|y_\mu(t)\| \leq N(x_0, \mu, t, \varepsilon), \quad t \in I_\mu.$$

Если  $\mu \leq \min\{1/T_0, 1/T_1\}$ , то  $N(x_0, \mu, t, \varepsilon) \leq N_0$  для любого  $t \in I_\mu$ .

Для целого  $n$  обозначим

$$\varkappa_0 = \varkappa_0(n, \varepsilon) = ((1 + N_0)l_1 + \varepsilon)n^{-1}.$$

**Лемма 3.** Пусть отображение  $F$  из задачи (2) удовлетворяет условию 1 и параметр  $\mu \leq \min\{1/(nT_1), 1/T_0\}$ . Тогда для любого решения  $y_\mu(\cdot)$  задачи выполняется неравенство

$$\|y_\mu(t) - y_j\| \leq \varkappa_0(n, \varepsilon), \quad t \in I_j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

**Доказательство.** Из леммы 2 получим  $\|y_\mu(t)\| \leq N_0$ ,  $t \in I_\mu$ . Поскольку  $n = 1/(\mu\Delta)$ , то для любого  $t \in I_j$  из условия 1 следует

$$\|y_\mu(t) - y_j\| \leq \mu \int_{t_j}^{t_j+\Delta} \gamma_1(t)(1 + N_0) dt + \mu d_{\Delta,\varepsilon} \leq \varkappa_0(n, \varepsilon).$$

Лемма доказана.

**Лемма 4.** Пусть выполняется условие 1, и для данного  $c_0 > 0$  при  $t \geq T_*(c_0)$  справедливо неравенство

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t F(s, \xi) ds - F_0(\xi) \right\| \leq c_0 \quad (7)$$

для любого  $\xi$  из некоторого множества  $K \subset \mathbb{R}^m$ . Тогда, если  $\Delta \geq T_*$ , то

$$h\left(\frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(t, \xi) dt, F_0(\xi)\right) \leq (2n-1)c_0, \quad \xi \in K, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (8)$$

**Доказательство.** В силу аддитивности интеграла от многозначного отображения имеем

$$\frac{1}{t_{j+1}} \int_0^{t_{j+1}} F(t, \xi) dt = \lambda_1 \left( \frac{1}{t_j} \int_0^{t_j} F(t, \xi) dt \right) + \lambda_2 \left( \frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(t, \xi) dt \right),$$

где  $\lambda_1 = t_j/t_{j+1}$ ,  $\lambda_2 = \Delta/t_{j+1}$ . Отсюда, переходя к опорным функциям, получим

$$\begin{aligned} c\left(\frac{1}{t_{j+1}} \int_0^{t_{j+1}} F(t, \xi) dt, \psi\right) &= \lambda_1 c\left(\frac{1}{t_j} \int_0^{t_j} F(t, \xi) dt, \psi\right) + \\ &+ \lambda_2 c\left(\frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(t, \xi) dt, \psi\right) \end{aligned} \quad (9)$$

для любого вектора  $\psi \in S_1$ .

По условию леммы

$$c\left(\frac{1}{t} \int_0^t F(s, \xi) ds, \psi\right) = c(F_0(\xi), \psi) + \varphi(t, \xi, \psi),$$

где  $|\varphi(t, \xi, \psi)| \leq c_0$ , если  $t \geq T_*$ . Воспользуемся этим равенством при  $t = t_j$  и  $t = t_{j+1}$  в (9). После простых преобразований получим

$$\begin{aligned} c\left(\frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(s, \xi) ds, \psi\right) &= c(F_0(\xi), \psi) + \\ &+ \frac{\varphi(t_{j+1}, \xi, \psi) - \lambda_1 \varphi(t_j, \xi, \psi)}{\lambda_2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \left| c\left(\frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(s, \xi) ds, \psi\right) - c(F_0(\xi), \psi) \right| &\leq \frac{\lambda_1 |\varphi(t_j, \xi, \psi)| + |\varphi(t_{j+1}, \xi, \psi)|}{\lambda_2} \leq \\ &\leq \frac{(n-1)\Delta + n\Delta}{\Delta} c_0 = (2n-1)c_0, \quad \psi \in S_1, \end{aligned}$$

что эквивалентно (8). Лемма доказана.

**Лемма 5.** Пусть для отображения  $F$  выполняются условия 1, 2 и существует среднее (5) равномерно по  $\xi \in B(x_0, r)$ . Тогда выполняются неравенства

$$|F_0(\xi)| \leq l_1(1 + \|\xi\|), \quad h(F_0(x), F_0(y)) \leq l_2 \sigma(\|x - y\|) \quad (10)$$

для любых  $\xi, x, y \in B(x_0, r)$ , где постоянные  $l_1, l_2$  определяются функциями  $\gamma_1, \gamma_2$  из условий 1 и 2 соответственно.

**Доказательство.** Возьмем произвольное  $\varkappa > 0$ . Тогда при достаточно большом  $T > 0$  выполняется неравенство

$$h\left(F_0(\xi), \frac{1}{T} \int_0^T F(s, \xi) ds\right) \leq \varkappa. \quad (11)$$

Отсюда, с учетом условия 1, следует

$$\begin{aligned} |F_0(\xi)| &\leq \frac{1}{T} \int_0^T |F(s, \xi)| ds + \varkappa \leq \frac{1}{T} \int_0^T \gamma_1(s)(1 + \|\xi\|) ds + \varkappa \leq \\ &\leq l_1(1 + \|\xi\|) + \varkappa. \end{aligned}$$

В результате, в силу произвольности  $\varkappa > 0$ , получим первое неравенство в (10).

Для доказательства второго неравенства перейдем к опорным функциям. Из (11), свойств опорных функций и условия 2 следует

$$\begin{aligned} &|c(F_0(x), \psi) - c(F_0(y), \psi)| \leq \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{\psi \in \mathcal{S}_1} |c(F(s, x), \psi) - c(F(s, y), \psi)| ds + 2\varkappa = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T h(F(s, x), F(s, y)) ds + 2\varkappa \leq \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^T \gamma_2(s)\sigma(\|x - y\|) ds + 2\varkappa \leq l_2\sigma(\|x - y\|) + 2\varkappa. \end{aligned}$$

Отсюда

$$h(F_0(x), F_0(y)) = \sup_{\psi \in \mathcal{S}_1} |c(F_0(x), \psi) - c(F_0(y), \psi)| \leq l_2\sigma(\|x - y\|) + 2\varkappa.$$

В силу произвольности  $\varkappa > 0$  получим второе неравенство в (10). Лемма доказана.

**Лемма 6.** Пусть для отображения  $F$  выполняются условия 1, 3 и существует среднее  $F_0$ , определяемое (5), равномерно по  $\xi \in B(x_0, r)$ . Тогда для отображения  $F_0(\cdot)$  выполняется условие односторонней липшицевости в шаре  $B(x_0, r)$  с постоянной  $l_3 = l_3(\gamma_3)$ .

**Доказательство.**

По условию равномерной сходимости для целого  $k > 0$  имеем

$$h\left(F_0(\xi), \frac{1}{T} \int_0^T F(s, \xi) ds\right) \leq 1/k$$

при  $T \geq T_*(1/k)$  и любом  $\xi \in B(x_0, r)$ . Заметим, что условие 1 гарантирует существование интегралов.

Возьмем произвольные  $x, y \in B(x_0, r)$  и любой вектор  $v \in F_0(x)$ , тогда существует вектор

$$v^k = \frac{1}{T} \int_0^T f_1^k(t) dt, \quad f_1^k(t) \in F(t, x), \quad \|v - v^k\| \leq 1/k.$$

Здесь  $f_1^k(\cdot)$  — измеримый селектор отображения  $F(\cdot, x)$ . По условию 3 для функции  $f_1^k(\cdot)$  найдется измеримый селектор  $f_2^k(t) \in F(t, y)$ , для которого

$$\langle x - y, f_1^k(t) - f_2^k(t) \rangle \leq \gamma_3(t)\|x - y\|^2.$$

Проинтегрируем это неравенство на отрезке  $[0, T]$  при  $T \geq T_3 = T(\gamma_3)$  и разделим левую и правую части на  $T$ . Так как  $\gamma_3 \in L_1^b$ , то в результате получим

$$\langle x - y, v^k - w_1^k \rangle \leq \|x - y\|^2 \frac{1}{T} \int_0^T \gamma_3(t) dt \leq l_3 \|x - y\|^2.$$

где

$$w_1^k = \frac{1}{T} \int_0^T f_2^k(t) dt \in \frac{1}{T} \int_0^T F(t, y) dt.$$

Векторы  $v^k$  и  $w_1^k$  представим в виде

$$\begin{aligned} v^k &= v + \varphi_k, \quad v \in F(x), \quad \|\varphi_k\| \leq 1/k, \\ w_1^k &= w^k + \psi_k, \quad w^k \in F(y), \quad \|\psi_k\| \leq 1/k. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\langle x - y, v - w^k \rangle \leq l_3 \|x - y\|^2 + \langle x - y, \psi_k - \varphi_k \rangle. \quad (12)$$

Поскольку  $F(y)$  — компактное множество, то из последовательности векторов  $w^k \in F(y), k = 1, 2, \dots$ , выберем сходящуюся подпоследовательность к вектору  $w \in F(y)$  и сохраним за ней прежнее обозначение. Остается сделать предельный переход при  $k \rightarrow \infty$  в неравенстве (12), в результате получим требуемое соотношение

$$\langle x - y, v - w \rangle \leq l_3 \|x - y\|^2.$$

Лемма доказана.

Таким образом, можно констатировать, что свойства 1–3 переносятся на усредненное отображение  $F_0$ , при этом соответствующая функция  $\gamma_i$  из условия  $i$  заменяется на постоянную  $l_i, i = 1, 2, 3$ .

### 3. Основной результат

Обозначим  $X_\mu(t), Y_\mu(t)$  интегральные воронки на отрезке  $[0, t]$  для задач (1), (2) соответственно. Расстояние между ними  $H(X_\mu(t), Y_\mu(t))$  будем определять по Хаусдорфу, рассматривая воронки как множества из пространства  $C([0, t], \mathbb{R}^m)$  непрерывных функций  $\varphi: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Кроме того, введем обозначение  $b(t, n, \varepsilon) = \sigma(\varkappa_0(n, \varepsilon)) \gamma_2(t) + \gamma_0(t)$ , где  $\varkappa_0(\cdot, \cdot)$  определена в лемме 3, и функцию

$$\omega_{\mu, \varepsilon}(t) = \mu \int_0^t b(\tau, n, \varepsilon) \exp\left(\mu \int_\tau^t \gamma_3(s) ds\right) d\tau. \quad (13)$$

Заметим, что если  $\mu \leq \mu_0 = \min\{1/(nT_1), 1/T_0, 1/T_2, 1/T_3\}$ , то

$$\omega_{\mu, \varepsilon}(t) \leq (\sigma(\varkappa_0)l_2 + \varepsilon) \exp(l_3), \quad \varkappa_0 = \varkappa_0(n, \varepsilon). \quad (14)$$

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия 1–3, малый параметр  $\mu \in (0, \mu_0]$ , и для измеримого отображения  $G(\cdot, y), y \in \mathbb{R}^m$  выполняется неравенство  $|G(t, y)| \leq \gamma_0(t)$ , где  $\gamma_0 \in L_1^b$ ,  $\varepsilon = l(\gamma_0)$ . Тогда имеет место оценка

$$H(X_\mu(t), Y_\mu(t)) \leq (\sigma(\varkappa_0)l_2 + \varepsilon) \exp(l_3), \quad t \in I_\mu. \quad (15)$$

При этом для любого  $\varkappa > 0$ , если  $\varepsilon \leq \exp(-l_3)\varkappa/2$ , а целое  $n$  удовлетворяет неравенству  $\sigma(\varkappa_0(n, \varepsilon))l_2 \exp(l_3) \leq \varkappa/2$ , то  $H(X_\mu(t), Y_\mu(t)) \leq \varkappa$ ,  $t \in I_\mu$ .

**Доказательство.** Пусть  $x_\mu(t)$  — произвольное решение задачи (1). Зафиксируем целое  $n$  и  $\mu \in (0, \mu_0]$ . Здесь, напомним, шаг сетки  $\Delta$ , целое  $n$  и малый параметр  $\mu$  связаны равенством  $\mu\Delta n = 1$ .

Построение требуемого решения  $y_\mu(t)$  задачи (2) проведем методом, который использовался при доказательстве леммы 4.2 из [1] при обосновании классического метода Эйлера.

Сначала заметим, что на основании леммы 3 и условия 2

$$h(\mu F(t, y), \mu F^e(t, y_j)) \leq \mu b(t, n, \varepsilon), \quad t \in I_j, \quad (16)$$

где  $F^e(t, y_j) = F(t, y_j) + G(t, y_j)$ ,  $|G(t, y_j)| \leq \gamma_0(t)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ .

Допустим, что решение  $y_\mu(t)$  задачи (2) на отрезке  $[0, t_j]$  построено. Тогда определен вектор  $y_j = y_\mu(t_j)$ . Продолжим это решение на отрезок  $I_j$  следующим образом. Зафиксируем произвольные  $t \in I_j$  и  $y \in \mathbb{R}^m$  и определим множество

$$A(t, y, \mu) = \mu F^e(t, y_j) \cap E(t, y, \mu),$$

где

$$\begin{aligned} E(t, y, \mu) = \{w \in \mathbb{R}^m : \langle x_\mu(t) - y, \dot{x}_\mu(t) - w \rangle \leq \\ \leq \mu \|x_\mu(t) - y\| (\|x_\mu(t) - y\| \gamma_3(t) + b(t, n, \varepsilon))\}. \end{aligned}$$

Множество  $A(t, y, \mu)$  отлично от пустого при любых  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Действительно, согласно условию 3 найдется вектор  $w \in \mu F(t, y)$ , для которого

$$\langle x_\mu(t) - y, \dot{x}_\mu(t) - w \rangle \leq \mu \gamma_3(t) \|x_\mu(t) - y\|^2.$$

Для найденного  $w$  возьмем такой вектор  $v \in \mu F^e(t, y_j)$ , чтобы

$$\rho(w, \mu F^e(t, y_j)) = \|w - v\| \leq h(\mu F(t, y), \mu F^e(t, y_j)) \leq \mu b(t, n, \varepsilon).$$

Здесь мы воспользовались соотношением (16). Следовательно, с учетом неравенства Коши получим

$$\begin{aligned} \langle x_\mu(t) - y, \dot{x}_\mu(t) - v \rangle &\leq \langle x_\mu(t) - y, \dot{x}_\mu(t) - w \rangle + \langle x_\mu(t) - y, w - v \rangle \leq \\ &\leq \mu \gamma_3(t) \|x_\mu(t) - y\|^2 + \mu b(t, n, \varepsilon) \|x_\mu(t) - y\|. \end{aligned}$$

Таким образом, множество  $A(t, y, \mu) \neq \emptyset$ . Поэтому имеет смысл задача

$$\dot{y} \in A(t, y, \mu), \quad y(t_j) = y_j, \quad t \in I_j.$$

Здесь множество  $A(t, y, \mu) \in Kv(\mathbb{R}^m)$ , функция  $A(\cdot, y, \mu)$  измерима, а отображение  $A(t, \cdot, \mu)$  полунепрерывно сверху, поскольку имеет замкнутый график.

Учитывая, что для правой части задачи автоматически выполняется и условие 1 линейного роста по  $y$ , то остается воспользоваться теоремой 5.2 из [7] о существовании решения указанной задачи на отрезке  $I_j$ .

Таким образом, решение задачи (2) определено для любого  $t \in I_\mu$ . Обозначим  $u_\mu(t) = \|x_\mu(t) - y_\mu(t)\|$ . Поскольку

$$u_\mu^2(t) = \langle x_\mu(t) - y_\mu(t), x_\mu(t) - y_\mu(t) \rangle,$$

то почти всюду по  $t \in I_\mu$  выполняется соотношение

$$\dot{u}_\mu(t) \leq \mu\gamma_3(t)u_\mu(t) + \mu b(t, n, \varepsilon).$$

Учтем, что  $u_\mu(0) = 0$ . Поэтому любое (абсолютно непрерывное) решение последнего неравенства на отрезке  $I_\mu$  не превосходит решения задачи

$$\dot{\omega} = \mu\gamma_3(t)\omega + \mu b(t, n, \varepsilon), \quad \omega(0) = 0,$$

которое имеет вид (13). Таким образом,

$$\|x_\mu(t) - y_\mu(t)\| \leq \omega_{\mu, \varepsilon}(t), \quad t \in I_\mu. \quad (17)$$

Обратно, пусть  $y_\mu(\cdot)$  — решение задачи (2). Тогда, учитывая условие 2 и лемму 3, получим

$$\begin{aligned} \rho(\dot{y}_\mu(t), \mu F(t, y_\mu(t))) &\leq h(\mu F(t, y_j) + \mu G(t, \mu F(t, y_\mu(t))) \\ &\leq h(\mu F(t, y_j), \mu F(t, y_\mu(t))) + \mu |G(t, y_j)| \leq \mu\gamma_2(t)\sigma(\varkappa_0) + \mu\gamma_0(t) = \mu b(t, n, \varepsilon) \end{aligned}$$

при любом  $t \in I_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ . По теореме о непрерывной зависимости решений дифференциальных включений от исходных данных в классе односторонне липшицевых правых частей [1] на отрезке  $I_\mu$  существует решение  $x_\mu(t)$  задачи (1), для которого выполняется оценка (17). Из нее и (14) получаются неравенство (15) и оценка

$$H(X_\mu(t), Y_\mu(t)) \leq \varkappa, \quad t \in I_\mu$$

при указанных в теореме  $\varepsilon$  и  $n$ . Теорема доказана.

В следующем разделе приводятся два следствия. Первое — дискретный аналог теоремы 1.

Во втором утверждении формулируется принцип усреднения для дифференциальных включений с медленными переменными. Его доказательство основано на теореме 1 при дополнительном условии существования среднего (5).

## 4. Следствия

Непосредственно из теоремы 1 получим следующее утверждение.

**Следствие 1.** Пусть выполняются условия 1–3 и малый параметр  $\mu \in (0, \mu_0]$ . Кроме того,  $\|g_j\| \leq \varepsilon$ ,  $j = 0, 1, \dots, m-1$ , для некоторого  $\varepsilon > 0$ . Тогда для интегральных воронок  $X_\mu(t)$  и  $Y_\mu(t)$  задач (1) и (3) соответственно выполняется неравенство (15) при  $t \in \Pi_\mu$ .

В следующем утверждении постоянная  $M_0$  из леммы 1, а  $\Xi_\mu(t)$  — интегральная воронка задачи (4) на отрезке  $[0, t]$ .

**Следствие 2.** Пусть выполняются условия 1–3 и существует среднее (5) равномерно по  $\xi \in B(x_0, r)$ , где  $r > M_0$ . Тогда для любого  $\varkappa \in (0, r - M_0)$  существует такое  $\mu_\varkappa > 0$ , что если  $\mu \in (0, \mu_\varkappa]$ , то

$$H(X_\mu(t), \Xi_\mu(t)) \leq \varkappa, \quad t \in I_\mu.$$

**Доказательство.** Для усредненной задачи (4) рассмотрим разностную схему

$$z_{j+1} = z_j + \mu \Delta v_j, \quad z_0 = x_0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (18)$$

где

$$v_j \in F_0(z_j) = \frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F_0(z_j) dt.$$

В силу леммы 4 для заданного  $c_0 > 0$  существует такое  $T_* > 0$ , что если шаг сетки  $\Delta \geq T_*$ , то выполняются неравенства (8) при любом  $z_j \in B(x_0, r)$ , где ограничение  $r > M_0$  вытекает из леммы 1. В таком случае разностную схему (18) можно записать в виде

$$z_{j+1} = z_j + \mu \Delta (f_j + g_j), \quad z_0 = x_0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (19)$$

где  $v_j = f_j + g_j$ ,

$$f_j \in \frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(t, z_j) dt, \quad \|g_j\| \leq (2n-1)c_0.$$

С другой стороны, схема (19) является разностной интегральной схемой Эйлера с возмущениями для задачи (1), так как в данном случае множество  $G(t, z_j) = \{g_j\}$ , если  $t_j \leq t < t_{j+1}$ , то есть является одноэлементным при любом  $t$ . Пусть  $Z_\mu(t)$  — интегральная воронка для задачи (18) (а также для задачи (19)) на отрезке  $[0, t]$ ,  $\mu_\varkappa = \min\{\mu_0, 1/(nT_*)\}$ . Тогда для задач (4) и (18) на основании следствия 1 и лемм 5, 6 получим оценку

$$H(\Xi_\mu(t), Z_\mu(t)) \leq \sigma(\varkappa_0(n, 0)) l_2 \exp(l_3), \quad t \in P_\mu.$$

Для задач (1) и (19) следствие 1 при  $\varepsilon = (2n-1)c_0$  приводит к неравенству

$$H(Z_\mu(t), X_\mu(t)) \leq (\sigma(\varkappa_0(n, \varepsilon)) l_2 + \varepsilon) \exp(l_3)$$

для любого  $t \in P_\mu$ . Отсюда и из неравенства треугольника следует

$$H(\Xi_\mu(t), X_\mu(t)) \leq \sigma(\varkappa_0(n, 0)) l_2 \exp(l_3) + (\sigma(\varkappa_0(n, \varepsilon)) l_2 + \varepsilon) \exp(l_3) \quad (20)$$

для любого  $t \in P_\mu$ . В данном случае

$$\varkappa_0(n, \varepsilon) = \varkappa_0(n, (2n-1)c_0) = \varkappa_{0,1}(n) + \varkappa_{0,2}(c_0),$$

где

$$\varkappa_{0,1}(n) = l_1 n^{-1} + n^{-1}(\|x_0\| + l_1) \exp(l_1) l_1,$$

$$\varkappa_{0,2}(c_0, n) = c_0(2 - 1/n)(\exp(l_1) l_1 + 1).$$

Пусть задано  $\varkappa \in (0, r - M_0)$ . Выберем число  $s > 0$  так, чтобы

$$\sigma(s) l_2 \exp(l_3) \leq \varkappa/12, \quad s \leq \varkappa/3.$$

Затем выберем целое  $n$  из условия  $\varkappa_{0,1}(n) \leq s/2$ . При фиксированном  $n$  за счет  $c_0$  добиваемся выполнения соотношений

$$\varkappa_{0,2}(c_0, n) \leq s/2 \quad (2n-1)c_0 \exp(l_3) \leq \varkappa/6.$$

При указанных значениях  $c_0, s$  и  $n$  правая часть (20), как нетрудно проверить, не превосходит  $\varkappa/3$ , поэтому

$$H(\Xi_\mu(t), X_\mu(t)) \leq \varkappa/3, \quad t \in \Pi_\mu.$$

Если  $t \in I_j$ , то на основании неравенства треугольника получим

$$\begin{aligned} H(\Xi_\mu(t), X_\mu(t)) &\leq H(\Xi_\mu(t), \Xi_\mu(t_j)) + H(\Xi_\mu(t_j), X_\mu(t_j)) + \\ &+ H(X_\mu(t_j), X_\mu(t)) \leq \varkappa_0(n, 0) + \varkappa/3 + \varkappa_0(n, \varepsilon) \leq \varkappa. \end{aligned}$$

Таким образом, для заданного  $\varkappa > 0$  существует  $\mu_\varkappa > 0$  такое, что если  $\mu \in (0, \mu_\varkappa]$ , то для любого  $t \in I_\mu$  выполняется неравенство

$$H(\Xi_\mu(t), X_\mu(t)) \leq \varkappa.$$

Следствие доказано.

## Литература

- [1] Donchev T., Farhi E. Stability and Euler approximation of one-sided Lipschitz differential inclusions // SIAM J. Control OPTIM. 1998. V. 36. No. 2. 780–796 p.
- [2] Плотников В.А. Асимптотические методы в задачах оптимального управления. Одесса: Изд-во Одесского госуниверситета, 1976. 120 с.
- [3] Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение систем дифференциальных включений. М.: Изд-во Московского университета, 1998. 160 с.
- [4] Плотников В.А., Плотников А.В., Витюк А.Н. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. Одесса: АстроПринт, 1999. 356 с.
- [5] Соколовская Е.В. Обобщение принципа усреднения Крылова—Боголюбова на случай дифференциальных включений с нелипшицевой правой частью // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2004. Второй специальный выпуск. С. 36–51.
- [6] Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. М.: Высшая школа, 2001. 239 с.
- [7] Deimling K. Multivalued differential equations. Walter de Gruyter, Berlin; New-York, 1992. 260 p.

Поступила в редакцию 24/V/2005;  
в окончательном варианте — 5/IX/2005.

**THE INTEGRAL EULER METHOD  
WITH PERTURBATIONS AND THE AVERAGING  
PRINCIPLE FOR DIFFERENTIAL INCLUSIONS**

© 2005    O.P. Filatov<sup>2</sup>

The accuracy of the approximation of the solution sets by means of the Euler integral discretization scheme with perturbations for one-sided Lipschitz differential inclusions with slow variables is estimated. The averaging theorem for the differential inclusions is derived from the main theorem.

Paper received 24/V/2005.

Paper accepted 5/IX/2005.

---

<sup>2</sup>Filatov Oleg Pavlovich, Dept. of Partial Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russia.