УДК 539.3, 539.11

О КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СВЕРХПЛАСТИЧНОСТИ[1]

© 2005 Я.И. Рудаев, Д.А. Китаева[2]

Рассматривается задача построения кинетических уравнений в рамках модели, пригодной для описания деформационного поведения материалов в широких температурно-скоростных диапазонах, включая интервал сверхпластичности.

Рассматривается задача формулировки соотношений между напряжениями, температурой и кинематическими характеристиками при деформировании промышленных алюминиевых сплавов в широких температурно-скоростных диапазонах, включая сверхпластичность. Математическая модель однородной осевой высокотемпературной деформации, включая сверхпластичность, основана на следующих положениях.

1. Сверхпластичность имеет место в определенных термомеханических условиях, в которых возможна и превалирует реализация механизма зернограничного проскальзывания. Последнее облегчается формированием ультрамелкозернистой структуры в процессе нагрева и деформации и связано со структурным превращением — динамической рекристаллизацией. В процессе динамической рекристаллизации возникает равноосная микроструктура с очень мелким зерном, примерно совпадающим по размерам с субзернами. Так создается структурная ситуация, способствующая осуществлению зернограничного проскальзывания и, следовательно, проявлению сверхпластических свойств. Указанная ситуация является промежуточным состоянием между деформированным и крупнозернистым рекристаллизованным.

2. Сверхпластичность может быть интерпретирована как явление, происходящее в условиях неравновесной (возбужденной) динамической структуры с возникновением аморфного состояния границ, стимулирующего зернограничное проскальзывание. Макропроявление структурной неравновесности заключается в возникновении неоднозначности напряжения по отношению к скорости деформации и температуре и, естественно, в появлении "особых" точек, соответствующих границам устойчивости. Подобное характерно для многомерных структурных фазовых переходов [1, 2].

---

[1]Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

[2]Рудаев Яков Исакович, Китаева Дарья Анатольевна (dkitaeva@krsu.edu.kg), кафедра механики Кыргызско-Российского славянского университета, 720000, Кыргызстан, г. Бишкек, ул. Киевская, 44.

3. Структурные изменения в процессе динамической рекристаллизации носят необратимый характер.

Принято считать целесообразным привлечение для моделирования динамической сверхпластичности методов математической теории катастроф.

Из условия качественной идентичности экспериментальным данным выбрана "потенциальная" функция в форме катастрофы сборки с учетом влияния внешнего поля

$$\Phi(\eta,\beta,q) = \frac{1}{4}m_0\eta^4 + \frac{1}{2}\beta(\xi)\eta^2 - q\eta. \tag{1}$$

Здесь введены обозначения

$$q = \frac{\sigma}{\sigma^*} - 1; \quad \eta = \frac{\dot\varepsilon}{\dot\varepsilon^*} - 1; \quad \xi = \frac{\theta - \theta_c^b}{\theta_c^t - \theta_c^b}, \tag{2}$$

$m_0 \sim \mathrm{const}$, $\beta = \beta(\xi)$ — функция температуры.

Стандартной редукцией (2) вводится связь описания процесса деформации с теорией катастроф, причем β, q определяют семейство управляющих параметров, а η принадлежит роль параметра порядка. Поскольку $\eta = \eta(\dot\varepsilon, \theta)$, то, следовательно, параметр порядка должен рассматриваться как коллективная мода.

Из (2) следует, что $\sigma^* = \sigma^*(\theta)$, $\dot\varepsilon^* = \dot\varepsilon^*(\theta)$, отвечающие точкам перегиба изотерм "напряжение – скорость деформации" (рис. 1), могут рассматриваться как альтернативные внутренние параметры состояния, ответственные за термическую историю.

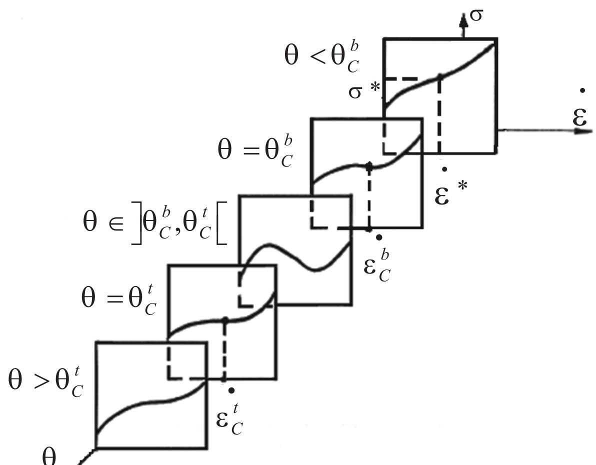

Рис. 1. Качественное представление экспериментальных зависимостей "напряжение – скорость деформации" в различных температурных диапазонах

Укажем, что

$$\dot\varepsilon_c^b = \dot\varepsilon(\theta_c^b), \quad \dot\varepsilon_c^t = \dot\varepsilon(\theta_c^t). \tag{3}$$

Уравнение состояния получено минимизацией (1) в виде

$$q = m_0\eta^3 + \beta(\xi)\eta. \tag{4}$$

В рамках представлений о функции (1), как о морсовской [3], можно утверждать, что при $\beta > 0$ ($\xi \ni]0,1[$) изменений структурного характера в деформируемом материале не происходит. Условие $\beta < 0$ ($\xi \in]0,1[$) соответствует структурно неустойчивому состоянию среды. Переходным состояниям отвечает равенство $\beta = 0$.

Качественная картина, отражающая влияние знака управляющего параметра β на характер кривых $q - \eta$, представлена на рис. 2.

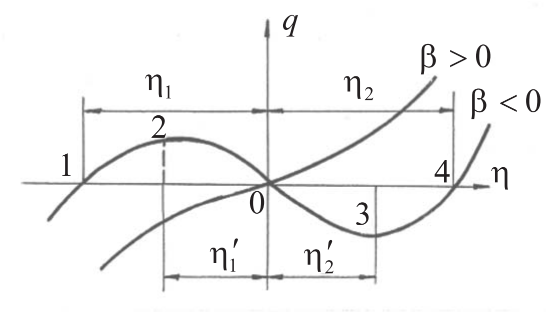

Рис. 2. Влияние знака управляющего параметра β на характер кривых $q - \eta$

Значения параметров порядка $\eta_{1,2}$ и, следовательно, скоростей деформаций, ограничивающих при $\xi \in]0,1[$ область структурных изменений, найдены с привлечением правила Максвелла (рис. 3), которое трансформируется в равенство $q = 0$. С учетом (2), (4) получим

$$\eta_{1,2} = \mp\left(-\frac{\beta}{m_0}\right)^{1/2}, \quad \dot{\varepsilon}_c^{L,R} = \dot{\varepsilon}^*\left[1 \mp \left(-\frac{\beta}{m_0}\right)^{1/2}\right]. \tag{5}$$

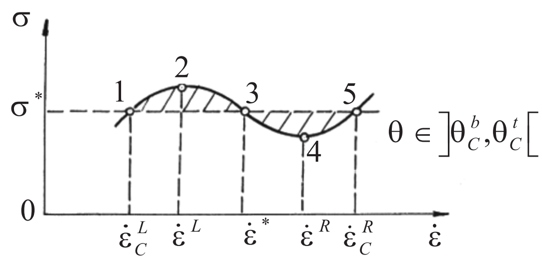

Рис. 3. Фрагмент фазовой диаграммы

Ограничения по параметрам порядка $\eta_{1,2}^c$ и скоростям деформации на диапазон проявления сверхпластических свойств установим с привлечением (1), (2). Имеем

$$\eta_{1,2}^c = \mp\left(-\frac{\beta}{m_0}\right)^{1/2}; \dot{\varepsilon}_c^{L,R} = \dot{\varepsilon}^*\left[1 \mp \left(-\frac{\beta}{m_0}\right)^{1/2}\right]. \tag{6}$$

Введение управляющих параметров хорошо согласуется с упомянутой выше самоорганизацией через их изменение. Действительно, алюминиевые сплавы переходят из исходного состояния в рекристаллизованное через сильные структурные флуктуации, ответственность за реализацию которых можно возложить на параметр β. Укажем, что соотношение (4) удовлетворяет условиям перехода в сверхпластическое состояние [4].

Управляющий параметр β введен не зависящим от скорости деформации. Поэтому соответствующее эволюционное уравнение представимо в форме

$$\frac{d\beta}{dt} = \dot{\xi} f(\beta, q), \tag{7}$$

где $\dot{\xi} = d\xi/dt$ — скорость возрастания нормированной температуры.

Будем считать $f(\beta, q)$ функцией, характеризующей чувствительность материала к структурным превращениям. При этом вне интервала указанных превращений ($\xi \ni]0,1[$) функция $f(\beta, q)$ меняется слабо и резко возрастает при $\xi \in]0,1[$. Кроме этого, при $\xi \ni]0,1[$ имеем $f_t'(\beta, q) < 0$ и $f_t'(\beta, q) > 0$ при $\xi \in]0,1[$. В критических точках $f_t'(0, q) = 0$. Далее полагаем, что $f(\beta, q)|_{\xi<1/2} < 0$; $f(\beta, q)|_{\xi=1/2} = 0$; $f(\beta, q)|_{\xi>1/2} > 0$, причем значение $\xi = 1/2$ соответствует середине температурного интервала сверхпластичности.

Альтернативные внутренние параметры состояния σ^*, $\dot{\varepsilon}^*$ зависят от температуры, т.е. чувствительны к происходящим структурным изменениям. Следовательно, их эволюцию можно проследить посредством параметра β.

Пусть при некотором значении $\beta = s$ внутренний параметр $\sigma^* = \sigma^*(s)$. Допустим, что изменению β на величину $d\beta$ параметр σ^* откликается изменением на величину, пропорциональную σ^*. Поэтому положим

$$d\sigma^* = \sigma^* K(\beta - s) d\beta, \tag{8}$$

где $K(\beta - s)$ — ядро, существенно зависящее от температуры.

Решение уравнения (8) запишем в виде

$$\ln \frac{\sigma^*}{\sigma(s)} = \int_s^\beta K(\beta - s) d\beta. \tag{9}$$

Приняв ядро экспоненциального вида $(K(\beta - s) = A_0[\exp(\beta - s))$, из (9) получим

$$\ln \frac{\sigma^*}{\sigma(s)} = A_0[\exp(\beta - s) - 1], \tag{10}$$

где A_0 — постоянная материала.

Продифференцировав (10) по времени, можем записать следующее кинетическое уравнение для параметра σ^*

$$\frac{d \ln \sigma^*}{dt} = A_0 \frac{d\beta}{dt} \exp(\beta - s). \tag{11}$$

Укажем, что уравнение (11) сводится к $d \ln \sigma^*/dt = 0$ при $\xi = 1/2$.

Далее полагаем, что связь между параметрами σ^* и $\dot{\varepsilon}^*$ можно записать следующим образом:

$$\frac{d \ln \sigma^*}{d \ln \dot{\varepsilon}^*} = \lambda^*(\xi). \tag{12}$$

Для установления вида функции $\lambda^*(\xi)$ воспользуемся условием отсутствия деформационного упрочнения ($\partial\sigma/\partial\bar{\varepsilon} = 0$), которое при достаточно медленном процессе ($d\eta = -(1+\eta)d\ln\dot{\varepsilon}^*$) преобразуется к линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\beta}{d\eta} + \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1-\lambda^*}{\lambda^*}\right)\frac{\beta}{1+\eta} = \frac{1+m_0\eta^3}{\lambda^*\eta(1+\eta)}. \tag{13}$$

Интеграл уравнения (13), если учесть, что $q|_{\eta=0} = 0$, имеет вид

$$\beta = \frac{(1+\eta)^{1/\lambda^*}}{\eta}\left[1 - (1+\eta)^{1/\lambda^*}(1+m_0\eta^3)\right]. \tag{14}$$

Разрешая (14) относительно λ^*, получим

$$\lambda^* = \frac{\ln(1+\eta)}{\ln(1+m_0\eta^3+\beta\eta)}. \tag{15}$$

Полагая $\eta = 0$ и раскрывая неопределенность, будем иметь

$$\lambda^* = \beta^{-1}. \tag{16}$$

В итоге кинетическое уравнение для параметра $\dot{\varepsilon}*$ может быть записано в форме

$$\frac{d\ln\dot{\varepsilon}^*}{dt} = A_0\beta\frac{d\beta}{dt}\exp(\beta - s). \tag{17}$$

Итак, предложена модель связи между напряжениями, температурой и кинематическими переменными, включая диапазоны сверхпластичности, для случая простого растяжения и сжатия. При этом уравнение состояния записано в конечной форме (1), (2) и дополнено кинетическими уравнениями для управляющего параметра (7) и внутренних параметров состояния (11), (17). Указанные соотношения пригодны для математического описания конкретных закономерностей деформирования при наличии явного выражения функции чувствительности материала к структурным превращениям, требования к которой сформулированы выше. В качестве варианта функции $f(\beta,q)$ можно выбрать следующее выражение:

$$f(\beta,q) = q_0(1-\beta)^{-\alpha}\frac{\xi - 1/2}{1+m^2(\xi-1/2)^2}. \tag{18}$$

где q_0, α, m — постоянные.

Выполнение условий $\beta|_{\xi=0}$; $f'_t(\beta,q)|_{\xi=0} = 0$ приводит к равенству

$$\frac{m^2}{4} = \frac{\alpha q_0}{4} + 1. \tag{19}$$

Полагая теперь $\mu = m^2/4 = 1 + \alpha q_0/4$, получим наглядное физическое представление (18) в форме

$$f(\beta,q) = \frac{4}{\alpha}\frac{\mu-1}{\mu+1}\left[\Gamma(\xi) - \frac{1}{2}\right]. \tag{20}$$

Здесь введено обозначение

$$\Gamma(\xi) = (1-\beta)^{-\alpha}\frac{1+\mu}{2}\frac{2\xi-1}{1+\mu(2\xi-1)^2}+\frac{1}{2}. \tag{21}$$

Функцию $\Gamma(\xi)$ при $\beta < 0$ ($\xi \in]0,1[$) можно рассматривать как степень полноты фазового перехода, причем очевидно, что $\Gamma(0) = 0$; $\Gamma(1) = 1$.

Подстановка (20) в (7) с последующим интегрированием позволяет для $\beta = \beta(\xi)$ записать трансцендентное уравнение

$$(1-\beta)^{1+\alpha} = 1 - \frac{1+\alpha}{2\alpha}\frac{\mu-1}{\mu}\ln\frac{1+\mu(2\xi-1)^2}{1+\mu}. \tag{22}$$

На основании (21) несложно установить скорость развития фазового перехода по температуре, которая будет равна

$$\Gamma'(\xi) = \frac{(1+\mu)(1-\beta)^{-\alpha}}{[1+\mu(2\xi-1)^2]^2}[1-\mu(2\xi-1)^2+(1-\beta)^{-\alpha-1}(\mu-1)(2\xi-1)^2]. \tag{23}$$

Легко видеть, что $\Gamma'(0) = \Gamma'(1) = 1$, а при $\xi = 1/2$ функция (23) принимает максимум

$$\max\Gamma' = \Gamma'(1/2) = (\mu+1)(1-\beta^*)^{-\alpha}, \tag{24}$$

причем для определения β^* имеем уравнение

$$(1-\beta^*)^{-\alpha} = 1 - \frac{1+\alpha}{2\alpha}\frac{\mu-1}{\mu}\ln\frac{1}{1+\mu}. \tag{25}$$

При сопоставлении теоретических и опытных данных ограничимся рассмотрением диаграмм $q-\eta$ (нормированные напряжения и скорость деформации). Это объяснимо, поскольку уравнение состояния (1), (2) включает в себя управляющий и внутренние параметры, существенным образом связанные с функцией чувствительности среды к структурным превращениям. Заметим, что модель содержит четыре материальных константы — m_0, A_0, α, μ.

Получено удовлетворительное совпадение теоретических и экспериментальных данных. Числовые значения постоянных модели для некоторых алюминиевых сплавов приведены в [5].

Литература

[1] Гуфан Ю.М. К теории фазовых переходов, характеризуемых многомерным параметром порядка // ФТТ. 1971. Т. 13. С. 225–231.

[2] Александров К.С. и др. Фазовые переходы в кристаллах галлоидных соединений АВХ. Кристаллизация, структурные и магнитные превращения. Новосибирск: Наука, 1981. 266 с.

[3] Горынин И.В., Рудаев Я.И., Чашников Д.И. К вопросу об аналитических условиях начала сверхпластичности // Судостроительная промышленность. Сер. Металловедение. Металлургия. 1987. Вып. 5. С. 28–31.

[4] Рудаев Я.И. О фазовых переходах в сверхпластичности // Проблемы прочности. 1990. №10. С. 50–54.

[5] Kitaeva D.A., Rudaev Y.I. About kinetic equations of dynamic superplasticity model // XXXI Summer School "Advanced Problems in Mechanics". St. Petersburg, 2003. P. 172–176.

Поступила в редакцию 27/*IX*/2004;
в окончательном варианте — 27/*IX*/2004.

KINETIC EQUATIONS FOR A DYNAMIC SUPERPLASTICITY MODEL[3]

© 2005 Y.I. Rudaev, D.A. Kitaeva[4]

A problem of formulating kinetic equations in the framework of model suitable for the description of materials deformation in wide temperatures and rates of deformation ranges (including interval of superplasticity) is considered.

Paper received 27/*IX*/2004.
Paper accepted 27/*IX*/2004.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Y.N. Radayev.

[4]Rudaev Yakov Isakovich, Kitaeva Daria Anatolyevna (dkitaeva@krsu.edu.kg), Dept. of Mechanics, Kyrgyz–Russian Slavic University, Bishkek, 720000, Kyrgyzstan.