

УДК 539.374

О t -ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

© 2005 Ю.Н. Радаев¹ В.А. Гудков²

Рассматривается проблема определения замены независимых переменных в уравнениях в частных производных трехмерной задачи теории идеальной пластичности (для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Треска) с целью приведения этих уравнений к максимально простой нормальной форме Коши. Исходная система уравнений представлена в изостатической системе координат и является существенно нелинейной. Сформулирован критерий максимальной простоты нормальной формы Коши. Найдена система координат, приводящая исходную систему уравнений к максимально простой нормальной форме Коши. Полученное условие того, что система уравнений принимает максимально простую нормальную форму, сильнее, чем условие t -гиперболичности Петровского, если под t понимать каноническую изостатическую координату, поверхности уровня которой образуют в пространстве слои, нормальные полю главных направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному напряжению.

1. Постановка задачи

Уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Треска, впервые были получены Д.Д. Ивлевым в 1959 г. (см. [1, 2]). Им было показано, что задача является формально статически определимой, если граничные условия заданы в напряжениях. Уравнения равновесия могут быть формально рассмотрены независимо от кинематических уравнений. Они являются квазилинейными и принадлежат к гиперболическому типу, поэтому можно вести речь о характеристиках, которые, как показывают вычисления, касаются площадок максимальных касательных напряжений.

¹Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

²Гудков Василий Александрович (goodkov@ssu.samara.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Формулировка пространственных уравнений теории пластичности Д.Д. Ивлева в координатной сетке линий главных напряжений найдена в [3]. Уравнения при этом становятся существенно нелинейными.

Задача численного решения системы дифференциальных уравнений в частных производных естественным образом приводит к проблеме представления этой системы в нормальной форме Коши и формулировки условий Куранта—Фридрихса. С этой проблемой также непосредственно связана задача классификации и определения характеристических направлений. Дело в том, что гиперболическая квазилинейная система дифференциальных уравнений в частных производных, представленная в характеристических переменных, обладает тем свойством, что для нее не существует нормальной формы Коши ни по одной из независимых переменных. Уравнения в частных производных трехмерной задачи математической теории идеальной пластичности, представленные в изостатической координатной сетке, существенно нелинейны, поэтому только что сформулированный признак к ним неприменим. Для осесимметричной задачи задачи теории пластичности при использовании критерия текучести Треска проблема приведения к максимально простой нормальной форме Коши рассматривалась в работе [4].

Настоящая работа посвящена приведению (с помощью замены независимых переменных) к максимально простой нормальной форме Коши уравнений трехмерной задачи теории пластичности с критерием текучести Треска, представленных в изостатических координатах, решению вопроса о классификации указанных уравнений и исследованию корректности постановки задачи Коши.

Общая теория пространственной задачи математической теории пластичности, основанная на представлении о расслоенности поля напряжений и возможности преобразования соотношений пространственной задачи к изостатическим координатам, изложена в [5]. В этой же работе приводится вывод уравнений равновесия пространственного напряженного состояния в координатной сетке линий главных напряжений.

Для ребра призмы Треска, определяемого условием $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$ (k — предел текучести при сдвиге), уравнения равновесия можно представить в форме одного векторного уравнения

$$\operatorname{grad} \sigma_3 \mp 2k \operatorname{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{n}$ — единичное векторное поле, имеющее направление главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему (наименьшему) собственному значению σ_3 тензора напряжений. Уравнение (1.1) квазилинейно и принадлежит к гиперболическому типу.

Ключевым для анализа уравнения (1.1) выступает условие расслоенности векторного поля $\mathbf{n}$ в зоне пластического течения. Для разрешимости уравнения (1.1) необходима расслоенность векторного поля $\mathbf{n}$, т.е. выполнение условия $\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n} = 0$, а с расслоенным полем естественным образом

связано каноническое преобразование координат (см. [5])

$$x_i = f_i(\omega^1, \omega^2, \omega^3) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.2)$$

где ω^j — канонические изостатические координаты, причем поверхности $\omega^3 = \text{const}$ являются слоями поля $\mathbf{n}$.

Отображающие функции f_i должны удовлетворять следующей системе уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} + \frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} + \frac{\partial f_2}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} = 0, \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^2} - \frac{\partial f_3}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^2} \right) \frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} + \left(\frac{\partial f_3}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^2} \right) \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} + \\ + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^2} - \frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^2} \right) \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} = 1. \end{cases} \quad (1.3)$$

Как показывает анализ системы (1.3), эта система приводится к нормальной форме Коши по переменной ω^3 и не имеет нормальной формы ни по одной из переменных ω^1, ω^2 .

Заметим, что, обозначая через g_{ij} компоненты метрического тензора канонической системы координат $\omega^1, \omega^2, \omega^3$, систему дифференциальных уравнений в частных производных (1.3) можно представить в более компактной форме

$$g_{13} = 0, \quad g_{23} = 0, \quad \sqrt{g} = 1. \quad (1.4)$$

2. Построение максимально простой нормальной формы Коши

Поставим задачу о нахождении максимально простой нормальной формы Коши системы дифференциальных уравнений в частных производных (1.3), используя при этом все возможные мыслимые замены независимых переменных. Ясно, что само понятие "максимальной простоты" нуждается в уточнении, что будет сделано в последующем изложении.

Совершим наиболее общую замену независимых переменных в системе уравнений (1.3):

$$\begin{aligned} \gamma^1 &= \gamma^1(\omega^1, \omega^2, \omega^3), \\ \gamma^2 &= \gamma^2(\omega^1, \omega^2, \omega^3), \\ \gamma^3 &= \gamma^3(\omega^1, \omega^2, \omega^3), \end{aligned} \quad (2.1)$$

причем должно выполняться условие невырожденности якобиана преобразования

$$\Delta = \left| \frac{\partial \gamma^i}{\partial \omega^j} \right| \neq 0.$$

Проанализируем условие разрешимости полученной системы уравнений относительно частных производных от неизвестных функций по переменной γ^1 . В результате замены переменных (2.1) система уравнений (1.3) приводится к следующему виду³:

$$\begin{aligned}
& g_{11}^\gamma \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} + g_{22}^\gamma \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^3} + g_{33}^\gamma \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3} + g_{12}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^3} + \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^1} \right) + \\
& + g_{13}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3} + \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \right) + g_{23}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3} + \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^3} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \right) = 0, \\
& g_{11}^\gamma \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} + g_{22}^\gamma \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^2} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^3} + g_{33}^\gamma \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^2} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3} + g_{12}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^3} + \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^2} \right) + \\
& + g_{13}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3} + \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^2} \right) + g_{23}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^2} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3} + \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^3} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^2} \right) = 0, \\
& \left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^1} \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} + \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^1} \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^1} \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^1} \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} - \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^1} \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} - \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^1} \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} \right) \Delta = 1,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где g_{ij}^γ — компоненты метрического тензора системы координат $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$:

$$g_{ij}^\gamma = \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^i} \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^j} + \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^i} \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^j} + \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^i} \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^j} \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
\Delta = & \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^2} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3} + \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^3} + \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^2} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} - \\
& - \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^2} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^3} - \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^2} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Окончательно, переход к новым независимым переменным в уравнениях (2.2) завершается подстановкой (e^{ijs} — кососимметричные символы Леви-Чивита)

$$\frac{\partial \gamma^i}{\partial \omega^k} = \frac{e^{ijs} e_{klm} \frac{\partial \omega^l}{\partial \gamma^j} \frac{\partial \omega^m}{\partial \gamma^s}}{2\Delta^{-1}}.$$

Здесь

$$\Delta^{-1} = \det \left| \frac{\partial \omega^i}{\partial \gamma^j} \right|.$$

В дальнейшем изложении нам потребуется равенство вида⁴

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} - \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} - \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} \right)^2 + \\
& + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} - \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} \right)^2 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma^2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \gamma^3} \right|^2 = g_{22}^\gamma g_{33}^\gamma - (g_{23}^\gamma)^2.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

³Здесь и далее преобразования выполняются с помощью пакета символьных вычислений Maple V.

⁴См.: Норден А.П. Теория поверхностей. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. С. 58, 59.

Непосредственно видно, что первые два уравнения системы (2.2) квадратичны относительно частных производных $\frac{\partial f_j}{\partial \gamma^1}$ ($j = 1, 2, 3$), а последнее уравнение линейно относительно этих частных производных.

Выразим из последнего уравнения системы (2.2) частную производную $\frac{\partial f_3}{\partial \gamma^1}$ и подставим ее в два первых уравнения системы (2.2). Получим систему двух квадратных уравнений относительно двух частных производных $\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^1}$, $\frac{\partial f_2}{\partial \gamma^1}$. Считая, что нам задано значение частной производной $\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^1}$, приходим к условию совместности системы двух квадратных уравнений относительно частной производной $\frac{\partial f_2}{\partial \gamma^1}$. Условие совместности состоит в том, что результат двух указанных квадратных уравнений (см. [6, с. 340]) равен нулю. В итоге получается алгебраическое уравнение четвертой степени относительно частной производной $\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^1}$, но оказывается, что коэффициенты при четвертой и третьей степенях $\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^1}$ равны нулю⁵. Уравнение для определения $\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^1}$, поэтому, будет квадратным и, следовательно, находим:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^1} = \frac{-B_1 \pm \sqrt{D_1}}{2A_1}, \quad (2.6)$$

где дискриминант уравнения есть

$$\begin{aligned} D_1 = & \left[\Delta^4 (g_{22}^\gamma g_{33}^\gamma - (g_{23}^\gamma)^2)^2 - 4 \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \right)^2 \times \right. \\ & \times \left[g_{22}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} \right)^2 + g_{33}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + 2g_{23}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^2} \right) \left(\frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^2} \right) \right] \times \\ & \times \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} \left(\left(\frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} \right)^2 \right) - \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} \right) \right) \times \right. \\ & \times \left(\frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^2} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} \right) - \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \left(\left(\frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} \right)^2 \right) \right) \times \\ & \left. \times \left(\frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^2} \right) \right]^2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

⁵Это условие специфично для системы (2.2) и является решающим обстоятельством, позволяющим довести выкладки до конца.

$$A_1 = \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \Delta \left(g_{22}^\gamma g_{33}^\gamma - (g_{23}^\gamma)^2 \right) \times \\ \times \left[g_{22}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} \right)^2 + g_{22}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2g_{23}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^2} \right) \left(\frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^2} \right) \right],$$

[illegible]

$$\begin{aligned}
 & +2\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \right)^2 \left(\frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^2} \right) \times \\
 & \quad \times \left(\frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^1} + 2\frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^3} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - 2\frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^3} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^2} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} - \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^2} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \right) - \\
 & \quad - 2\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} \right)^2 \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} \right) \times \\
 & \quad \times \left(-\frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^3} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^2} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} - 2\frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^2} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} + \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^3} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} + 2\frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^1} \right) - \\
 & \quad - 2\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} - \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} \right) \times \\
 & \quad \times \left[g_{22}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} \right)^2 + g_{33}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^2} \right)^2 + \right. \\
 & \quad \left. + 2g_{23}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^2} \right) \left(\frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$\frac{\partial f_2}{\partial \gamma^1} = \frac{-B_2 \pm \sqrt{D_2}}{2A_2}, \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned}
 D_2 = & \left[\Delta^4 (g_{22}^\gamma g_{33}^\gamma - (g_{23}^\gamma)^2)^2 - 4 \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \right)^2 \times \right. \\
 & \times \left[g_{22}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} \right)^2 + g_{33}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^2} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + 2g_{23}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^2} \right) \left(\frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^2} \right) \right] \times \\
 & \times \left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} \left(\left(\frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \right)^2 \right) - \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} \right) \right) \times \right. \\
 & \quad \times \left(\frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^2} \right) + \\
 & \quad + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} \right) - \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} \left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} \right)^2 \right) \right) \times \\
 & \quad \left. \times \left(\frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^2} \right) \right]^2, \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 = & \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \Delta (g_{22}^\gamma g_{33}^\gamma - (g_{23}^\gamma)^2) \times \\
 & \times \left[g_{22}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} \right)^2 + g_{33}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^2} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + 2g_{23}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^2} \right) \left(\frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^2} \right) \right],
 \end{aligned}$$

[illegible]

$$\begin{aligned}
 & \times \left(-\frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^3} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^2} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} - 2 \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^2} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} + \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^3} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} + 2 \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^1} \right) + \\
 & + 2 \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} - \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} \right) \times \\
 & \times \left[g_{22}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} \right)^2 + g_{33}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^2} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + 2g_{23}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^2} \right) \left(\frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Последняя из необходимых частных производных вычисляется как

$$\frac{\partial f_3}{\partial \gamma^1} = \frac{\frac{1}{\Delta} - \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^1} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} - \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} \right) - \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^1} \left(\frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} - \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} \right)}{\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} - \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3}}. \quad (2.10)$$

Условия существования нормальной формы Коши по переменной γ^1 сводятся к условиям неотрицательности дискриминантов $D_{1,2} \geq 0$ и к тому, чтобы знаменатели $A_{1,2}$ и $\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} - \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3}$ в выражениях (2.6), (2.8) и (2.10) были бы отличны от нуля⁶.

Условия неотрицательности дискриминантов $D_{1,2}$ приводятся к единственному неравенству

$$\begin{aligned}
 & \Delta^4 (g_{22}^\gamma g_{33}^\gamma - (g_{23}^\gamma)^2) \geq \\
 & \geq 4 \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \right)^2 \left[g_{22}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} \right)^2 + g_{33}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^2} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + 2g_{23}^\gamma \left(\frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega^2} \right) \left(\frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^2} \right) \right]. \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

В неравенстве (2.11) перейдем от дифференцирований по γ^i к дифференцированим по ω^i и учтем, что выполняется система уравнений (1.3). В результате имеем:

$$\begin{aligned}
 & \left[g_{11} \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} \right)^2 + g_{22} \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \right)^2 - 2g_{12} \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \right) \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} \right) + \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \right)^2 (g_{11}g_{22} - g_{12}^2) \right]^2 \geq \\
 & \geq 4 \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \right)^2 \left[g_{11} \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} \right)^2 + g_{22} \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \right)^2 - 2g_{12} \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \right) \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} \right) \right] (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)^2
 \end{aligned} \quad (2.12)$$

или

$$\left[g_{11} \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} \right)^2 + g_{22} \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \right)^2 - 2g_{12} \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \right) \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} \right) - \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \right)^2 (g_{11}g_{22} - g_{12}^2) \right]^2 \geq 0, \quad (2.13)$$

⁶Мы не будем анализировать условия $A_{1,2} \neq 0$ и $\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} - \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} \neq 0$, так как нас будет интересовать лишь условие $D_{1,2} \geq 0$.

где g_{ij} — компоненты метрического тензора системы координат $\omega^1, \omega^2, \omega^3$:

$$g_{ij} = \frac{\partial f_1}{\partial \omega^i} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^j} + \frac{\partial f_2}{\partial \omega^i} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^j} + \frac{\partial f_3}{\partial \omega^i} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^j} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2.14)$$

Ясно, что неравенство (2.13) выполняется в любом случае, следовательно, систему (1.3) можно привести к нормальной форме Коши в случае, если $A_{1,2} \neq 0$ и $\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} - \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} \neq 0$.

Система уравнений (1.3) имеют максимально простую нормальную форму Коши⁷, если $D_{1,2} = 0$, т.е.

$$g_{11} \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} \right)^2 + g_{22} \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \right)^2 - 2g_{12} \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \right) \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^2} \right) - \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \right)^2 (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)^2 = 0. \quad (2.15)$$

Так как все предыдущие рассуждения в равной мере можно провести и для любой другой независимой переменной γ , то условие максимальной простоты нормальной формы относительно переменной γ примет вид:

$$g_{11} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \omega^2} \right)^2 + g_{22} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \omega^1} \right)^2 - 2g_{12} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \omega^1} \right) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \omega^2} \right) = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \omega^3} \right)^2 (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)^2, \quad (2.16)$$

где γ — новая независимая переменная.

В случае осевой симметрии каноническое преобразование координат следует искать в форме (ω^2 — угловая координата)

$$x_1 = f(\omega^1, \omega^3) \cos \omega^2, \quad x_2 = f(\omega^1, \omega^3) \sin \omega^2, \quad x_3 = h(\omega^1, \omega^3). \quad (2.17)$$

Здесь f — горизонтальная координата, а h — вертикальная координата в меридиональной плоскости. Ясно, что координатные линии, соответствующие криволинейным координатам ω^1, ω^3 , есть взаимно ортогональные изостаты в плоскости течения. Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \omega^2} = 0, \quad g_{12} = 0,$$

уравнение (2.16) упрощается и сводится к

$$g_{22} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \omega^2} \right)^2 = (g_{11}g_{22})^2 \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \omega^3} \right)^2,$$

откуда, учитывая, что $g_{11}g_{22}g_{33} = 1$, находим уравнения линий уровня $\gamma = \text{const}$ в форме

$$\frac{d\omega^3}{\sqrt{g_{11}}} = \pm \frac{d\omega^1}{\sqrt{g_{33}}}.$$

Вернемся к общему пространственному случаю. Выражение (2.16) представляет собой дифференциальное уравнение поверхности $\gamma(\omega^1, \omega^2, \omega^3) = \text{const}$ в пространстве $\omega^1, \omega^2, \omega^3$. Компоненты вектора единичной нормали

⁷Приведенное далее условие формально будет выражать то, что мы называем максимальной простотой нормальной формы Коши.

к указанной поверхности N_j будут пропорциональны $\frac{\partial \gamma}{\partial \omega^j}$ и $N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 = 1$.
Запишем уравнение (2.16) через компоненты нормали:

$$g_{11}N_2^2 + g_{22}N_1^2 - 2g_{12}N_1N_2 = N_3^2 (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)^2. \quad (2.18)$$

Левая часть уравнения (2.16) представляет собой положительно определенную квадратичную форму, так как выполнен критерий Сильвестра

$$g_{22} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} > 0. \quad (2.19)$$

Заметим, что условия $D_{1,2} = 0$ удовлетворяются также, если

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} \left(\left(\frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \right)^2 \right) - \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} \right) \right] \frac{\partial \omega^3}{\partial \gamma^3} = \\ & = \left[\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \left(\left(\frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} \right)^2 \right) - \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} \right) \right] \frac{\partial \omega^3}{\partial \gamma^2}, \\ & \left[\frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} \left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \right)^2 \right) - \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} \right) \right] \frac{\partial \omega^3}{\partial \gamma^3} = \\ & = \left[\frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} \left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} \right)^2 \right) - \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} \right) \right] \frac{\partial \omega^3}{\partial \gamma^2}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Следовательно, имеется два однородных линейных уравнения для определения двух частных производных

$$\frac{\partial \omega^3}{\partial \gamma^2}, \quad \frac{\partial \omega^3}{\partial \gamma^3},$$

откуда нетривиальные значения для них могут быть получены лишь при условии вырождения детерминанта системы уравнений (2.20).

Указанный детерминант вычисляется в виде

$$Q_1 Q_4 - Q_2 Q_3, \quad (2.21)$$

где

$$Q_1 = \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} \left(\left(\frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \right)^2 \right) - \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} \right), \quad (2.22)$$

$$Q_2 = \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} \right) - \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} \left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} \right)^2 \right), \quad (2.23)$$

$$Q_3 = \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} \left(\left(\frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} \right)^2 \right) - \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} \right), \quad (2.24)$$

$$Q_4 = \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} \right) - \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \left(\left(\frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial \gamma^3} \right)^2 \right). \quad (2.25)$$

После ряда преобразований находим

$$Q_1 Q_4 - Q_2 Q_3 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} - \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} \right) (g_{22}^\gamma g_{33}^\gamma - (g_{23}^\gamma)^2) = 0. \quad (2.26)$$

Последнее уравнение распадается на два:

$$g_{22}^\gamma g_{33}^\gamma - (g_{23}^\gamma)^2 = 0, \quad (2.27)$$

что невозможно, и

$$\frac{\partial f_1}{\partial \gamma^3} \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^2} - \frac{\partial f_1}{\partial \gamma^2} \frac{\partial f_2}{\partial \gamma^3} = 0, \quad (2.28)$$

что не имеет места в силу того, что знаменатель в (2.10) предполагается отличным от нуля.

Таким образом, остается лишь вариант

$$\frac{\partial \omega^3}{\partial \gamma^2} = 0, \quad \frac{\partial \omega^3}{\partial \gamma^3} = 0,$$

откуда следует, что

$$\gamma^1 = \gamma^1(\omega^3),$$

т.е. когда поверхности $\gamma^1 = \text{const}$ совпадают со слоями векторного поля $\mathbf{n}$.

3. Определение характеристик с помощью условия t -гиперболичности

Покажем, что условие (2.16) совпадает с условием t -гиперболичности Петровского (см. [7, с.134, 135]), если под t понимать изостатическую переменную ω^3 .

Чтобы получить условие t -гиперболичности Петровского необходимо найти главную часть системы (1.3) и исследовать характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} \alpha_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} \alpha_3 & \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} \alpha_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} \alpha_3 & \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} \alpha_1 + \frac{\partial f_3}{\partial \omega^1} \alpha_3 \\ \frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} \alpha_2 + \frac{\partial f_1}{\partial \omega^2} \alpha_3 & \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} \alpha_2 + \frac{\partial f_2}{\partial \omega^2} \alpha_3 & \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} \alpha_2 + \frac{\partial f_3}{\partial \omega^2} \alpha_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (3.1)$$

где

$$l_1 = \left(\frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^2} - \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^2} \right) \alpha_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^1} - \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} \right) \alpha_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^2} - \frac{\partial f_3}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^2} \right) \alpha_3, \quad (3.2)$$

$$l_2 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^2} - \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^2} \right) \alpha_1 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} - \frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^1} \right) \alpha_2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^2} \right) \alpha_3, \quad (3.3)$$

$$l_3 = \left(\frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^2} - \frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^2} \right) \alpha_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} - \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} \right) \alpha_2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^2} - \frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^2} \right) \alpha_3. \quad (3.4)$$

Можно показать, что характеристическое уравнение может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
 & \left\{ - \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} - \frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^2} \right) \alpha_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} - \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} \right) \alpha_2 \right]^2 + \right. \\
 & \quad \left. + \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^2} - \frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^2} \right) \alpha_3 \right]^2 - \right. \\
 & - \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^2} - \frac{\partial f_1}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} \right) \alpha_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} - \frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^1} \right) \alpha_2 \right]^2 + \\
 & \quad \left. + \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^1} - \frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^2} \right) \alpha_3 \right]^2 - \right. \\
 & - \left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} - \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^2} \right) \alpha_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^1} - \frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} \right) \alpha_2 \right]^2 + \\
 & \quad \left. + \left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^2} - \frac{\partial f_2}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^1} \right) \alpha_3 \right]^2 \right\} \alpha_3 = 0.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Система уравнений (1.3) будет ω^3 -гиперболична, если характеристическое уравнение имеет только различные и действительные корни α_3 при любых α_1 , α_2 , таких что выполняются условия $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ и $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$. Производя необходимые вычисления, получаем корни:

$$\alpha_3^2 = 0, \quad \alpha_3^2 = \frac{A}{B}, \tag{3.6}$$

где

$$\begin{aligned}
 A = & \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} - \frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^2} \right) \alpha_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} - \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} \right) \alpha_2 \right]^2 + \\
 & + \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^2} - \frac{\partial f_1}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} \right) \alpha_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} - \frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^1} \right) \alpha_2 \right]^2 + \\
 & + \left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} - \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^2} \right) \alpha_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^1} - \frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} \right) \alpha_2 \right]^2 = \\
 & = g_{33}(g_{22}\alpha_1^2 + g_{11}\alpha_2^2 - 2g_{12}\alpha_1\alpha_2),
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
 B = & \left(\frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^2} - \frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^1} - \frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^2} \right)^2 + \\
 & + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^2} - \frac{\partial f_2}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^1} \right)^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Так как $A > 0$ и $B > 0$ при $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$, то условие t -гиперболичности выполнено, т.е. система (1.3) ω^3 -гиперболична на любом своем решении. Заметим, что уравнение (2.16) приводится к виду (3.6) если выполнить замену $\alpha_1 = N_1$, $\alpha_2 = N_2$, $\alpha_3 = N_3$ и учесть, что в силу третьего уравнения системы (1.3) должно выполняться соотношение

$$g_{33} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Таким образом, замена независимых переменных, приводящая систему (1.3) к максимально простой нормальной форме Коши, определяется дифференциальным уравнением, эквивалентным условию t -гиперболичности Петровского, если под t понимать каноническую изостатическую координату, поверхности уровня которой образуют в пространстве слои, нормальные полю главных направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному напряжению.

Заключая, заметим, что ω^3 -гиперболичность системы дифференциальных уравнений в частных производных (1.3) означает, что задача Коши на поверхностях $\omega^3 = \text{const}$ поставлена корректно (т.е. она разрешима с единственностью и ее решение устойчиво).

Литература

- [1] Ивлев Д.Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучих сред // Прикл. матем. и механика. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 90–96.
- [2] Ивлев Д.Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. №3. С. 546–549.
- [3] Радаев Ю.Н. О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1990. №1. С. 86–94.
- [4] Радаев Ю.Н. Об одном принципе классификации уравнений осесимметричной задачи теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2005. №3(37).
- [5] Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2004. 147 с.
- [6] Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971. 432 с.
- [7] Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961. 400 с.

Поступила в редакцию 18/X/2004;
в окончательном варианте — 24/IV/2005.

ON t -HYPERBOLIC PROPERTY OF THREE-DIMENSIONAL EQUATIONS OF PERFECT PLASTICITY

© 2005 Y.N. Radayev,⁸ V.A. Gudkov⁹

The problem of transformation of three-dimensional equations of the perfect plasticity into their simplest Cauchy's normal form by changing independent variables is considered. The original system of partial differential equations is represented by isostatic co-ordinates and appears as essentially non-linear. The maximum simplicity principle for Cauchy's normal forms is formulated whereby the independent variables which afford one of the simplest normal forms for 3-dimensional equations of the perfect plasticity are found. The principle is shown be stronger than the t -hyperbolic condition. The original system is found belong to t -hyperbolic type with respect to the third canonical isostatic co-ordinate thus allowing to correctly formulate the Cauchy problems on layers normal to directions of the maximum (or minimum) principal stresses ensuring the existence, uniqueness and stability of the solutions.

Paper received 18/*X*/2004.

Paper accepted 24/*IV*/2005.

⁸Radayev Yuri Nickolaevich (radayev@ssu.samara.ru), Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University.

⁹Gudkov Vasilij Alexandrovich (goodkov@ssu.samara.ru), Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University.