

НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ ДВУХ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КРАТНЫМ ЧИСТО МНИМЫМ СПЕКТРОМ

© 2005 А.М. Джураев¹

Разработана теория асимптотического интегрирования для системы сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с кратным чисто мнимым спектром. Начальная задача изучена при выполнении условия стабильности спектра. Доказаны теоремы разрешимости и сформулирована теорема об оценке остаточного члена.

Введение

Сингулярно-возмущенные дифференциальные уравнения второго порядка с кратным спектром предельного оператора изучались Я.Д. Тамаркиным [1], где было установлено, что асимптотическое разложение решения однородной линейной дифференциальной системы второго порядка содержит дробные степени малого параметра. Соответствующие результаты для дифференциальных уравнений n -го порядка с отрицательной действительной частью спектра были получены в работах [2–12]. Регуляризованная асимптотика решения начальной задачи для системы дифференциальных уравнений с кратным спектром с отрицательной действительной частью получена в [13–15].

В представляемой работе разработана теория асимптотического интегрирования начальной задачи для сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений с двукратным чисто мнимым спектром.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему двух сингулярно-возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varepsilon y'(t, \varepsilon) - A(t)y(t, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}h(t) \quad (1.1)$$

¹Джураев Абубакир Мухтарович (ajrv@rambler.ru), Узбекский гуманитарно-педагогический институт Ошского государственного университета, 714000, Кыргызстан, г. Ош, ул. Ленина, 331.

с начальным условием

$$y(0, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} y^0. \quad (1.2)$$

В задаче (1.1), (1.2) правые части должны содержать $\sqrt{\varepsilon}$ для получения ограниченного решения задачи.

С целью изучения задачи (1.1), (1.2) при достаточно малых ε потребуем выполнение следующих условий:

1. $A(t) \in C^\infty([0, a], C^{2 \times 2})$, $h(t) \in C^\infty([0, a], C^2)$.
2. Спектр $\{\lambda_1(t), \lambda_2(t)\}$ матрицы $A(t)$ при каждом $t \in [0, 1]$ удовлетворяет требованиям:
 - а) $\lambda_1(t) \equiv \lambda_2(t) = \lambda(t)$; б) $\operatorname{Re} \lambda(t) \equiv 0$; 3) $\lambda(t) \neq 0$.
3. Матрица $A(t)$ имеет жорданову цепочку векторов, т.е.

$$A(t)\varphi_1(t) = \lambda(t)\varphi_1(t), \quad A(t)\varphi_2(t) = \lambda(t)\varphi_2(t) + \varphi_1(t).$$

4. Каноническая структура матрицы $A(t)$, т.е.

$$A(t) = \lambda(t)E + T(t),$$

где $T(t)$ — собственный нильпотент матрицы $A(t)$, не меняется на отрезке $[0, 1]$.

5. Производные от собственного и присоединенного векторов $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ разложим по базису $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$:

$$\varphi_i'(t) = \sum_{k=1}^n C_i^k(t) \varphi_k(t).$$

Из коэффициентов разложения составим "структурную" матрицу

$$B = \begin{pmatrix} C_1^1(t) & C_2^1(t) \\ C_1^2(t) & C_2^2(t) \end{pmatrix}$$

и будем требовать, чтобы для $C_1^2(t)$ выполнялось условие $C_1^2(t) > 0$.

В настоящей работе, используя результаты работы [16–25], изучается начальная задача (1.1), (1.2), когда одноклеточная матрица $A(t)$ имеет двукратный спектр, и разрабатывается алгоритм асимптотического интегрирования начальной задачи (1.1), (1.2) в случае выполнения условий 1–5.

Для асимптотического интегрирования начальной задачи (1.1), (1.2), введем дополнительные независимые переменные по формулам:

$$\tau_k = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t [\lambda(x) + \sqrt{\varepsilon} g_k(x)] dx \equiv \psi_k(t, \varepsilon), \quad k = 1, 2, \quad (1.3)$$

где функции $g_k(t)$, $k = 1, 2$ определяются из итерационных уравнений.

Вводя обозначения

$$\tau = (\tau_1, \tau_2), \quad \psi(t, \varepsilon) = (\psi_1(t, \varepsilon), \psi_2(t, \varepsilon)),$$

вместо искомого решения $y(t, \varepsilon)$ задачи (1), (2) будем изучать новую "расширенную" функцию $u(t, \tau, \varepsilon)$, такую что

$$u(t, \psi(t, \varepsilon), \varepsilon) \equiv y(t, \varepsilon).$$

Для определения функции $u(t, \tau, \varepsilon)$ поставим следующую задачу:

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^2 (\lambda + \sqrt{\varepsilon} g_k) \frac{\partial u}{\partial \tau_k} - Au = \sqrt{\varepsilon} h, \quad (1.4)$$

$$u(0, 0, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} y^0. \quad (1.5)$$

Так как задача (1.4), (1.5) является регулярной по ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, то, естественно, ее решение будем искать в виде ряда

$$u(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \sqrt{\varepsilon}^s u_s(t, \tau) \quad (1.6)$$

с коэффициентами из пространства безрезонансных решений

$$U = \left\{ u(t, \tau) : u = \sum_{i,k=1}^2 u_{i,k}(t) \varphi_i(t) e^{\tau_k} + \sum_{i=1}^2 u_i(t) \varphi_i(t), \right. \\ \left. u_{i,k}(t), u_i(t) \in C^\infty([0, 1], C) \right\}.$$

В пространстве безрезонансных решений U зададим следующие операторы

$$L_0 \equiv A(t) - \lambda(t) \sum_{k=1}^2 \frac{\partial}{\partial \tau_k}, \quad L_1 \equiv \sum_{k=1}^2 g_k(t) \frac{\partial}{\partial \tau_k}. \quad (1.7)$$

Используем операторы (1.7) и расширенную задачу (1.4), (1.5) перепишем в виде

$$L_0 u = \sqrt{\varepsilon} L_1 u + \varepsilon u' - \sqrt{\varepsilon} h(t), \quad (1.8)$$

$$u(0, 0, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} y^0. \quad (1.9)$$

Степенной ряд (1.6) подставим в (1.8), (1.9) и получим следующие итерационные задачи для определения коэффициентов $u_s(t, \tau)$ ряда (1.6):

$$L_0 u_0 = 0, \quad u_0(0, 0) = 0, \quad (1.10)$$

$$L_0 u_1 = L_1 u_0 - h(t), \quad u_1(0, 0) = y^0, \quad (1.11)$$

$$L_0 u_s = L_1 u_{s-1} + u'_{s-2}, \quad u_s(0, 0) = 0, \quad s = 2, 3, \dots \quad (1.12)$$

Задачи (1.10)–(1.12) будем решать в пространстве безрезонансных решений U .

Пространство, сопряженное к пространству U , отождествим с пространством

$$U^* = \left\{ v(t, \tau) : v = \sum_{i,k=1}^n v_{i,k}(t) \varphi_i^*(t) e^{\tau_k} + \sum_{i=1}^n v_i(t) \varphi_i^*(t), \right. \\ \left. v_i(t) \in C^\infty([0, 1], C) \right\},$$

где $\varphi_1^*(t), \varphi_2^*(t)$ — жорданов набор векторов сопряженной матрицы $A^*(t)$. Введем билинейное произведение элементов $u \in U$ на элементы $v \in U^*$ по формуле

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i,k=1}^2 u_{i,k}(t) v_{i,k}^*(t) + \sum_{i=1}^2 u_i(t) v_i^*(t).$$

Для определения оператора, сопряженного к основному оператору L_0 , используем соотношения (1.17). Сопряженный оператор имеет вид

$$L_0^* \equiv A^*(t) + \lambda(t) \sum_{k=1}^n \partial / \partial \tau_k,$$

базисными элементами ядра которого являются

$$v_k^* = \varphi_2^*(t) e^{\tau_k}, \quad k = 1, 2.$$

Рассмотрим итерационные задачи (1.10)–(1.12). Для этих задач докажем следующие теоремы разрешимости 1 и 2.

2. Теоремы разрешимости

Теорема 1. Пусть в пространстве U дано уравнение

$$L_0 u = f(t, \tau), \quad (2.1)$$

где L_0 — основной оператор, определенный в (1.7), $f(t, \tau) \in U$ и выполнены условия 1–4. Тогда для разрешимости уравнения (2.1) в пространстве U необходимо и достаточно, чтобы правая часть $f(t, \tau)$ была ортогональна (тождественно по $t \in [0, 1]$) ядру сопряженного оператора L_0^* .

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (2.1) разрешимо в пространстве U . Тогда существует элемент $u \in U$ такой, что $L_0 u \equiv f(t, \tau)$.

Так как базис сопряженного оператора L_0^* состоит из элементов $v_k^* = \varphi_2^*(t) e^{\tau_k}$, $k = 1, 2$, то имеем

$$\langle f, v_k^* \rangle \equiv \langle L_0 u, v_k^* \rangle \equiv \langle u, L_0^* v_k^* \rangle \equiv 0, \quad k = 1, 2,$$

что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть выполнено условие $\langle f, v_k^* \rangle \equiv 0$, $k = 1, 2$. В силу условия $f(t, \tau) \in U$ правую часть $f(t, \tau)$ уравнения (2.1) берем как элемент пространства U :

$$f(t, \tau) = \sum_{i,k=1}^2 f_{i,k}(t) \varphi_i(t) e^{\tau_k} + \sum_{i=1}^2 f_i(t) \varphi_i(t). \quad (2.2)$$

Так как по предположению $\langle f, v_k^* \rangle \equiv 0$, $k = 1, 2$, то выражение (2.2) можно записать в виде

$$f(t, \tau) = \sum_{k=1}^2 f_{1,k}(t) \varphi_1(t) e^{\tau_k} + \sum_{i=1}^2 f_i(t) \varphi_i(t). \quad (2.3)$$

Выражение (2.3) подставим в уравнение (2.1) и найдем решение

$$u(t, \tau) = \sum_{k=1}^2 f_{0,k}(t) \varphi_1(t) e^{\tau_k} + \sum_{k=1}^2 f_{1,k}(t) \varphi_2(t) e^{\tau_k} + w_0,$$

где $w_0 = -A^{-1}(t)f(t)$, $f_{0,k}(t) \in C^\infty([0, a], C)$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть в пространстве U дана задача

$$L_0 u_1(t, \tau) = 0, \quad (2.4)$$

$$u_1(0, 0) = 0, \quad (2.5)$$

где L_0 — оператор, определенный в (1.7). Пусть выполнены условия 1–5 и функции $g_k(t)$, $k = 1, 2$, определяются из (1.4) тождественно по $t \in [0, 1]$. Тогда:

1) существует общее решение системы уравнений

$$L_0 u_2 = L_1 u_1, \quad (2.6)$$

$$L_0 u_3 = L_1 u_2 + u'_1; \quad (2.7)$$

2) если выполнены условия

$$\langle L_1 u_3 + u'_2, v_k^* \rangle \geq 0, \quad k = 1, 2, \quad (2.8)$$

$$u_2(0, 0) = 0, \quad (2.9)$$

то задача (2.4), (2.5) имеет только нулевое решение.

Доказательство. 1. По условию теоремы 1 однородное уравнение (16) разрешимо в U . Решение уравнения (16) запишется в виде

$$u_1(t, \tau) = \sum_{k=1}^2 \alpha_{1,k}(t) \varphi_1(t) e^{\tau k}. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.6) имеет вид:

$$L_0 u_2 = L_1 u_1 = \sum_{k=1}^2 g_k(t) \alpha_{1,k}(t) \varphi_1(t) e^{\tau k}.$$

Решение уравнения определим в виде

$$u_2(t, \tau) = \sum_{k=1}^2 \alpha_{2,k}(t) \varphi_1(t) e^{\tau k} + \sum_{k=1}^2 g_k(t) \alpha_{1,k}(t) \varphi_2(t) e^{\tau k}. \quad (2.11)$$

С учетом (2.10), (2.11) из (2.7) приходим к уравнению

$$\begin{aligned} L_0 u_3 = L_1 u_2 + u'_1 = & \sum_{k=1}^2 \{g_k(t) \alpha_{2,k}(t) \varphi_1(t) e^{\tau k} + g_k^2(t) \alpha_{1,k}(t) \varphi_2(t) e^{\tau k} + \\ & + \alpha'_{1,k}(t) \varphi_1(t) e^{\tau k} + \alpha_{1,k}(t) \varphi'_1(t) e^{\tau k}\} = \sum_{k=1}^2 \{g_k(t) \alpha_{2,k}(t) \varphi_1(t) e^{\tau k} + \\ & + g_k^2(t) \alpha_{1,k}(t) \varphi_2(t) e^{\tau k} + \alpha'_{1,k}(t) \varphi_1(t) e^{\tau k} + \alpha_{1,k}(t) [C_1^1(t) \varphi_1(t) + \\ & + C_1^2(t) \varphi_2(t)]\} = \sum_{k=1}^2 \{[\alpha'_{1,k}(t) + \alpha_{1,k}(t) C_1^1(t) + \\ & + g_k(t) \alpha_{2,k}(t)] \varphi_1(t) + [C_1^2(t) + g_k^2(t) \alpha_{1,k}(t) \varphi_2(t)] e^{\tau k}\}. \end{aligned}$$

Ортогонализуя правую часть, получаем

$$C_1^2(t) + g_k^2(t) = 0.$$

Отсюда находим

$$g_k^2(t) = -C_1^2(t)$$

или

$$g_k(t) = \pm i \sqrt{C_1^2(t)}.$$

Тогда

$$L_0 u_3 = \sum_{k=1}^2 [\alpha'_{1,k}(t) + \alpha_{1,k}(t)C_1^1(t) + g_k(t)\alpha_{2,k}(t)]\varphi_1(t)e^{\tau k}.$$

Это уравнение по теореме 1 разрешимо в U , и его решение имеет вид

$$u_3(t, \tau) = \sum_{k=1}^2 [\alpha_{3,k}(t)\varphi_1(t)e^{\tau k} + [\alpha'_{1,k}(t) + \alpha_{1,k}(t)C_1^1(t) + g_k(t)\alpha_{2,k}(t)]\varphi_2(t)]e^{\tau k}. \quad (2.12)$$

2. Для преобразования (2.8) используем решения (2.10)–(2.12) и получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$2\alpha'_{1,k}(t) + [C_1^1(t) + C_2^2(t) + g'_k(t)]\alpha_{1,k}(t) = 0, \quad k = 1, 2. \quad (2.13)$$

Начальные условия для системы (2.13) с учетом (2.5), (2.9) определяются из системы

$$\sum_{k=1}^2 \alpha_{1,k}(0) = 0, \quad (2.14)$$

$$\sum_{k=1}^2 \alpha_{2,k}(0)\varphi_1(0) + \sum_{k=1}^2 g_k(0)\alpha_{1,k}(0)\varphi_2(0) = 0. \quad (2.15)$$

Так как матрица системы (2.6), (2.7) невырожденная, то решение равно нулю:

$$\alpha_{1,k}(0) = 0, \quad k = 1, 2. \quad (2.16)$$

Следовательно, система (2.13) с начальным условием (2.16) имеет единственное нулевое решение. Теорема 2 доказана.

На основании теорем 1, 2 последовательно решим итерационные задачи (1.10)–(1.12).

Заключая, сформулируем теорему об оценке остаточного члена:

Теорема 3. Пусть для задачи (1.1), (1.2) выполнены условия 1–5 и решения задач (1.8), (1.9) определены в виде степенного ряда (1.6) из пространства U . Тогда сужение ряда (1.6) при $\tau = \psi(t, \varepsilon)$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ является асимптотическим рядом для решения начальной задачи (1.1), (1.2).

Литература

- [1] Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Пг., 1917.

- [2] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
- [3] Жукова Г.С. Асимптотическое интегрирование линейных дифференциальных систем с кратным спектром у предельной матрицы и малым параметром при производной. Киев, 1989. 43 с.
- [4] Жукова Г.С. Асимптотическое интегрирование обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1988. 200 с.
- [5] Моисеев Н.Н. Асимптотическое представление решений линейных и дифференциальных уравнений в случае кратных элементарных делителей // Докл. АН СССР. 1966. Т. 170. №4. С. 780–782.
- [6] Территин Х.Л. Асимптотическое поведение решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Математика. 1957. Т. 1. №2. С. 129–159.
- [7] Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Мат. сб. 1952. Т. 31. С. 175–586.
- [8] Треногин В.А. Асимптотика и существование решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве // Докл. АН СССР. 1963. Т. 152. №1. С. 63–66.
- [9] Trjitzinssky W.S. Theory of linear differential equations containing a parameter // Acta Math. 1936. V. 67. P. 1–50.
- [10] Федорюк М.В. Асимптотические методы для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 352 с.
- [11] Филатов А.Н. Асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений. Ташкент: Фан, 1974.
- [12] Шкиль Н.Н. Асимптотические методы в дифференциальных уравнениях. Киев: Вища школа, 1971.
- [13] Елисеев А.Г. Теория сингулярных возмущений для систем дифференциальных уравнений в случае кратного спектра предельного оператора, I, II // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48. №5. С. 999–1042.
- [14] Елисеев А.Г., Ломов С.А. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора // Мат. сб. 1986. Т. 131(173). №4. С. 544–557.
- [15] Елисеев А.Г., Сафонов В.Ф. Методы асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МЭИ, 1990. 60 с.
- [16] Джураев А.М. Асимптотическое интегрирование краевой задачи с кратным чисто мнимым спектром: Сб. науч. тр. М.: МЭИ, 1987. №141. С. 30–34.
- [17] Джураев А.М. Разработка метода регуляризации для некоторых задач с кратным спектром: Тез. докл. кратких науч. сообщ. Всесоюз. совещания "Методы малого параметра". Нальчик: Кабардино-Балкарский гос. ун-т, 1987. С. 54.

- [18] Джураев А.М. Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущенных задач: Тез. докл. науч.-теор. конф. Иссык-Кульского гос. ун-та. Каракол: ИГУ, 1993. С. 4.
- [19] Джураев А.М. Сингулярно возмущенная задача Коши с нестабильным спектром // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 1994. Вып. 25. С. 7–10.
- [20] Джураев А.М. Сингулярно возмущенная краевая задача: Тез. докл. междунар. науч.-практ. конф. Ош: Ошск. высший колледж, 1995. С. 105.
- [21] Dzhuraev A.M. A problem with a multiple pure imaginary spectrum // 1st Turkish world mathematics symposium. Elazig: Firat University, 1999. P. 124–127.
- [22] Джураев А.М. Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущенных задач с кратным спектром. Ош: Ошск. техн. ун-т, 1999. 108 с.
- [23] Джураев А.М. Задача Коши для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения с нестабильным спектром: Тр. междунар. науч. конференции. Бишкек: Кыргызск. гос. нац. ун-т, 2000. С. 152–155.
- [24] Джураев А.М. О состоянии современной теории возмущений // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2003. Вып. 32. С. 154–158.
- [25] Джураев А.М., Туратов С.Д. Краевые задачи для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с кратным спектром // Сборник материалов Всероссийской конференции "Математическое моделирование и краевые задачи", приуроченной к 90-летию СамГТУ. Самара: СамГТУ, 2004.

Поступила в редакцию 28/IX/2004;
в окончательном варианте — 14/VII/2005.

**INITIAL VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF TWO
SINGULARLY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATIONS
WITH A MULTIPLE PURE IMAGINARY SPECTRUM**

© 2005 A.M. Dzhurayev²

In the paper a new asymptotic integration method for a system of two singularly perturbed differential equations with multiple pure imaginary spectrum is proposed. The initial value problem under stable spectrum conditions is studied. The solvability theorems are proved and the residual term estimation is given.

Paper received 28/*IX*/2004.

Paper accepted 14/*VII*/2005.

²Dzhurayev Abubakir Muhtarovich (ajrv@rambler.ru), Uzbek Humanity Pedagogical Institute, Osh State University, Osh, 714000, Kyrgyz Republic.