

УДК 512.4

**БИРАЦИОНАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ МОДУЛЕЙ
ЧЕТВЕРНОЙ ГРУППЫ¹**© 2005 И.В. Кулагина²

В данной работе вычисляются бирациональные инварианты вида $H^1(\pi, \hat{N})$ максимального алгебраического тора исключительной полупростой группы типа F_4 , где π — подгруппа четвертого порядка в группе Вейля системы корней F_4 , $\hat{N}$ — произвольный представитель класса Пикара. Теорема Клячко позволяет вычислить кохомологические инварианты, используя только структуру модуля $\hat{T}$ рациональных характеров. Следуя его методу, в данной работе получена явная формула для вычисления кохомологического инварианта произвольных модулей четверной группы. С ее помощью доказана тривиальность искомых групп $H^1(\pi, \hat{N})$.

Введение

Как известно, основной задачей алгебраической геометрии является классификация алгебраических многообразий с точностью до изоморфизма, более слабой формой этой задачи является бирациональная классификация многообразий, т.е. классификация с точностью до бирациональной эквивалентности. Важным инструментом при решении последней задачи являются так называемые бирациональные инварианты, т.е. объекты, не меняющиеся при бирациональных изоморфизмах.

И.Р. Шафаревич и его ученик Ю.И. Манин ввели в рассмотрение бирациональный инвариант — класс Пикара проективных моделей, который мы называем основным бирациональным инвариантом. Этот бирациональный инвариант позволяет решать проблему рациональности некоторых алгебраических многообразий. В частности, В.Е. Воскресенским был доказан критерий рациональности алгебраического тора, который в терминах основного бирационального инварианта означает его тривиальность. Наряду с этим

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором В.Е. Воскресенским.

²Кулагина Ирина Владимировна (kulagina@freemail.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

инвариантом вычисляется серия кохомологических бирациональных инвариантов, которые несут более слабую информацию о многообразии, но позволяют устанавливать его нерациональность.

Актуальной проблемой является задача составления таблиц кохомологических инвариантов для максимальных алгебраических торов без аффекта для полупростых алгебраических групп, дополняющих информацию об этих группах, приведенных в книге Бурбаки "Группы и алгебры Ли: Системы корней".

В данной работе вычисляются бирациональные инварианты максимального алгебраического тора исключительной полупростой группы типа F_4 , т.е. 1-когомологии $H^1(\pi, \hat{N})$, где π — подгруппа 4-го порядка в группе Вейля системы корней F_4 .

1. Основной бирациональный инвариант алгебраического тора

Пусть T — алгебраический n -мерный тор, определенный над произвольным полем k , т.е. T есть форма диагональной группы, а именно существует конечное расширение Галуа L/k такое, что $T \otimes_k L \cong G_m^n$. Более точно определим тор T через кольцо регулярных функций $k[T]$. Пусть L — упомянутое выше расширение Галуа поля k с группой Галуа $\Pi = \text{Gal}(L/k)$, L называют полем разложения тора T . Множество всех характеров тора T — это свободная абелева группа $\hat{T}$, на которой действует группа Π . Тогда кольцо регулярных функций $k[T]$ на торе T есть кольцо инвариантов $(L[\hat{T}])^\Pi$, где Π действует на L как группа Галуа, а на $\hat{T}$ как на Π -модуле, причем $\hat{T}$ рассматривается в мультипликативной записи.

Таким образом, задание алгебраического k -тора равносильно заданию двух объектов: поля разложения L с группой Галуа Π и Π -модуля $\hat{T}$. Именно эта двойственность алгебраических торов и модулей Галуа является основным инструментом нашего исследования.

Пусть теперь X — гладкая проективная модель тора T над k . Как показал В.Е. Воскресенский [1], вложение $T_L = T \otimes_k L$ в $X_L = X \otimes_k L$ определяет точную последовательность Π -модулей

$$0 \rightarrow \hat{T} \rightarrow \hat{S} \rightarrow \text{Pic } X_L \rightarrow 0,$$

где $\text{Pic } X_L$ обладает свойством, что $H^{-1}(\pi, \text{Pic } X_L) = 0$, $\forall \pi \in \Pi$, такие модули называются вялыми. Всякий модуль $\hat{N}$ из класса Пикара $[\text{Pic } X_L]$ (класс изоморфных Π -модулей с точностью до добавления пермутационных слагаемых) можно получить, построив точную последовательность Π -модулей конечного ранга

$$0 \rightarrow \hat{T} \rightarrow S \rightarrow \hat{N} \rightarrow 0, \quad (1.1)$$

в которой $\hat{S}$ — пермутационный модуль, а $\hat{N}$ — вялый. Впервые эта последовательность была получена Воскресенским, теперь ее, следуя Сансюку

и Колье-Телену, называют вялой резольвентой модуля $\hat{T}$. Класс Пикара является основным бирациональным инвариантом алгебраического тора.

Вялая резольвента (1.1) позволяет находить основной бирациональный инвариант чисто алгебраически. Наряду с основным бирациональным инвариантом существуют и производные бирациональные инварианты — одномерные когомологии $H^1(\pi, \hat{N})$, $\forall \pi \in \Pi$. Вычисления Воскресенского, Кунявского [4] и Попова [3] показывают, что чаще всего найденный модуль $\hat{N}$ имеет большой ранг, поэтому вычисления 1-когомологий достаточно трудоемки. Воспользуемся результатом Клячко, позволяющим вычислять когомологические инварианты, минуя построение вялой резольвенты, а именно А.А. Клячко доказал следующее утверждение (см. [2]).

Теорема.

$$H^1(\Pi, \hat{N}) = \ker(H^2(\Pi, \hat{T}) \rightarrow \prod_{g \in \Pi} H^2(\langle g \rangle, \hat{T})). \quad (1.2)$$

Важность этой теоремы заключается прежде всего в том, что можно провести вычисления когомологических инвариантов, используя только структуру модуля $\hat{T}$. Правда, следует отметить, что до сих пор вычислительная сила теоремы Клячко еще не имела применения, и, видимо, настоящая работа является одним из первых шагов по использованию формулы (1.2).

2. Когомологический инвариант модулей четверной группы

С этого момента в качестве группы Π мы рассматриваем четверную группу $\Pi = \langle \rho, \mu : \rho^2 = \mu^2 = 1, \rho\mu = \mu\rho \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \rangle$.

Напомним понятия из гомологической алгебры, необходимые для дальнейшего изложения. Группа $H^1(\Pi, \hat{T})$ — это фактор-группа множества скрещенных гомоморфизмов $Z^1(\Pi, \hat{T}) = \{\varphi : \Pi \rightarrow \hat{T} \mid \varphi(g_1 g_2) = g_1 \varphi(g_2) + \varphi(g_1), \forall g_1, g_2 \in \Pi\}$ по подгруппе главных гомоморфизмов $B^1(\Pi, \hat{T}) = \{\varphi : \Pi \rightarrow \hat{T} \mid \varphi(g) = (g - 1)a, a \in \hat{T}, g \in \Pi\}$. Аналогично $H^2(\Pi, \hat{T})$ — фактор-группа группы 2-коциклов $Z^2(\Pi, \hat{T})$, т.е. отображений $\varphi : \Pi \times \Pi \rightarrow \hat{T}$, удовлетворяющих равенству

$$g_1 \varphi(g_2, g_3) - \varphi(g_1 g_2, g_3) + \varphi(g_1, g_2 g_3) - \varphi(g_1, g_2) = 0 \quad (2.1)$$

по подгруппе 2-коцепей $B^2(\Pi, \hat{T}) = \{\varphi(g_1, g_2) = g_1 \psi(g_2) + \psi(g_1) - \psi(g_1 g_2)\}$, где $\psi : \Pi \rightarrow \hat{T}$ — произвольное отображение.

Известно, что $H^1(\Pi, \hat{N})$ — конечная группа. Следовательно, в силу (1.2) нам необходимо найти такие 2-коциклы φ с точностью до 2-кограниц, для которых

1° $m\varphi$ будет являться 2-кограницей, где m — целое число;

2° сужение φ на все циклические подгруппы есть 2-кограница.

Условие 1° на искомые 2-коциклы показывает, что

$$\varphi(g_1, g_2) = g_1\psi(g_2) + \psi(g_1) - \psi(g_1g_2), \quad (2.2)$$

где ψ — произвольное отображение из Π в линейное пространство $\hat{T}_{\mathbb{Q}} = \hat{T} \otimes \mathbb{Q}$. Это означает, что в дальнейшем нам понадобится изучение действия группы Π не только на $\hat{T}$, но и на $\hat{T}_{\mathbb{Q}}$. Соответствующие операторы будем обозначать $\rho_{\mathbb{Q}}$ и $\mu_{\mathbb{Q}}$. Так как мы ищем 2-коциклы, удовлетворяющие условию (2.2) с точностью до 2-кограниц, покажем, что можно считать $\varphi(1, 1) = 0$.

Введем обозначения $\psi(1) = \bar{t}$, $\psi(\rho) = \bar{x}$, $\psi(\mu) = \bar{y}$, $\psi(\rho\mu) = \bar{z}$, т.е. 2-коцикл φ задается следующей четверкой $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, где $\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \hat{T}_{\mathbb{Q}}$. В силу (2.2) для $g_1 = g_2 = 1$ верно $\varphi(1, 1) = \psi(1) = \bar{t}$. Так как $\varphi(1, 1) \in \hat{T}$, то $\bar{t} \in \hat{T}$. Тогда можно рассмотреть 2-кограницу φ' , которая задается такой четверкой $(-\bar{t}, 0, 0, 0)$. Получим, что 2-коцикл $\tilde{\varphi} = \varphi + \varphi'$, который задается следующими значениями $(0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, снова элемент того же класса. Следовательно, можно положить $\psi(1) = 0$, а значит, в силу (2.2), верно и следующее $\varphi(1, 1) = \varphi(1, g) = \varphi(g, 1) = 0$, $\forall g \in \Pi$. Вновь обозначим $\tilde{\varphi}$ за φ .

Далее воспользуемся условием 2° для нахождения искомого 2-коцикла, а именно рассмотрим сужение φ на циклические группы $\langle g : g^2 = e \rangle$. В результате получим следующие равенства $\varphi(1, g) = \varphi(g, 1) = 0$, $\varphi(g, g) = (g_{\mathbb{Q}} + 1)\bar{w}$, где $g \in \Pi$, $\bar{w}$ один из векторов $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$.

Заметим, для того чтобы сужение φ на циклические группы было 2-кограницей, нужно, чтобы существовали такие $x, y, z \in \hat{T}$, что $\varphi(\rho, \rho) = (\rho + 1)x$, $\varphi(\mu, \mu) = (\mu + 1)y$, $\varphi(\rho\mu, \rho\mu) = (\rho\mu + 1)z$.

Вновь можно добавить к φ 2-кограницу φ'' , задаваемую следующей четверкой $(0, -x, -y, -z)$, где $x, y, z \in \hat{T}$. А значит мы получим 2-коцикл $\varphi + \varphi''$ (обозначим снова за φ) того же класса, такой что выполняются условия $(\rho_{\mathbb{Q}} + 1)\bar{x} = 0$, $(\mu_{\mathbb{Q}} + 1)\bar{y} = 0$, $(\rho\mu_{\mathbb{Q}} + 1)\bar{z} = 0$, т.е. $\bar{x} \in \ker(\rho_{\mathbb{Q}} + 1)$, $\bar{y} \in \ker(\mu_{\mathbb{Q}} + 1)$, $\bar{z} \in \ker(\rho\mu_{\mathbb{Q}} + 1)$.

Все приведенные выше рассуждения показывают, что с помощью (2.2) в каждом классе искомого 2-коцикла мы можем выбрать представителя, обладающего свойством

$$\varphi(1, 1) = \varphi(g, 1) = \varphi(1, g) = \varphi(g, g) = 0 \quad \forall g \in \Pi. \quad (2.3)$$

Далее покажем, что любое значение $\varphi(g_1, g_2)$, где $g_1 \neq g_2$, однозначно определяется вектором $\bar{u} \in \hat{T}$. Выпишем эти значения подробно:

$$\varphi(\rho, \mu) = -z + \rho y + x \stackrel{\text{об.}}{=} u_1,$$

$$\varphi(\mu, \rho) = -z + \mu x + y \stackrel{\text{об.}}{=} u_2,$$

$$\varphi(\rho\mu, \rho) = -y + \rho\mu x + z \stackrel{\text{об.}}{=} u_3,$$

$$\varphi(\rho, \rho\mu) = -y + \rho z + x \stackrel{\text{об.}}{=} u_4,$$

$$\varphi(\rho\mu, \mu) = -x + \rho\mu y + y \stackrel{\text{об.}}{=} u_5,$$

$$\varphi(\mu, \rho\mu) = -x + \mu z + y \stackrel{\text{об.}}{=} u_6,$$

где $u_i \in \hat{T}$, т.к. φ — 2-коцикл. Покажем, что u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 однозначно выражаются через u_1 . Воспользуемся равенствами: $\rho x = -x$, $\mu y = -y$, $\rho\mu z = -z$.

$\rho\mu u_1 = \rho\mu(-z + \rho y + x) = -\rho\mu z + \mu y + \rho\mu x = z - y - \mu x = -u_2$, тогда $u_2 = -\rho\mu u_1$,
 $u_3 = -y + \rho\mu x + z = -y - \mu x + z = -u_2$, а значит $u_3 = \rho\mu u_1$,
 $\rho u_1 = \rho(-z + \rho y + x) = -\rho z + y + \rho x = -\rho z + y - x = -u_4$, следовательно $u_4 = -\rho u_1$,
 $u_5 = -x + \rho\mu y + z = -x - \rho y + z = -u_1$, тогда $u_5 = -u_1$,
 $\rho u_6 = \rho(-x + \mu z + y) = -\rho x + \rho y + \rho\mu z = -z + x + \rho y = u_1$, тогда $u_6 = -\rho u_1$.

Следовательно, любой 2-коцикл определяется через $u_1 = -z + \mu x + y$. Так как $y \in \ker(\mu + 1)$, то $y' \stackrel{\text{об.}}{=} \rho y \in \ker(\mu + 1)$; аналогично $z \in \ker(\rho\mu + 1)$, $z' \stackrel{\text{об.}}{=} -z \in \ker(\rho\mu + 1)$; $x' \stackrel{\text{об.}}{=} x \in \ker(\rho + 1)$. Следовательно, любой элемент $u \in \hat{T}$, определяющий 2-коцикл φ , представим в виде $u = x' + y' + z'$.

Обратно: покажем, что любой элемент $u = x' + y' + z' \in \hat{T}$, где $y' \in \ker(\mu + 1)$; $z' \in \ker(\rho\mu + 1)$; $x' \in \ker(\rho + 1)$, определяет 2-коцикл φ . Положим $x' = x$, $y' = \rho y$, $z' = -z$. Действительно, используя указанные чуть выше равенства, получим, что $u = \varphi(\rho, \mu)$. Следовательно, по u мы можем однозначно восстановить четверку векторов $(0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, а значит и коцикл φ . Таким образом, мы показали взаимно однозначное соответствие элементов $u = x' + y' + z' \in \hat{T}$, где $x' \in \ker(\rho + 1)$, $y' \in \ker(\mu + 1)$, $z' \in \ker(\rho\mu + 1)$ и 2-коцикла φ , удовлетворяющего соотношению 2.3.

Множество таких векторов $u \in \hat{T}$ образует подгруппу $Z^2(\hat{T})$ в $\hat{T}$. Причем в $Z^2(\hat{T})$ есть подгруппа $B^2(\hat{T})$, определяющая 2-кограницы, удовлетворяющие условию (2.3). Фактор-группа $Z^2(\hat{T})/B^2(\hat{T})$ изоморфна правой части формулы (1.2). Таким образом, нам осталось описать группы $Z^2(\hat{T})$ и $B^2(\hat{T})$.

Теорема 1. $Z^2(\hat{T}) = \ker(\rho + 1)(\mu + 1)$.

Доказательство.

1. Возьмем $u \in Z^2(\hat{T})$. Он представим в виде $u = x' + y' + z' \in \hat{T}$, где $x' \in \ker(\rho + 1)$, $y' \in \ker(\mu + 1)$, $z' \in \ker(\rho\mu + 1)$. Покажем, что $u \in \ker(\rho + 1)(\mu + 1)$. Подействуем на u элементом $(\rho + 1)(\mu + 1)$:

$$\begin{aligned} (\rho + 1)(\mu + 1)u &= (\rho + 1)(\mu + 1)(x' + y' + z') = \\ &= (\rho + 1)(\mu + 1)x' + (\rho + 1)(\mu + 1)y' + (\rho + 1)(\mu + 1)z' = \\ &= (\mu + 1)(\rho + 1)x' + (\rho + 1)(\mu + 1)y' + (\rho\mu + \rho + \mu + 1)z'. \end{aligned}$$

Т.к. $x' \in \ker(\rho + 1)$, то $(\rho + 1)x' = 0$.

Аналогично $y' \in \ker(\mu + 1)$, то $(\mu + 1)y' = 0$. Тогда продолжим равенство

$$\begin{aligned} (\rho + 1)(\mu + 1)u &= (\rho\mu + 1 + \rho(\rho\mu + 1))z' = (\rho + 1)(\rho\mu + 1)z', \\ \text{но } z' \in \ker(\rho\mu + 1) &\Rightarrow (\rho\mu + 1)z' = 0, \text{ тогда } (\rho + 1)(\mu + 1)u = 0 \\ &\Rightarrow u \in \ker(\rho + 1)(\mu + 1). \end{aligned}$$

2. Пусть теперь элемент $u \in \ker(\rho + 1)(\mu + 1)$. Покажем, что он представим в виде $u = x' + y' + z'$.

Т.к. $u \in \ker(\rho + 1)(\mu + 1) \subset \hat{T}$, то $u \in \hat{T}_{\mathbb{Q}}$, а значит $(\rho_{\mathbb{Q}} + 1)(\mu_{\mathbb{Q}} + 1)u = 0$.

$$\text{Представим элемент } u = \frac{(\mu_{\mathbb{Q}} + 1)u}{2} + \frac{(1 - \mu_{\mathbb{Q}})u}{2}.$$

$$\text{Введем обозначения } x' = \frac{(\mu_{\mathbb{Q}} + 1)u}{2}, \quad y' = \frac{(1 - \mu_{\mathbb{Q}})u}{2}.$$

$$\text{Рассмотрим } (\rho_{\mathbb{Q}} + 1)x' = \frac{(\rho_{\mathbb{Q}} + 1)(\mu_{\mathbb{Q}} + 1)u}{2} = 0 \in \ker(\rho + 1),$$

$$(\mu_Q + 1)y' = \frac{(\mu_Q + 1)(1 - \mu_Q)u}{2} = 0 \Rightarrow y' \in \ker(\mu + 1).$$

В качестве z' возьмем $z' = 0 \Rightarrow u \in Z^2(\hat{T})$

Q.E.D.

Среди элементов $Z^2(\hat{T})$ легко выделить элементы, определяющие 2-кограницу. Множество таких элементов будем обозначать $B^2(\hat{T})$. Любой элемент $u \in B^2(\hat{T})$ представим в виде $u = x' + y' + z'$, где $x' \in \ker(\rho + 1)$, $y' \in \ker(\mu + 1)$, $z' \in \ker(\rho\mu + 1)$, $x', y', z' \in \hat{T}$. Получаем, что $B^2(\hat{T}) \subset Z^2(\hat{T}) \subset \hat{T}$. Тогда $B^2(\hat{T}) = \ker(\rho + 1) + \ker(\mu + 1) + \ker(\rho\mu + 1)$.

Таким образом, каждому вектору $u \in Z^2(\hat{T})$ соответствует 2-коцикл, а всякому $U \in B^2(\hat{T})$ — 2-кограница. Находим классы 2-коциклов с точностью до кограниц: рассматривая фактор-группу $Z^2(\Pi, \hat{T})/B^2(\Pi, \hat{T})$, получаем следующую формулу:

$$\ker(H^2(\Pi, \hat{T}) \rightarrow \prod_{g \in \Pi} H^2(\langle g \rangle, \hat{T})) = \frac{\ker(\rho + 1)(\mu + 1)}{\ker(\rho + 1) + \ker(\mu + 1) + \ker(\rho\mu + 1)}. \quad (2.4)$$

Итак, нами доказана теорема:

Теорема 2.

$$H^1(\pi, \hat{N}) = \frac{\ker(\rho + 1)(\mu + 1)}{\ker(\rho + 1) + \ker(\mu + 1) + \ker(\rho\mu + 1)}. \quad (2.5)$$

3. Когомологический инвариант системы корней типа F_4

Применим полученный результат к Π -модулю специального вида. Пусть G — связная полупростая группа, определенная над полем k , с системой корней $R = R(G)$ типа F_4 . В пространстве $\mathbb{R}^4$ с ортонормированным базисом $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ система корней типа F_4 такова:

$$R = \{\pm e_i, \pm e_i \pm e_j \ (i < j), \ \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\}.$$

Стандартный базис системы корней

$$\alpha_1 = e_1, \alpha_2 = e_2, \alpha_3 = e_3, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$$

порождает целочисленную решетку $\hat{T}_4 = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \rangle$. Известно [5], если $R = F_4$, то $\hat{T}_4 = Q(R) = P(R)$. Группа Галуа Π , действующая на $\hat{T}_4$, — группа Вейля данной системы корней, причем $W = D_3 \rtimes D_4 \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, $|W| = 3^2 \cdot 2^7$.

В данной работе будем рассматривать подгруппы π четвертого порядка силовой 2-подгруппы $\Pi_2 = D_4 \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 = \langle \tau_{-1}, a, b \rangle$ в W , где

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в работе [3] для модуля $\hat{T}_4$ была построена вялая резольвента

$$0 \rightarrow \hat{T}_4 \rightarrow \hat{S} \rightarrow \hat{N} \rightarrow 0,$$

где $\hat{N}$ — вялый модуль ранга 44.

Используя полученную выше формулу (2.5), вычислим $H^1(\pi, \hat{N})$, где π — подгруппа четвертого порядка в Π_2 . Для этого прежде всего выпишем все нециклические подгруппы типа $Z_2 \oplus Z_2$. Найдем их с помощью программы, написанной на языке Pascal. В результате получим 133 различные группы. В силу равенства $H^1(\pi_1, \hat{N}) = H^1(\pi_2, \hat{N})$, если $\pi_1 = g^{-1}\pi_2g$, достаточно вычислить бирациональные инварианты тора T для подгрупп четвертого порядка с точностью до сопряженности. Найденные подгруппы выписаны в таблицу.

Таблица

1	$\langle \tau_{-1}, \tau_{-2} \rangle$	16	$\langle a^2, \tau_{-1}\tau_{-2}\tau_{-3}\tau_{-4}b \rangle$
2	$\langle \tau_{-1}, \tau_{-3} \rangle$	17	$\langle a^2, ba^3 \rangle$
3	$\langle \tau_{-1}, \tau_{-2}\tau_{-3} \rangle$	18	$\langle \tau_{-1}\tau_{-2}, \tau_{-1}\tau_{-3} \rangle$
4	$\langle \tau_{-1}, \tau_{-2}\tau_{-4} \rangle$	19	$\langle \tau_{-1}\tau_{-2}, \tau_{-3}\tau_{-4} \rangle$
5	$\langle \tau_{-1}, \tau_{-2}\tau_{-3}\tau_{-4} \rangle$	20	$\langle \tau_{-1}\tau_{-2}, \tau_{-1}\tau_{-3}\tau_{-4} \rangle$
6	$\langle \tau_{-1}, ba^2 \rangle$	21	$\langle \tau_{-1}\tau_{-2}, ba \rangle$
7	$\langle \tau_{-1}, \tau_{-3}ba^2 \rangle$	22	$\langle \tau_{-1}\tau_{-3}, \tau_{-2}\tau_{-4} \rangle$
8	$\langle b, a^2 \rangle$	23	$\langle \tau_{-1}\tau_{-3}, \tau_{-2}b \rangle$
9	$\langle b, \tau_{-1}\tau_{-3} \rangle$	24	$\langle \tau_{-1}\tau_{-3}, \tau_{-1}\tau_{-2}\tau_{-4} \rangle$
10	$\langle b, \tau_{-2}\tau_{-4} \rangle$	25	$\langle \tau_{-1}\tau_{-3}, \tau_{-2}\tau_{-4}b \rangle$
11	$\langle b, \tau_{-1}\tau_{-2}\tau_{-3} \rangle$	26	$\langle \tau_{-1}\tau_{-3}, \tau_{-3}ba^2 \rangle$
12	$\langle b, \tau_{-1}\tau_{-3}a^2 \rangle$	27	$\langle \tau_{-2}b, \tau_{-1}\tau_{-3}\tau_{-4} \rangle$
13	$\langle b, \tau_{-1}\tau_{-2}\tau_{-3}\tau_{-4} \rangle$	28	$\langle \tau_{-2}b, \tau_{-1}\tau_{-2}\tau_{-3}\tau_{-4} \rangle$
14	$\langle a^2, \tau_{-1}\tau_{-3} \rangle$	29	$\langle \tau_{-1}\tau_{-2}\tau_{-3}\tau_{-4}, ba^3 \rangle$
15	$\langle a^2, \tau_{-1}\tau_{-2}\tau_{-3}\tau_{-4} \rangle$		

Примечание: $\tau_{-2} = a\tau_{-1}a^3, \tau_{-3} = a^2\tau_{-1}a^2, \tau_{-4} = a^3\tau_{-1}a$.

Вычисляя кохомологические инварианты, получаем: используя формулу (2.5), для любой группы $\pi \in \Pi_2, |\pi| = 4$: $H^1(\pi, \hat{N}) = 0$. Заметим, что для циклических подгрупп π $H^1(\pi, \hat{N}) = H^{-1}(\pi, \hat{N}) = 0$, т.к. $\hat{N}$ — вялый модуль. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. Для любой подгруппы $\pi \in \Pi_2$ четвертого порядка

$$H^1(\pi, \hat{N}) = 0.$$

В заключение отметим, что в дальнейшем предполагается продолжить данную работу и вычислить 1-когомологии для всех групп силовской 2-подгруппы.

Литература

- [1] Воскресенский В.Е. Бирациональная геометрия и арифметика линейных алгебраических групп, I // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 1997. №2.
- [2] Клячко А.А. Прямые слагаемые перестановочных модулей и бирациональная геометрия. Арифметика и геометрия многообразий. Самара, 1992.
- [3] Попов С.Ю. Решетки Галуа и их бирациональные инварианты // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 1998. №4.
- [4] Воскресенский В.Е., Кунявский Б.Э. О максимальных торах в полупростых алгебраических группах // Деп. в ВИНТИ 5.03.84, №1269. Куйбышев, 1984.
- [5] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Системы корней. М.: Мир, 1972.

Поступила в редакцию 19/VII/2005;
в окончательном варианте — 19/VII/2005.

BIRATIONAL INVARIANTS OF THE KLEIN FOUR-GROUP MODULES³

© 2005 I.V. Kulagina⁴

In the paper birational invariants $H^1(\pi, \hat{N})$ for the maximal torus T of the connected semisimple group of type F_4 are found. Here π is a four-subgroup of the Weil's group $W(F_4)$, $\hat{N}$ is an arbitrary element of the Picard class. The Klyachko method allows to calculate these invariants by using the structure of the module $\hat{T}$ of rational characters of T only. Following this method the explicit formula which simplifies the calculation of a cohomology invariant for an arbitrary Klein four-group module is obtained. The triviality of the groups $H^1(\pi, \hat{N})$ is proved by using this formula.

Paper received 19/VII/2005.

Paper accepted 19/VII/2005.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. V.E. Voskresenskii.

⁴Kulagina Irina Vladimirovna (kulagina@freemail.ru), Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.