

УДК 539.374

ОБ ОДНОМ ПРИНЦИПЕ КЛАССИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

© 2005 Ю.Н. Радаев¹

Рассматривается задача определения замены независимых переменных в системе уравнений в частных производных осесимметричной задачи математической теории пластичности, сформулированных для ребра призмы Треска, с целью ее приведения к максимально простой нормальной форме Коши. Система уравнений представлена в изостатической координатной сетке и является существенно нелинейной. Приводится точная формулировка принципа максимальной простоты и найдена система координат, приводящая исходную систему к максимально простой нормальной форме Коши. Принцип оказывается более сильным, чем условие t -гиперболичности Петровского. Показано, что уравнения осесимметричной задачи t -гиперболичны по каждой изостатической координате и поэтому задача Коши на изостатических линиях поставлена корректно.

1. Постановка задачи и вводные замечания

Уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Треска, были получены Д.Д. Ивлевым в 1959 г. (см. [1, 2]). Показано, что задача является формально статически определимой, если граничные условия заданы в напряжениях. Уравнения равновесия могут быть формально рассмотрены независимо от кинематических уравнений. Они являются квазилинейными и принадлежат к гиперболическому типу, поэтому можно вести речь о характеристиках, которые, как показывают вычисления, касаются площадок максимальных касательных напряжений.

Существование действительных характеристических поверхностей является большим математическим преимуществом. Кроме того, следует учесть,

¹Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

что характеристические поверхности суть поверхности скольжения. Поэтому сдвиговая природа идеально пластического течения математически проявляется в существовании действительных характеристических поверхностей системы пространственных уравнений теории пластичности. Поверхности и линии скольжения не являются только математическим понятием. Они существуют в действительности и их можно выявить травлением отполированной поверхности или разреза деформированного металла. Линии скольжения играют чрезвычайно важную роль как в теоретических, так и в прикладных исследованиях напряженного состояния пластически деформированного тела. Геометрия линий скольжения во многих случаях вполне определяет напряженное состояние. На этот факт, по-видимому, впервые указал Д.К. Чернов².

Формулировка пространственных уравнений теории пластичности Д.Д. Ивлева в координатной сетке линий главных напряжений найдена в [3] (см. также [4]). Уравнения при этом становятся существенно нелинейными. Представляемая работа посвящена определению такой замены независимых переменных в системе уравнений в частных производных осесимметричной задачи математической теории пластичности, сформулированных для ребра призмы Треска, чтобы привести ее к максимально простой нормальной форме Коши по одной из новых независимых переменных. Само понятие "максимальной простоты нормальной формы Коши" естественно нуждается в уточнении. В работе будет дана точная формулировка этого понятия для системы уравнений в частных производных осесимметричной задачи математической теории пластичности и исследован вопрос о классификации и характеристиках указанной системы.

2. Основные соотношения пространственной задачи в изостатической системе координат

Вывод уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Треска, в координатной сетке линий главных напряжений приведен в [3, 4]. Ребро призмы Треска определяется уравнениями

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k, \quad (2.1)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные нормальные напряжения, k — предел текучести при сдвиге³. Учитывая условия (2.1), уравнение равновесия $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ можно

²Дмитрий Константинович Чернов (1839–1921 гг.) — русский ученый, создавший научные основы обработки металлов давлением. По поводу вклада Д.К. Чернова в теорию пластичности см. предисловие к книге: Томленов А.Д. Теория пластических деформаций металлов. М.: Машгиз, 1951. 200 с.

³Пределы текучести при одноосном растяжении и сдвиге связаны, согласно критерию текучести Треска, соотношением $Y = 2k$.

представить в форме

$$\text{grad} \sigma_3 \mp 2k \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0}, \quad (2.2)$$

где $\mathbf{n}$ — единичное векторное поле, имеющее направление главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему (наименьшему) собственному значению σ_3 тензора напряжений. Уравнение (2.2) принадлежит к гиперболическому типу, а характеристические направления образуют конус с углом полураствора $\pi/4$ и осью, направленной вдоль вектора $\mathbf{n}$ (характеристическими являются также направления, ортогональные $\mathbf{n}$).

Воспользуемся свойством расслоенности векторного поля $\mathbf{n}$ в зоне пластического течения ($\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{n} = 0$) [4]. Это условие позволяет нам ввести канонические криволинейные координаты ω^j ($j = 1, 2, 3$), определяемые по векторному полю $\mathbf{n}$ так, что поверхности $\omega^3 = \text{const}$ являются слоями поля $\mathbf{n}$. Расслоенное статически допустимое поле напряжений порождает каноническое отображение некоторой области пространства на область пластического течения (см. [4])

$$x_i = f_i(\omega^1, \omega^2, \omega^3) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.3)$$

Отображающие функции f_i должны удовлетворять следующей системе уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} + \frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} + \frac{\partial f_2}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} = 0, \\ \left(\frac{\partial f_k}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_k}{\partial \omega^3} \right) \left[\left(\frac{\partial f_p}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_p}{\partial \omega^1} \right) \left(\frac{\partial f_r}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_r}{\partial \omega^2} \right) - \left(\frac{\partial f_s}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_s}{\partial \omega^2} \right)^2 \right] = 1. \end{cases} \quad (k, p, r, s = 1, 2, 3) \quad (2.4)$$

Здесь ω^j — канонические изостатические координаты: соответствующая криволинейная координатная сетка образована изостатическими траекториями.

Как показывает анализ системы (2.4) (см. [3]), эта система приводится к нормальной форме Коши по переменной ω^3 и не имеет нормальной формы ни по одной из переменных ω^1, ω^2 .

Если через J обозначить определитель Якоби отображения (2.3), то последнее уравнение системы (2.4) эквивалентно $J^2 = 1$, т.е. объем трехмерного элемента не изменяется при его преобразовании в соответствии с (2.3). Условия $g_{13} = 0$, $g_{23} = 0$, $n^1 = 0$, $n^2 = 0$, $g = 1$ позволяют существенно упростить уравнение равновесия (2.2) и свести его к трем соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega^1} (\sigma_3 - 2k \ln \sqrt{g_{33}}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \omega^2} (\sigma_3 - 2k \ln \sqrt{g_{33}}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \omega^3} (\sigma_3 - 2k \ln \sqrt{g_{33}}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

интегрирование которых позволяет определить распределение напряжений в зоне пластического течения.

3. Формулировка уравнений в условиях осевой симметрии

Осесимметричное пластическое течение, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска, можно разделить на следующие два типа: 1) тангенциальное напряжение (которое всегда будет главным напряжением при осесимметричном напряженном состоянии) является наибольшим (наименьшим) главным напряжением, а меридиональные главные напряжения равны; 2) тангенциальное напряжение равно одному из меридиональных главных напряжений, а максимальное касательное напряжение в меридиональной плоскости равно пределу текучести k . Во втором случае имеем состояние "полной пластичности" Хаара—Кармана. Если присвоить тангенциальному главному направлению второй номер и обозначить через σ_3 наибольшее (наименьшее) из двух меридиональных главных напряжений, то приходим к соотношению (2.1), характеризующему состояние "полной пластичности".

Условие Хаара—Кармана является фундаментальным для всей теории идеальной пластичности. Этот факт впервые был осознан Д.Д. Ивлевым и отчетливо сформулирован в его ранних работах. Именно условие полной пластичности и только оно позволяет сформулировать общую теорию идеальной пластичности с единым математическим аппаратом статически определимых уравнений гиперболического типа, соответствующим сдвиговой природе идеально пластического деформирования. Эта точка зрения разделяется далеко не всеми. Так, А.А. Вакуленко и Л.М. Качанов полагают, что доводы физического характера в пользу схемы полной пластичности "продиктованы скорее заманчивой простотой математического анализа, нежели существом вопроса" (см.: Вакуленко А.А., Качанов Л.М. Теория пластичности / В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1972. С. 100). Д.Д. Ивлевым был предложен и существенно развит соответствующий вариант математической теории пластичности: сингулярное условие текучести (в частности, ребро призмы Треска) и обобщенный ассоциированный закон пластического течения. Им было установлено, что при условии полной пластичности (т.е. когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска) уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности являются статически определимыми и принадлежат к гиперболическому типу. Характеристические направления (нормали к характеристическим поверхностям) уравнений статики при этом образуют конус, касающийся площадок максимальных касательных напряжений, построенных в вершине конуса. Характеристическими будут также направления, ортогональные главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему (наименьшему) главному напряжению. Кинематические уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности в случае, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска, также гиперболичны и имеют точно та-

кие же характеристические направления, как и статические уравнения. Гиперболичность статических и кинематических уравнений теории идеальной пластичности, сформулированных для ребра призмы Треска, позволяет распространить теорию поля скольжения, построенную Генки для уравнений плоского деформированного состояния, на трехмерный случай (см. [4]).

В случае осевой симметрии каноническое преобразование координат записывается в виде (ω^2 — угловая координата)

$$x_1 = f(\omega^1, \omega^3) \cos \omega^2, \quad x_2 = f(\omega^1, \omega^3) \sin \omega^2, \quad x_3 = h(\omega^1, \omega^3). \quad (3.1)$$

Здесь f — горизонтальная координата, а h — вертикальная координата в меридиональной плоскости. Ясно, что координатные линии, соответствующие криволинейным координатам ω^1, ω^3 , есть взаимно ортогональные изостаты в плоскости течения.

Отображающие функции f, h должны удовлетворять следующей системе уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \omega^1} \frac{\partial f}{\partial \omega^3} + \frac{\partial h}{\partial \omega^1} \frac{\partial h}{\partial \omega^3} = 0, \\ \left(\frac{\partial f}{\partial \omega^1} \frac{\partial h}{\partial \omega^3} - \frac{\partial f}{\partial \omega^3} \frac{\partial h}{\partial \omega^1} \right) f = \pm 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Второе уравнение этой системы позволяет сделать заключение о том, что всегда можно считать выполненным условие

$$f \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \omega^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \omega^3} \right)^2 \right] > 0. \quad (3.3)$$

Представим систему (3.2) в нормальной форме Коши относительно производных по переменной ω^1

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \omega^1} = \pm f^{-1} \frac{\partial h}{\partial \omega^3} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \omega^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \omega^3} \right)^2 \right]^{-1}, \\ \frac{\partial h}{\partial \omega^1} = \mp f^{-1} \frac{\partial f}{\partial \omega^3} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \omega^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \omega^3} \right)^2 \right]^{-1}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Ясно, что нормальная форма Коши относительно изостатической переменной ω^1 существует, если выполняется условие (3.3).

Аналогичный вывод может быть сделан и по отношению к переменной ω^3 .

Для однозначного определения функций f, h , кроме системы уравнений (3.4), необходимы еще начальные данные. С точки зрения механики, мы можем сформулировать, например, граничные условия на свободном контуре, но с математической точки зрения они являются начальными данными или данными Коши для системы (3.4). Тот факт, что систему уравнений (3.2) можно представить в нормальной форме Коши по переменной ω^1 , позволяет сделать заключение, что линия $\omega^1 = \text{const}$ (если она не пересекает

ось симметрии) при условии, что вдоль нее

$$\left(\left(\frac{\partial f}{\partial \omega^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \omega^3} \right)^2 \right) \Big|_{\omega^1 = \text{const}} \neq 0,$$

не является исключительной, т.е. задача Коши для системы (3.4) с начальными данными на линии $\omega^1 = \text{const}$ сформулирована корректно, по крайней мере, в плане ее разрешимости. Указанное условие заведомо должно выполняться, поскольку каноническая замена переменных имеет отличный от нуля якобиан:

$$\frac{\partial(x_1, x_3)}{\partial(\omega^1, \omega^3)} \neq 0.$$

4. Классификация и характеристики системы уравнений в частных производных (3.2)

Рассматриваемая система уравнений существенно нелинейна. Однако, даже не производя никакого предварительного ее анализа, нам следует ожидать гиперболичность и в классификационном плане, и в плане поведения ее решений. Поэтому можно вести речь о характеристических линиях системы уравнений в частных производных (3.2). Ниже мы дадим обоснование этих выводов.

Существует несколько подходов к определению характеристических линий систем *квазилинейных* гиперболических уравнений в частных производных⁴: (1) невозможность, после преобразования к характеристическим переменным, приведения квазилинейной системы к нормальной форме Коши ни по одной из независимых переменных; (2) характеристики квазилинейной системы суть линии слабого разрыва ее решений⁵; (3) каноническая (и в известном смысле самая простая и наиболее просто интегрируемая) форма, которую приобретает квазилинейная система после преобразования ее к характеристическим переменным.

⁴То обстоятельство, что здесь мы ведем речь о системах *квазилинейных* уравнений в частных производных, не должно вводить в заблуждение. Задача Коши для существенно нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных (в том числе и для системы (3.2)) всегда может быть сведена к эквивалентной задаче для системы квазилинейных уравнений первого порядка. Система квазилинейных уравнений первого порядка имеет более широкое множество решений, чем исходная нелинейная система, однако, начальные данные могут так ограничивать ее решения, что решения обеих начальных задач будут совпадать. Подробный анализ этого вопроса имеется в монографии: Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. С. 54–57. Ниже мы изложим иной подход к нахождению характеристик нелинейной системы уравнений в частных производных (3.2), не заменяя ее квазилинейной, а опираясь на принцип максимальной простоты нормальной формы Коши.

⁵Поиск линий слабого разрыва эффективно осуществляется с помощью аппарата условий совместности Адамара—Томаса (см.: Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. С. 52–73.)

Понятие характеристики, прежде всего, связано с приведением квазилинейной системы уравнений в частных производных к нормальной форме Коши и проблемой разрешимости задачи Коши для системы уравнений в частных производных. В силу теоремы Ковалевской, при дополнительных условиях об аналитичности самой системы и аналитичности начальных условий, заданных на аналитической начальной кривой, не являющейся характеристической, существует, и притом единственное, аналитическое решение задачи Коши. Если при выполнении всех остальных сформулированных выше условий начальная кривая окажется характеристикой, то решение задачи Коши или вообще не будет существовать, или оно не будет единственным⁶. Классифицирующий характеристику квазилинейной системы уравнений в частных производных признак есть невозможность, после замены независимых переменных, такой что одна из координатных линий совпадает с характеристикой, привести систему уравнений к нормальной форме Коши относительно переменной, сохраняющей постоянное значение вдоль указанной координатной линии. Это уже не так, если система уравнений в частных производных существенно нелинейна. Так, гиперболическая система (3.2), как мы далее увидим, всегда приводится к нормальной форме Коши относительно любой из независимых переменных при любой мыслимой их замене.

Поставим задачу, производя всевозможные замены независимых переменных, об отыскании "максимально простой" (это понятие мы уточним в процессе решения задачи) нормальной формы Коши системы уравнений в частных производных (3.2). Для этого введем новые независимые переменные γ^1, γ^3 , связанные с переменными ω^1, ω^3 наиболее общими соотношениями

$$\gamma^1 = \gamma^1(\omega^1, \omega^3), \quad \gamma^3 = \gamma^3(\omega^1, \omega^3). \quad (4.1)$$

Произведя замену независимых переменных в системе уравнений (3.2), приходим к системе, имеющей вид

$$\begin{cases} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \gamma^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \gamma^1} \right)^2 \right) \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} + \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \gamma^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \right)^2 \right) \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3} + \\ + \left(\frac{\partial f}{\partial \gamma^1} \frac{\partial f}{\partial \gamma^3} + \frac{\partial h}{\partial \gamma^1} \frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \right) \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3} + \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \right) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \gamma^1} \frac{\partial h}{\partial \gamma^3} - \frac{\partial h}{\partial \gamma^1} \frac{\partial f}{\partial \gamma^3} = \frac{1}{f \Delta}, \end{cases} \quad (4.2)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1}$$

— отличный от нуля якобиан преобразования (4.1).

⁶См., например: Положий Г.Н. Уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1964. С. 30–41.

Заметим, что для полного преобразования к новым независимым переменным в системе (4.2) необходимо выполнить следующие подстановки:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} &= \frac{\partial \omega^3}{\partial \gamma^3} \Delta, & \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} &= -\frac{\partial \omega^3}{\partial \gamma^1} \Delta, \\ \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} &= -\frac{\partial \omega^1}{\partial \gamma^3} \Delta, & \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3} &= \frac{\partial \omega^1}{\partial \gamma^1} \Delta,\end{aligned}$$

где

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{\partial(\omega^1, \omega^3)}{\partial(\gamma^1, \gamma^3)} = \frac{\partial \omega^1}{\partial \gamma^1} \frac{\partial \omega^3}{\partial \gamma^3} - \frac{\partial \omega^1}{\partial \gamma^3} \frac{\partial \omega^3}{\partial \gamma^1}.$$

Чтобы привести полученную систему уравнений к нормальной форме Коши по переменной γ^1 , попытаемся разрешить ее относительно частных производных функций f и h по переменной γ^1 . По меньшей мере одна из частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma^3}, \quad \frac{\partial h}{\partial \gamma^3}$$

отлична от нуля, иначе замена переменных $(f, h) \rightarrow (\gamma^1, \gamma^3)$ не будет, даже локально, взаимнооднозначной. Примем, что частная производная $\partial h / \partial \gamma^3$ не равна нулю. После ряда преобразований находим

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \gamma^1} = \left(\frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \right)^{-1} \left[(f\Delta)^{-1} + (2A)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \gamma^3} (-B \pm \sqrt{D}) \right], \\ \frac{\partial h}{\partial \gamma^1} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}, \end{cases} \quad (4.3)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}A &= f\Delta \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \gamma^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \right)^2 \right), \\ B &= f\Delta \frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \left[\left(\left(\frac{\partial f}{\partial \gamma^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} + \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3} \right) \right] + 2 \frac{\partial f}{\partial \gamma^3} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3}, \\ D &= f^2 \Delta^4 \left(\frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \right)^2 \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \gamma^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \right)^2 \right)^2 - 4 \left(\frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \right)^2 \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \right)^2.\end{aligned}$$

Система уравнений (4.3) заведомо является нормальной относительно переменной γ^1 , если выполняются условия $D \geq 0$ и $A \neq 0$.

Исследуем сначала возможность выполнения условия $A = 0$, т.е.

$$\Delta f \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \gamma^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \right)^2 \right) \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} = 0. \quad (4.4)$$

Заметим, что в этом уравнении заведомо $\Delta \neq 0$, поскольку якобиан преобразования (4.1) отличен от нуля. Выражение в круглых скобках также не может равняться нулю, так как якобиан преобразования

$$f = f(\gamma^1, \gamma^3), \quad h = h(\gamma^1, \gamma^3)$$

отличен от нуля. Далее нетрудно видеть, что обе производные

$$\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1}, \quad \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3}$$

не могут быть одновременно равны нулю, ибо в этом случае $\Delta = 0$, а это невозможно. Остается случай, когда равна нулю одна из упомянутых частных производных, т.е. когда, например,

$$\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \neq 0, \quad \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} = 0.$$

В этом случае линия $\gamma^1 = \text{const}$ совпадает с изостатой $\omega^1 = \text{const}$, т.к. $\gamma^1 = \gamma^1(\omega^1)$, а относительно изостатических координат рассматриваемая система уравнений в частных производных, как мы видели, является нормальной.

Таким образом, условие $A = 0$ гарантирует возможность приведения системы уравнений в частных производных (4.2) к нормальной форме Коши по переменной γ^1 и в этом случае линии $\gamma^1 = \text{const}$ будут являться изостатическими траекториями. Ясно также, что при выполнении условия $A = 0$ квадратичная относительно производной $\partial f / \partial \gamma^1$ зависимость (см. первое уравнение системы (4.2)) превращается в линейную. В этом смысле изостатическая координатная сетка отличается от иных координатных систем тем, что можно было бы назвать максимальной простотой *приведения* к нормальной форме Коши. Условие максимальной простоты в указанном только что смысле фиксируется условием $A = 0$. К тому же изостатическая координатная сетка обладает еще одним (пожалуй, самым важным с точки зрения простоты) преимуществом: дифференциальные уравнения (2.4) (и (3.2)) приводятся к интегрируемым вдоль изостатических траекторий соотношениям (2.5).

Исследуем, наконец, условие, вытекающее из $D \geq 0$. Учитывая полученное выше выражение для дискриминанта⁷, имеем

$$\Delta^4 f^2 \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \gamma^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \right)^2 \right) \geq 4 \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \right)^2 \left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \right)^2. \quad (4.5)$$

Принимая во внимание соотношения

$$\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} = \Delta \frac{\partial \omega^3}{\partial \gamma^3}, \quad \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} = -\Delta \frac{\partial \omega^1}{\partial \gamma^3},$$

неравенство (4.5) может быть также представлено в форме

$$f^2 \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \gamma^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \right)^2 \right) \geq 4 \left(\frac{\partial \omega^3}{\partial \gamma^3} \right)^2 \left(\frac{\partial \omega^1}{\partial \gamma^3} \right)^2. \quad (4.6)$$

⁷Напомним, что в наших рассуждениях

$$\frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \neq 0.$$

Полученное условие может трактоваться как условие вдоль линии $\gamma^1(\omega^1, \omega^3) = \text{const}$, поскольку переменная γ^3 есть параметр вдоль этой линии. Ясно, что вдоль линии $\gamma^1(\omega^1, \omega^3) = \text{const}$ может быть выбран любой другой параметр, скажем, натуральный. Формулировка условия (4.6) при этом сохранится

$$f^2 \left(\left(\frac{df}{dl} \right)^2 + \left(\frac{dh}{dl} \right)^2 \right) \geq 4 \left(\frac{d\omega^3}{dl} \right)^2 \left(\frac{d\omega^1}{dl} \right)^2. \quad (4.7)$$

Таким образом, вообще, если вдоль линии $\gamma(\omega^1, \omega^3) = \text{const}$ будет выполняться неравенство

$$f^2 \left((df)^2 + (dh)^2 \right) < 4 (d\omega^1)^2 (d\omega^3)^2, \quad (4.8)$$

то система уравнений (3.2) не будет нормальной по переменной γ . Покажем, что условие (4.8) на самом деле выполняться не может, какую бы кривую мы ни выбрали.

Предположим, что вдоль некоторой кривой $\gamma(\omega^1, \omega^3) = \text{const}$, расположенной на плоскости $\omega^1 \omega^3$, выполняется условие (4.8). Следовательно вдоль этой кривой имеем

$$f \left(\left(\frac{df}{dl} \right)^2 + \left(\frac{dh}{dl} \right)^2 \right) < \pm 2 \frac{d\omega^1}{dl} \frac{d\omega^3}{dl}, \quad (4.9)$$

где l — натуральный параметр, т.е.

$$\left(\frac{d\omega^1}{dl} \right)^2 + \left(\frac{d\omega^3}{dl} \right)^2 = 1.$$

Ясно, что можно ввести угол ψ согласно

$$\frac{d\omega^1}{dl} = \cos \psi, \quad \frac{d\omega^3}{dl} = \sin \psi.$$

Условие (4.9) тогда можно представить в следующем виде:

$$f \left[\left(\left(\frac{\partial f}{\partial \omega^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \omega^1} \right)^2 \right) \cos^2 \psi + \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \omega^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \omega^3} \right)^2 \right) \sin^2 \psi + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial f}{\partial \omega^1} \frac{\partial f}{\partial \omega^3} + \frac{\partial h}{\partial \omega^1} \frac{\partial h}{\partial \omega^3} \right) \sin 2\psi \right] < \pm \sin 2\psi$$

или, учитывая, что в силу системы (3.2)

$$\frac{\partial f}{\partial \omega^1} \frac{\partial f}{\partial \omega^3} + \frac{\partial h}{\partial \omega^1} \frac{\partial h}{\partial \omega^3} = 0$$

и

$$f \sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{33}} = 1,$$

где g_{11} , g_{33} есть компоненты метрического тензора криволинейной координатной системы ω^1 , ω^3 , также — в виде

$$(\sqrt{g_{11}} \cos \psi \mp \sqrt{g_{33}} \sin \psi)^2 < 0, \quad (4.10)$$

а это есть явное противоречие.

Итак, условие (4.8) ни при каких обстоятельствах не выполняется, т.е. система уравнений (3.2) обладает следующим замечательным свойством: после какой-бы то ни было замены независимых переменных она преобразуется в систему, которая приводится к нормальной форме Коши относительно каждой из новых независимых переменных⁸.

Продолжая рассуждения, попытаемся максимально упростить правые части системы уравнений (4.3), уже имеющую нормальную форму Коши по переменной γ^1 . Ясно, что достичь этого можно, подобрав новые независимые переменные γ^1, γ^3 так, чтобы дискриминант D оказался равным нулю⁹. Ясно, что вдоль координатных линий $\gamma^1(\omega^1, \omega^3) = \text{const}$ и $\gamma^3(\omega^1, \omega^3) = \text{const}$ должно выполняться уравнение (ср. с (4.10))

$$\sqrt{g_{11}} \cos \psi \mp \sqrt{g_{33}} \sin \psi = 0,$$

где ψ есть угол наклона касательной к оси ω^1 , откуда находим

$$\text{tg} \psi = \pm \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{33}}},$$

а также

$$\text{tg}^2 \psi = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \omega^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \omega^1}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial \omega^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \omega^3}\right)^2}$$

или

$$\left(\frac{d\omega^3}{d\omega^1}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \omega^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \omega^1}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial \omega^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \omega^3}\right)^2}, \quad (4.11)$$

или также

$$\frac{d\omega^3}{\sqrt{g_{11}}} = \pm \frac{d\omega^1}{\sqrt{g_{33}}}.$$

Окончательно имеем дифференциальные уравнения координатных линий $\gamma^1(\omega^1, \omega^3) = \text{const}$ и $\gamma^3(\omega^1, \omega^3) = \text{const}$ в форме

$$\frac{d\omega^3}{d\omega^1} = \pm \frac{1}{fg_{33}}. \quad (4.12)$$

В подобранных таким образом координатах γ^1, γ^3 система дифференциальных уравнений в частных производных (3.2) будет приводиться к

⁸Следует еще раз обратить внимание на то обстоятельство, что *квазилинейная* гиперболическая система уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными не приводится к нормальной форме Коши ни по одной из независимых переменных, если в качестве таковых выбраны характеристические переменные.

⁹В рассматриваемом случае это и есть точная формулировка того, что мы подразумеваем, когда говорим о принципе максимальной простоты нормальной формы системы дифференциальных уравнений в частных производных.

нормальной по каждой из указанных координат форме, отличающейся от остальных возможных нормальных форм тем, что мы называем максимальной простотой. Существенно нелинейные системы уравнений в частных производных, удовлетворяющие сформулированному признаку, мы будем называть "нормально гиперболическими", а соответствующий принцип классификации — "принципом максимальной простоты нормальной формы Коши".

Полученные на основании принципа максимальной простоты дифференциальные уравнения (4.12) являются на самом деле, как будет доказано ниже, дифференциальными уравнениями характеристических линий. Наличие двух семейств характеристик является признаком гиперболичности существенно нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных (3.2).

5. t -гиперболичность системы уравнений в частных производных (3.2)

Существует иной подход к классификации существенно нелинейных систем дифференциальных уравнений в частных производных. Он связан с нахождением главной части существенно нелинейной системы на выбранном ее решении¹⁰. Следуя этой методике, составим характеристический определитель и характеристическое уравнение¹¹ для системы дифференциальных уравнений в частных производных (3.2). Имеем уравнение (v_1, v_3 — компоненты единичного вектора нормали к характеристической кривой на плоскости $\omega^1\omega^3$)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \omega^3}v_1 + \frac{\partial f}{\partial \omega^1}v_3 & \frac{\partial h}{\partial \omega^3}v_1 + \frac{\partial h}{\partial \omega^1}v_3 \\ \frac{\partial h}{\partial \omega^3}v_1 - \frac{\partial h}{\partial \omega^1}v_3 & -\frac{\partial f}{\partial \omega^3}v_1 + \frac{\partial f}{\partial \omega^1}v_3 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$v_1^2 = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \omega^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \omega^1}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial \omega^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \omega^3}\right)^2} v_3^2, \quad (5.1)$$

откуда сразу же следует ω^1 - и ω^3 -гиперболичность системы дифференциальных уравнений в частных производных (3.2) на любом ее решении

$$f = f(\omega^1, \omega^3), \quad h = h(\omega^1, \omega^3).$$

¹⁰См., например: Положий Г.Н. Уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1964. С. 53–55.

¹¹См., например: Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961. 400 с.

Нетрудно видеть, что характеристическое условие (5.1) в точности совпадает с уравнением (4.11), полученным выше, опираясь на принцип максимальной простоты нормальной формы Коши.

Заключая, заметим, что ω^1 - и ω^3 -гиперболичность системы дифференциальных уравнений в частных производных (3.2) означает, что задача Коши на изостатических линиях $\omega^1 = \text{const}$ и $\omega^3 = \text{const}$ поставлена корректно (т.е. она разрешима с единственностью и ее решение устойчиво).

Литература

- [1] Ивлев Д.Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучих сред // Прикл. матем. и механика. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 90–96.
- [2] Ивлев Д.Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. №3. С. 546–549.
- [3] Радаев Ю.Н. О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1990. №1. С. 86–94.
- [4] Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. ун-та, 2004. 147 с.

Поступила в редакцию 15/X/2004;
в окончательном варианте — 11/II/2005.

A CLASSIFYING PRINCIPLE FOR THE EQUATIONS OF AXIALLY-SYMMETRIC PROBLEM OF THE THEORY OF PERFECT PLASTICITY

© 2005 Y.N. Radayev¹²

The problem of determining independent variables for the system of partial differential equations of axially-symmetric perfect plasticity in order to obtain its simplest Cauchy's normal form is considered. The system is originally represented by the isostatic co-ordinate net and belongs to a strongly non-linear type. The principle of maximum simplicity of Cauchy's normal form is formulated and is shown to be appropriate for the classification technique. By the aid of this principle the pair of independent variables whereby the original system can be transformed into its simplest normal form is obtained. The principle is shown to be stronger than the t -hyperbolic condition. The original system is found to belong to t -hyperbolic type with respect to the both isostatic co-ordinates thus allowing to correctly formulate the Cauchy problems on the both isostatic lines ensuring the existence, uniqueness and stability of the solutions.

Paper received 15/X/2004.

Paper accepted 11/II/2005.

¹²Radayev Yuri Nikolaevich (radayev@ssu.samara.ru), Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.