

УДК 669.018.6:539.4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ В МАТЕРИАЛЕ ПРИ ТЕРМОУПРУГОМ МАРТЕНСИТНОМ ПРЕВРАЩЕНИИ РЕВЕРСИВНОГО СИЛОВОГО ЭЛЕМЕНТА¹

© 2005 В.С. Феоктистов²

Разработана методика расчета напряжений в цилиндрических телах при протекании в них термоупругого мартенситного фазового превращения для произвольного закона изменения упругих характеристик материала. Показана возможность использования данной методики для определения условий стабильной работы силового привода из материала с эффектом "памяти" формы на примере малогабаритного высокоэффективного оборудования и инструмента.

В настоящее время все более широкое практическое применение находят силовые и управляющие элементы из сплавов, обладающих эффектом "памяти" формы [7]. Известно, что он основан на фазовом термоупругом мартенситном превращении. Такие сплавы способны при нагреве самопроизвольно принимать одну форму, а при охлаждении другую, производя при этом работу против внешних напряжений, достигающих 600 МПа [5]. Особенно широкие перспективы применения материалов с "памятью" формы открываются при разработке оборудования, позволяющего стабильно воспроизводить линейные перемещения, деформации и усилия в процессе периодического многократного использования. Одно из условий стабильности работы таких устройств — термоупругость прямого и обратного превращения с материале силового элемента. Это условие эквивалентно требованию, согласно которому напряжения, наводимые в объеме материала, не должны превышать предела текучести данного материала.

В статье изложены результаты исследования распределений напряжений и температур в цилиндрическом образце, возникающих при протекании в его объеме термоупругого мартенситного фазового превращения.

Рассмотрим цилиндрический образец радиуса R и длины L ($L \gg 2R$), нагруженный на торцах растягивающими, сжимающими или радиальными усилиями P и нагреваемый (или охлаждаемый) через боковую поверхность

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

²Феоктистов Василий Сергеевич, кафедра строительных, дорожных, путевых машин и технологий машиностроения Самарской государственной академии путей сообщений, 443063, Россия, г. Самара, 1-ый Безымянный пер., 18.

осесимметричным тепловым потоком. В процессе нагрева в объеме материала начинается обратный термоупругий мартенситный переход, приводящий к возникновению в объеме материала неоднородной структурной δ и температурной ε_T деформаций. Расчет напряжений будем проводить для области образца вне зоны краевого эффекта с учетом зависимости параметров материала от температуры. В силу осевой симметрии в этой области макродеформация, макронапряжения, температурное поле и параметры материала будут функциями только координаты r вдоль радиуса цилиндра и времени t . Известно [3, 8], что при термоупругом мартенситном превращении сохраняется когерентность границы образующихся фаз, а это позволяет проводить расчет напряжений в рамках теории упругости. Таким образом, рассмотренная физическая постановка задачи эквивалентна математической модели для осесимметричной задачи термоупругости с параметрами материала, зависящими от координаты r и времени t [4].

Математическая модель поставленной задачи в цилиндрической системе координат будет состоять из уравнения равновесия

$$r \frac{\partial \delta_r}{\partial r} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0, \quad (1)$$

уравнений совместности деформаций

$$r \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

и соотношений Коши

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \omega}{\partial z}, \quad (4)$$

где u и ω — радиальная и осевая компоненты вектора перемещений; ε_r , ε_θ и ε_z — радиальная, тангенциальная и осевая компоненты тензора деформаций; σ_r и σ_θ — радиальная и тангенциальная компоненты тензора напряжений.

Компоненты тензоров деформаций и напряжений связаны соотношениями [3]

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] + \beta, \quad (5)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] + \beta, \quad (6)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] + \beta, \quad (7)$$

где $E(r, t)$, $\nu(r, t)$ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, $\beta = \varepsilon_T + \delta$ — сумма температурной и структурной деформаций, σ_z — осевая компонента тензора напряжений.

Полученная система уравнений (1)–(7) была решена при следующих граничных условиях:

на боковой поверхности цилиндра

$$\sigma_r = 0 \quad (r = R), \quad (8)$$

на торцах цилиндра

$$P = 2\pi \int_0^R \sigma_z r dr. \quad (9)$$

Из (3) получаем, что $\varepsilon_z = \varepsilon_0$ и не зависит от r . Поэтому соотношения (5)–(7) с учетом (4) можно привести к виду

$$\varepsilon_r = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \nu_1 \frac{u}{r} + \nu_1 \varepsilon_0 - (1 + 2\nu_1)\beta \right], \quad (10)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} \left[\frac{u}{r} + \nu_1 \frac{\partial u}{\partial r} + \nu_1 \varepsilon_0 - (1 + 2\nu_1)\beta \right], \quad (11)$$

$$\varepsilon_z = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} \left[\frac{\nu_1}{r} \frac{\partial(ur)}{\partial r} + \varepsilon_0 - (1 + 2\nu_1)\beta \right], \quad (12)$$

где

$$E = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2}, \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1 - \nu}.$$

Выражая из (5), (6), (10) и (11) $\varepsilon_\theta - \varepsilon_r$ через $\sigma_\theta - \sigma_r$, подставляя в (2) и заменяя $\sigma_\theta - \sigma_r$ с помощью (1), получаем

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{E_1}{1 + \nu_1} \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} = 0. \quad (13)$$

Интегрируя (13) по r и проведя необходимые преобразования, будем иметь

$$\frac{\partial(ur)}{\partial r} = (1 - \nu_1)u - r \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} \int_0^r \frac{E_1}{1 + \nu_1} d\left(\frac{u}{r}\right) + cr \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} - r\nu_1 \varepsilon_0 + (1 + 2\nu_1)r\beta, \quad (14)$$

где c — постоянная интегрирования.

Интегро-дифференциальное уравнение (14) будем решать следующим способом. Разобьем область значений $0 \leq r \leq R$ на N достаточно малых участков, в которых E_1 и ν_1 с нужной степенью точности можно считать постоянными. Тогда внутри каждой такой области два первых члена правой части уравнения (14) обращаются в нуль, и интегро-дифференциальное уравнение (14) переходит в дифференциальное уравнение. Интегрируя его, будем иметь

$$u(r)r - u(R_{k-1})R_{k-1} = c \int_{R_{k-1}}^r \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} r dr - \varepsilon_0 \int_{R_{k-1}}^r \nu_1 r dr + \int_{R_{k-1}}^r (1 + 2\nu_1)\beta r dr, \quad (15)$$

где $R_{k-1} \leq r \leq R$, $k = 1, 2, \dots, N$, причем $R_N = R$.

Чтобы исключить константу интегрирования $u(R_{k-1})$, запишем (15) для всех областей с номером $i < k$ в точке $r = R_i$, и все полученные соотношения почленно сложим. Используя неразрывность перемещения $u(r)$, получим

$$u(r) = \frac{c}{r} \int_0^r \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} r dr - \frac{\varepsilon_0}{r} \int_{R_{k-1}}^r \nu_1 r dr + \frac{1}{r} \int_0^r (1 + 2\nu_1)\beta r dr. \quad (16)$$

Для определения постоянной c подставим (16) в (8)

$$c = -\varepsilon_0 \frac{b_2(R)}{b_1(R)} - \frac{b_3(R)}{b_1(R)}, \quad (17)$$

где

$$b_1(r) = \frac{1 + \nu_1(r)}{E_1(r)} - \frac{1}{r^2} \int_0^r \frac{1 + \nu_1^2(\xi)}{E_1(\xi)} \xi d\xi, \quad b_2(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r \nu_1(\xi) \xi d\xi,$$

$$b_3(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r (1 + 2\nu_1(\xi)) \beta(\xi) \xi d\xi.$$

Подставляя (16) и (17) в (12), получим

$$\sigma_z = \varepsilon_0 \left[-\nu_1(r) \frac{b_2(R)}{b_1(R)} + \varepsilon_1(r) \right] + \nu_1(r) \frac{a_3(R)}{a_1(R)} - \beta(r) E_1(r) \frac{1 + 2\nu_1(r)}{1 + \nu_1(r)}. \quad (18)$$

Используя граничное условие (9), находим

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_c + B\beta}{B}, \quad (19)$$

где

$$\sigma_c = \frac{P}{\pi R^2}, \quad B\beta = 2 \frac{b_c(R) - b_2(R)b_3(R)}{b_1(R)}, \quad B = 2 \frac{b_4(R) - b_2^2(R)}{b_1(R)},$$

$$b_4(R) = \frac{1}{R^2} \int_0^R E_1(\xi) \xi d\xi, \quad b_5(R) = \frac{1}{R^2} \int_0^R \xi \beta(\xi) E_1(\xi) \frac{1 + 2\nu_1(\xi)}{1 + \nu_1(\xi)} d\xi.$$

Подставив (19) в (18), получим окончательное соотношение, позволяющее рассчитывать распределение осевых напряжений при заданных зависимостях $E_1(r)$, $\nu_1(r)$ и $\beta(r)$.

Используя (16)–(19), находим

$$\sigma_r(r) = \frac{E_1(r)}{1 + \nu_1(r)} \left[\varepsilon_0(R) b_2(r) - \frac{b_2(R) b_1(R)}{b_1(R)} + \frac{b_3(R) b_1(R)}{b_1(R)} - b_3(r) \right], \quad (20)$$

$$\sigma_\theta(r) = -\sigma_r(r) + \sigma_z(r) - \varepsilon_0(R) \left[\frac{b_2(r)}{b_1(R)} + \frac{E_1(r)}{1 + \nu_1(r)} \right] + \frac{b_3(R)}{b_1(R)}. \quad (21)$$

После подстановки (18), (20) и (21) в (1) убеждаемся, что полученные соотношения точно удовлетворяют уравнению равновесия и граничным условиям. В случае постоянных E и ν соотношения (18)–(21) совпадают с известными выражениями [4, 1]. Необходимо отметить, что соотношения (18)–(21), полученные из точного решения задачи термоупругости при произвольном законе изменения E , ν и β , отличны от аналогичных соотношений, приведенных в [1] и полученных приближенным методом. Анализ показывает, что соотношения в [1] имеют ограниченную область применения и в ряде случаев могут приводить к существенной погрешности в расчетах.

Для нахождения распределения напряжений были проведены экспериментальные исследования по определению E , ν и β . Эти параметры измерялись на цилиндрических образцах из никель-титанового сплава ТН-1

диаметром 2 мм и длиной 25 мм в условиях нагрева с интенсивностью изменения температуры 0,7 К/с.

Зависимость структурной деформации от нагрузки и температуры определялась на машинах АИМА-5-2, МТВ-10, в специально сконструированных и изготовленных приспособлениях, коэффициенты линейного расширения измерялись на dilatометре. Модуль Юнга определялся динамическим резонансным методом по методике [2]. Методика измерения ν изложена также в [2].

Результаты проведенных измерений представлены на рис. 1–5. значения коэффициентов линейного расширения составили $14,2 \cdot 10^{-6}$ и $6,1 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹ для высоко- и низкотемпературной фаз материала соответственно.

Расчет напряжений, возникающих в цилиндре, производился следующим образом. Рассчитывалось распределение температуры по сечению цилиндра на основании результатов работы [4]. Например, для случая нагрева силового элемента через боковую поверхность распределение температуры имеет вид

$$T = T_0 + \frac{qR}{\lambda} \left[\frac{2at}{R^2} - \frac{1}{4} \left(1 - 2\frac{r^2}{R^2} \right) \right], \quad (22)$$

где T_0 — начальная температура образца, q — плотность теплового потока на поверхности образца, λ и a — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности соответственно. По соотношению (22) и экспериментальным зависимостям (рис. 1 и 2) определялось распределение упругих постоянных по сечению цилиндра, а полученные их значения использовались для численного интегрирования по соотношениям (18)–(21). В расчетах область интегрирования разбивалась на 30 точек.

Результаты расчета $\sigma_i(r)$ в цилиндре диаметром 10 мм представлены на рис. 3, распределение напряжений соответствует моменту времени, при котором температура в точке $r = 0,2R$ равна температуре начала обратного мартенситного превращения, а температура поверхности образца больше этого значения на два градуса.

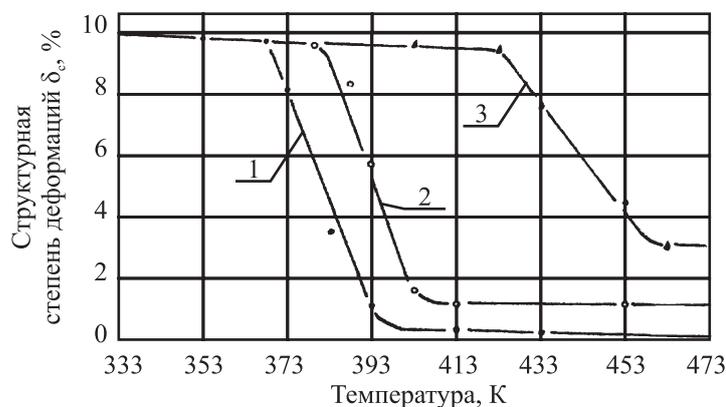


Рис. 1. Структурная деформация образца в зависимости от температуры нагрева и внешних растягивающих напряжений σ_c : 1 — 0 МПа; 2 — 100 МПа; 3 — 300 МПа

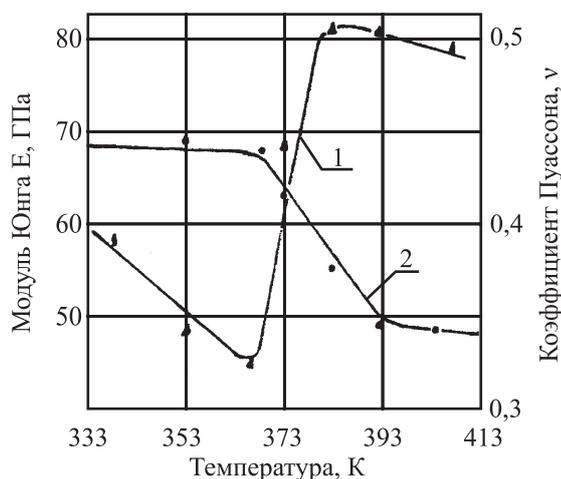


Рис. 2. Модуль Юнга E (кривая (1)) и коэффициент Пуассона ν (кривая (2)) образца в зависимости от температуры нагрева

Исследования показали (рис. 3, 4), что при обратном мартенситном превращении в зависимости от диаметра образца, температурного градиента по его сечению и внешних растягивающих, сжимающих или радиальных усилий интенсивность напряжений в силовом элементе изменяется в широких пределах и может достигать предела текучести материала ($\sigma_T=320$ МПа). Кроме того, максимальными по абсолютной величине являются осевые напряжения σ_z (рис. 5), причем при нагреве их максимальная величина достигается на внешней поверхности, а при охлаждении на внутренней. Поэтому при разработке оборудования для периодического многократного использования необходимо провести по предложенной методике предварительные расчеты, устанавливающие взаимосвязь геометрических размеров силового элемента с максимальными развиваемыми усилиями и

максимальным градиентом температуры по его сечению. Анализ результатов расчета и экспериментов показал их хорошую сходимость. Предложенная методика была использована для разработки и изготовления оборудования с силовым приводом из материала ТН-1.

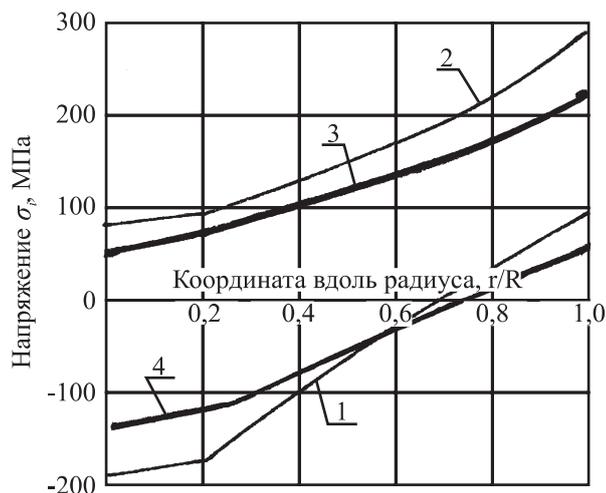


Рис. 3. Распределение интенсивности напряжений по радиусу в зависимости от внешних растягивающих напряжений: 1 — $\sigma_c = 0$; 2 — $\sigma_c = 200$; МПа и внешних сжимающих напряжений: 3 — $\sigma_c = 0$; 4 — $\sigma_c = 200$ МПа

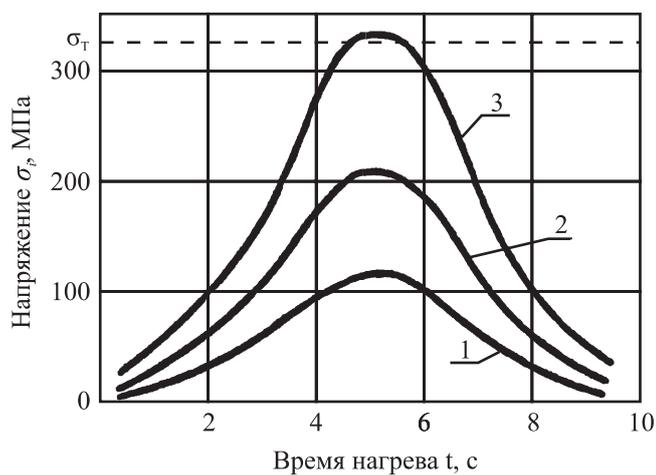


Рис. 4. Изменение интенсивности напряжения в зависимости от времени нагрева для различных величин теплового потока: 1 — $q = 1,0 \cdot 10^3$ Вт/м²; 2 — $q = 1,5 \times 10^3$ Вт/м²; 3 — $q = 4,0 \cdot 10^3$ Вт/м² (растяжение)

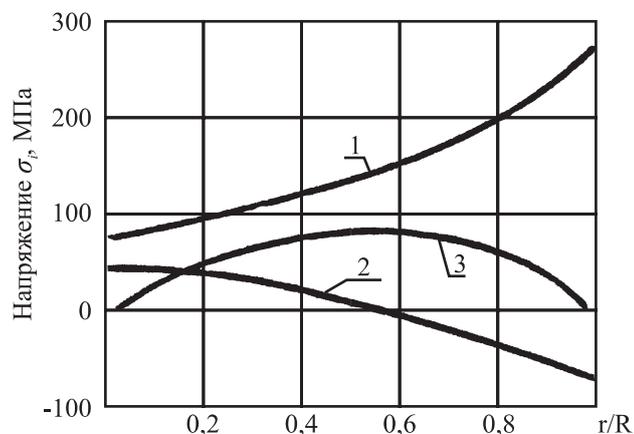


Рис. 5. Распределение напряжений по радиусу силового элемента при нагреве в момент времени $t = 10$ с ($\sigma_c = 200$ МПа): кривая 1 — осевые напряжения σ_z ; кривая 2 — тангенциальные напряжения σ_θ ; кривая 3 — радиальные напряжения σ_r (растяжение)

Технические характеристики разработанного, изготовленного и успешно испытанного оборудования представлены в табл. 1 и 2, а общий вид пресса на рис. 6.

Таблица 1

**Технические характеристики прессов с силовым приводом
из сплава с памятью формы ТН-1**

Номинальное усилие пресса, кН	Ход ползуна		Габаритные размеры, мм	Масса, кг	Мощность электронагревателя, кВт	Производительность при охлаждении воздухом, цикл/мин
	свободный	рабочий				
100	30	6	465	40	0,3...0,4	5...6
			384			
			250			
200	5	5	295	42	0,5...0,6	2...3
			224			
			220			
1000	50	30	1100	800	1,0...1,2	2
			600			
			420			

Разработанный класс прессового оборудования существенно меньше по габаритам и весу своих аналогов, значительно меньше потребляет электрической энергии, позволяет осуществить процесс механизации и автоматизации с наименьшими затратами, экономит производственные площади.

Таблица 2

Технические характеристики ручного инструмента с силоприводом из сплава ТН-1

Наименование инструмента	Развиваемое усилие, кН	Габаритные размеры, мм	Масса, кг	Мощность эл. нагревателя, Вт
Инструмент для пробивки отверстий и расклепывания заклепок	50	280 75 50	1,6	150
Устройство для затяжки резьбовых соединений	80	150 50	1,2	140

Разработанный новый тип ручного инструмента позволяет выполнить широкий класс монтажно-сборочных работ, таких как пережатие трубопроводов, резка, пробивка отверстий, их обработка поверхностно-пластическим деформированием, постановка и расклепывание заклепок, затяжка резьбовых соединений.

Малые габариты инструмента и большие развиваемые усилия предполагают высокую эффективность использования оборудования такого типа в условиях ограниченного пространства.

Небольшая мощность электрического нагревателя позволяет экономить и эффективно использовать ограниченный запас электрической энергии в случае питания от электробатарей.

Основные выводы

1. Разработан теоретический метод расчета напряжений и деформаций, индуцированных температурным полем в цилиндрическом силовом элементе из материала с памятью формы, при которых ни в одной его точке не возникают зоны пластичности.

2. Установлено, что максимальными по абсолютной величине являются осевые напряжения σ_z , причем в зависимости от величины рабочего напряжения, интенсивности нагрева или охлаждения, геометрических параметров силового элемента интенсивность напряжений σ_i может достигать предела текучести материала и приводить к необратимым изменениям формы.

3. Полученные соотношения позволили установить взаимосвязь между усилиями, температурами и геометрическими параметрами силового элемента, при которых ни в одной его точке не возникают зоны пластичности, это дает возможность многократно и стабильно воспроизводить свои размеры силовому элементу.

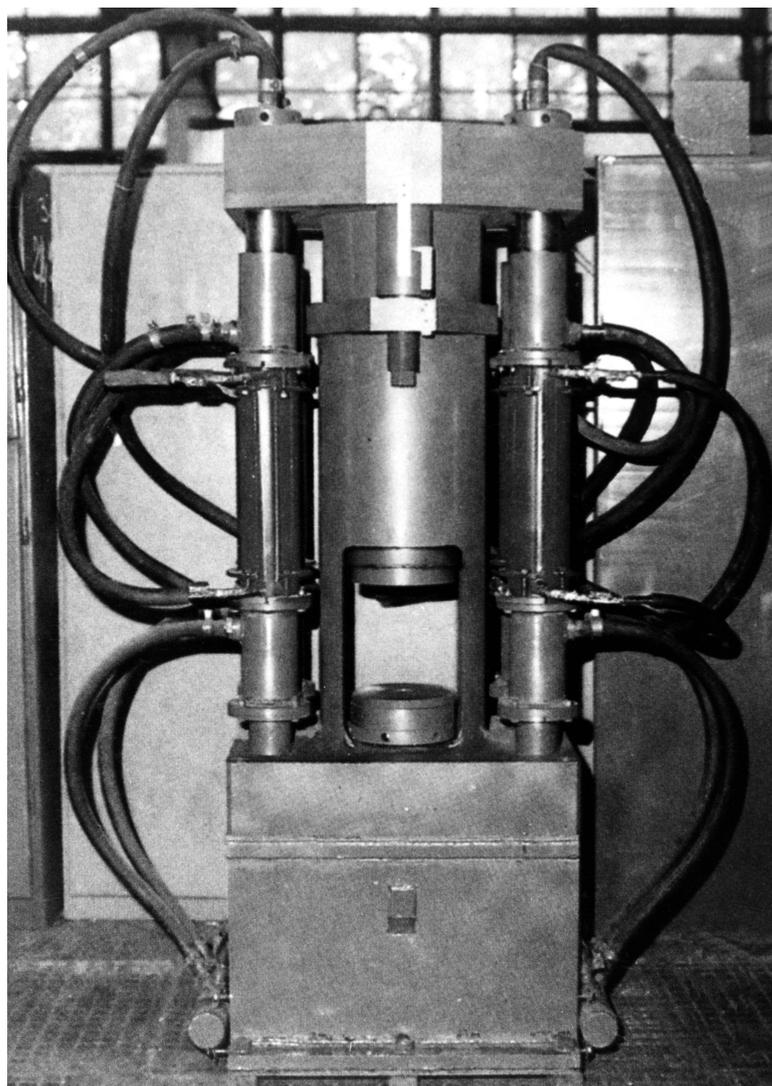


Рис. 6. Общий вид пресса с силовым приводом из сплава с памятью формы ТН-1
усилием 1000 кН

4. Разработан и изготовлен комплекс оборудования и инструмента с силовым приводом из сплава с памятью формы ТН-1, в котором силовой элемент многократно совершает работу против внешних усилий.

Литература

- [1] Абрамов В.В. Остаточное напряжение и деформации в металлах. М.: Машиниздат, 1963. 355 с.
- [2] Барвинок В.А., Богданович В.И. Определение упругих характеристик акустическим методом // Известия вузов. Машиностроение. 1980. №6.
- [3] Богачев И.Н. и др. Статистическое материаловедение. М.: Металлургия, 1984. 176 с.
- [4] Коваленко А.Д. Термоупругость. М.: Высшая школа, 1975. 216 с.
- [5] Корнилов И.И., Белоусов О.К., Качур Е.В. Никелид титана и другие сплавы с памятью формы. М.: Наука, 1977. 180 с.
- [6] Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 599 с.
- [7] Тихонов А.С., Герасимов А.П., Прохорова И.И. Применение эффекта памяти формы в современном машиностроении. М.: Машиностроение, 1981.
- [8] Хачатурян А.Г. Теория фазовых превращений и структура твердых растворов. М.: Наука, 1974. 384 с.

Поступила в редакцию 13/VI/2005;
в окончательном варианте — 13/VI/2005.

STRESS DISTRIBUTION IN A SOLID UNDER THERMO-ELASTIC MARTENSITIC PHASE TRANSITION IN A BI-DIRECTIONAL POWER-DRIVE³

© 2005 V.S. Feoktistov⁴

Computational techniques for stress distribution in cylindrical solids under thermo-elastic martensitic phase transition are proposed in the case of arbitrary thermo-elastic response. Applicability of the mentioned techniques to establish steady-state conditions for a power-drive made of a shape memory alloy is demonstrated by examples of highly effective small equipment and instruments.

Paper received 13/VI/2005.

Paper accepted 13/VI/2005.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Y.N. Radayev.

⁴Feoktistov Vasily Sergeevich, Dept. of Building and Road Machines and Machine Industry Technologies, Samara State Academy of Railway Communications, Samara, 443066, Russia.