УДК 517.9

О НЕКОТОРЫХ ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ[1]

© 2005 Л.М. Беркович, А.Н. Лепилов[2]

Используя методы группового анализа и точной линеаризации дифференциальных уравнений, найдены автомодельные решения (точные и асимптотические) нелинейного уравнения теплопроводности. Получены решения, описывающие как режимы с обострением, так и бегущие волны.

Введение

В современной науке наблюдается большой интерес к процессам, происходящим в нелинейных средах. Задачи гидродинамики, физики атмосферы и океана, физики плазмы, изучение активных биологических сред, задачи экологии, проблемы городского хозяйства, и в частности распределение населения и транспортных потоков, порождают интерес к нелинейным явлениям в средах.

Рассмотрим процесс горения в среде с объемным источником тепла и коэффициентом теплопроводности, степенным образом зависящими от температуры. Такие процессы описываются в одномерном нестационарном случае в плоской геометрии уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa_0 T^{\sigma}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + q_0 T^{\beta}.$$

Горение инициируется заданием отличного от нуля профиля температуры $T_0(x)$ в ограниченном участке среды в момент $t = t_0$:

$$T(x,t_0) = \begin{cases} T_0(x), & 0 \leqslant x < a, \\ 0, & x \geqslant a. \end{cases}$$

Такая задача рассматривалась в работах [1–3].

---

[1]Представлена доктором физико-математических наук профессором В.И. Астафьевым.

[2]Беркович Лев Мейлихович (berk@ssu.samara.ru), Лепилов Александр Николаевич, кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Указанное выше уравнение всегда можно пронормировать, то есть избавиться от коэффициентов $\varkappa_0$ и q_0, поэтому в данной работе для исследования берется следующее квазилинейное уравнение параболического типа

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^\beta, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Более общей является постановка задачи, рассматривавшейся в работе [4]. В ней исследовалось квазилинейное уравнение теплопроводности с источником:

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{r^\mu} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^\mu \varkappa_0 T^\sigma \frac{\partial}{\partial r} T\right) + q_0 \rho T^\beta,$$

где $E = c_\nu T$, а также c_ν, $\varkappa_0$, $q_0 > 0$, $\sigma > 0$, $\beta > 1$ — ограничения на параметры в плоской ($\mu = 0$), цилиндрической ($\mu = 1$) и сферической ($\mu = 2$) геометриях в среде с распределенной плотностью $\rho = Ar^{-k}$, $0 \leqslant k < 2$.

Горение инициируется заданием на полупрямой $0 < r < \infty$ некоторого начального ограниченного распределения температуры $T(r, 0) = T_0(r) \leqslant \leqslant M < \infty$.

Хотя мы и ограничиваемся исследованием уравнения (1.1) (см. ниже), но методы, примененные к нему, могут быть использованы и для уравнения, рассматривавшегося в работе [4].

1. Точные решения

Итак, будем рассматривать уравнение

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^\beta, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

1.1. Нахождение точных автомодельных решений

Для нахождения автомодельных решений рассмотрим некоторые групповые свойства уравнения (1.1) (см., например, [3]).

Пусть дана группа аффинных преобразований

$$t' = te^\alpha, \qquad x' = xe^\gamma, \qquad u' = ue^\delta. \tag{1.2}$$

Подставляя формулы (1.2) в (1.1), после несложных преобразований получим, что (1.1) допускает однопараметрическую группу:

$$t' = te^\alpha, \qquad x' = xe^{\frac{\sigma-\beta+1}{2(1-\beta)}\alpha}, \qquad u' = ue^{\frac{\alpha}{1-\beta}}, \qquad \beta \neq 1. \tag{1.3}$$

Группе (1.3) соответствует инфинитезимальный оператор

$$X_1 = t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sigma - \beta + 1}{2(1-\beta)} x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{1-\beta} u \frac{\partial}{\partial u}. \tag{1.4}$$

Уравнение (1.1) допускает и другие однопараметрические группы, в частности, группы трансляций по t и по x. Группе трансляций по переменной t, а именно $t' = t + \varepsilon$, $x' = x$, $u' = u$, соответствует инфинитезимальный оператор

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial t}. \tag{1.5}$$

Рассмотрим теперь линейную комбинацию операторов X_1 и X_2, а именно $X = T_0 X_2 - X_1$, где $T_0 = \mathrm{const}$, т.е.

$$X = (T_0 - t)\,\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\sigma - \beta + 1}{2\,(1-\beta)}\,x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{1-\beta}\,u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{1.6}$$

Таким образом, уравнение (1.1) допускает следующую однопараметрическую группу:

$$t' = T_0 - (T_0 - t)e^{-\alpha}, \qquad x' = xe^{-\frac{\sigma-\beta+1}{2(1-\beta)}\alpha}, \qquad u' = ue^{-\frac{1}{1-\beta}\alpha}. \tag{1.7}$$

Теперь найдем автомодельную переменную и автомодельное решение из системы

$$\frac{dt}{T_0 - t} = \frac{dx}{\dfrac{\sigma-\beta+1}{2\,(\beta-1)}x} = \frac{du}{\dfrac{1}{\beta-1}u}. \tag{1.8}$$

Первые интегралы системы (1.8) имеют вид

$$\frac{x}{(T_0 - t)^{\frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}}} = C_1, \qquad \frac{u}{(T_0 - t)^{-\frac{1}{\beta-1}}} = C_2. \tag{1.9}$$

Из (1.9) находим автомодельную переменную

$$s = \frac{x}{(T_0 - t)^{\frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}}}, \tag{1.10}$$

а также автомодельное решение

$$u(t,x) = (T_0 - t)^{-\frac{1}{\beta-1}}\,y(s), \tag{1.11}$$

где $y(s)$ удовлетворяет обыкновенному нелинейному неавтономному дифференциальному уравнению

$$y''(s) + \frac{\sigma}{y}y'^2(s) + \frac{\sigma+1-\beta}{2(\beta-1)}sy^{-\sigma}y'(s) + y^{\beta-\sigma} - \frac{1}{\beta-1}y^{1-\sigma} = 0. \tag{1.12}$$

В случае $\beta = \sigma + 1$ (1.12) примет вид нелинейного автономного уравнения

$$y''(s) + \frac{\sigma}{y}y'^2(s) + y - \frac{1}{\sigma}y^{1-\sigma} = 0. \tag{1.13}$$

Далее покажем, что уравнение (1.12) в общем случае не обладает групповыми свойствами, т.е. не допускает точечных симметрий.

Сначала избавляемся от члена $\frac{\sigma}{y}y'^2(s)$ заменой вида $y(s) = Y^{\frac{1}{1+\sigma}}(s)$, а потом вернемся к старым обозначениям для зависимой и независимой переменных. Тогда уравнение (1.12) перепишется так:

$$y''(x) + \frac{\beta-\sigma-1}{2(1-\beta)}xy^{\frac{1}{\sigma+1}-1}y'(x) + (\sigma+1)y^{\frac{\beta}{\sigma+1}} + \frac{\sigma+1}{1-\beta}y^{\frac{1}{\sigma+1}} = 0. \tag{1.14}$$

Определяющее уравнение С. Ли имеет вид (см., например, [5, с. 347])

$$\underset{2}{X}F|_{F=0} = 0,$$

где

$$F = y'' - f(x, y, y'),$$

$$\underset{2}{X} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + \eta_1(x,y,y')\frac{\partial}{\partial y'} + \eta_2(x,y,y',y'')\frac{\partial}{\partial y''},$$

$$\eta_1(x,y,y') = \frac{d\eta}{dx} - y'\frac{d\xi}{dx}, \qquad \eta_2(x,y,y',y'') = \frac{d\eta_1}{dx} - y''\frac{d\xi}{dx},$$

В развернутом виде уравнение для определения группы Ли можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + y'\left(2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right) + y'^2\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}\right) - y'^3\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} +$$

$$+f\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - 2\frac{\partial\xi}{\partial x} - 3y'\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\eta}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right) - y'^2\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial y'} - \xi\frac{\partial f}{\partial x} - \eta\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Для (1.14) определяющее уравнение есть:

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - y'^3\xi_{yy} +$$

$$+\left(\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y\right)\left(-\frac{\beta-1-\sigma}{2(1-\beta)}xy^{\frac{1}{\sigma+1}-1}y' - (\sigma+1)y^{\frac{\beta}{\sigma+1}} - \frac{\sigma+1}{1-\beta}y^{\frac{1}{\sigma+1}}\right) +$$

$$+\left(\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - y'^2\xi_y\right)\frac{\beta-1-\sigma}{2(1-\beta)}xy^{\frac{1}{\sigma+1}-1} + \xi\frac{\beta-1-\sigma}{2(1-\beta)}y^{\frac{1}{\sigma+1}-1}y' +$$

$$+\eta\left(-\frac{\beta-1-\sigma}{2(1-\beta)}\frac{\sigma}{\sigma+1}xy^{\frac{1}{\sigma+1}-2}y' + \beta y^{\frac{\beta}{\sigma+1}-1} + \frac{1}{1-\beta}y^{\frac{1}{\sigma+1}-1}\right) = 0. \qquad (1.15)$$

Уравнение (1.15) можно рассматривать как уравнение третьей степени относительно y', которое удовлетворяется тождественно. Собирая в (1.15) коэффициенты при y'^0, y', y'^2, y'^3 и приравнивая их к нулю, получаем соответственно систему из четырех дифференциальных уравнений в частных производных для $\xi(x,y)$ и $\eta(x,y)$.

$$\xi_{yy} = 0,$$

$$\eta_{yy} - 2\xi_{xy} + 2\xi_y\frac{\beta-1-\sigma}{1-\beta}xy^{\frac{1}{\sigma+1}-1} = 0\,,$$

$$2\eta_{xy} - \xi_{xx} + \xi_x\frac{\beta-1-\sigma}{2(1-\beta)}xy^{\frac{1}{\sigma+1}-1} + 3\xi_y\left((\sigma+1)y^{\frac{\beta}{\sigma+1}} + \frac{\sigma+1}{1-\beta}y^{\frac{1}{\sigma+1}}\right) +$$

$$+\xi\frac{\beta-1-\sigma}{2(1-\beta)}y^{\frac{1}{\sigma+1}-1} - \eta\frac{\beta-1-\sigma}{2(1-\beta)}\frac{\sigma}{\sigma+1}xy^{\frac{1}{\sigma+1}-2} = 0\,,$$

$$\eta_{xx} + (\eta_y - 2\xi_x)\left(-(\sigma+1)y^{\frac{\beta}{\sigma+1}} - \frac{\sigma+1}{1-\beta}y^{\frac{1}{\sigma+1}}\right) +$$

$$+\eta_x\frac{\beta-1-\sigma}{2(1-\beta)}xy^{\frac{1}{\sigma+1}-1} + \eta\left(\beta y^{\frac{\beta}{\sigma+1}-1} + \frac{1}{1-\beta}y^{\frac{1}{\sigma+1}-1}\right) = 0.$$

Эта система имеет только тривиальное решение, т.е. $\xi(x,y) = 0$, $\eta(x,y) = 0$. В свою очередь, это означает, что дифференциальное уравнение (1.12) не обладает точечными симметриями.

Применение группового анализа к (1.13), являющемуся частным случаем (1.12) при $\beta = \sigma + 1$, приводит к иному результату.

Уравнение (1.13) перепишем в виде

$$y''(x) + \frac{\sigma}{y} y'^2(x) + y - \frac{1}{\sigma} y^{1-\sigma} = 0. \tag{1.16}$$

Сначала, как и в общем случае, избавляемся от члена $\frac{\sigma}{y} y'^2(x)$ заменой

$$y(x) = Y^{\frac{1}{1+\sigma}}(x), \tag{1.17}$$

а затем вновь поменяем Y на y. Придем к уравнению

$$y''(x) + (\sigma + 1)y - \frac{\sigma + 1}{\sigma} y^{\frac{1}{1+\sigma}} = 0. \tag{1.18}$$

Определяющее уравнение Ли для (1.18) будет иметь вид

$$\eta\left(\sigma + 1 - \frac{1}{\sigma} y^{\frac{1}{\sigma+1} - 1}\right) + (\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y)\left(-(\sigma + 1)y + \frac{\sigma + 1}{\sigma} y^{\frac{1}{\sigma+1}}\right) -$$

$$-y'^3 \xi_{yy} + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + \eta_{xx} = 0. \tag{1.19}$$

Составляем систему из четырех уравнений для $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ путем приравнивания коэффициентов при y'^0, y', y'^2,y'^3 к нулю. Решая ее, получим, что:

1) при $\sigma \neq -\frac{4}{3}$ $\xi(x, y) = \mathrm{const}$, $\eta(x, y) = 0$, и инфинитезимальный оператор имеет вид $X = \frac{\partial}{\partial x}$;

2) при $\sigma = -\frac{4}{3}$ уравнение (1.18) превращается в

$$y''(x) - \frac{1}{3} y - \frac{1}{4} y^{-3} = 0, \tag{1.20}$$

которое является частным случаем уравнения Ермакова [6, с. 86; 5, с. 43]

$$y'' + a_0(x)y - b_0 y^{-3} = 0, \quad b_0 = \mathrm{const}. \tag{1.21}$$

Из определяющего уравнения (1.19) при $\sigma = -\frac{4}{3}$ находим

$$\xi(x, y) = C_{20} + C_{10} e^{\frac{2}{\sqrt{3}}x} + C_{11} e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}x},$$

$$\eta(x, y) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(C_{10} e^{\frac{2}{\sqrt{3}}x} - C_{11} e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}x}\right) y,$$

откуда получим соответствующие инфинитезимальные операторы:

$$X_1 = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}x}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{3}} y \frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$X_3 = e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}x}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{3}} y \frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Общее решение уравнения Ермакова (1.21) имеет вид

$$y(x) = \sqrt{C_1 Y_2^2 + C_2 Y_1 Y_2 + C_3 Y_2^2}, \qquad C_2^2 - 4C_1 C_3 = -4b_0,$$

где $Y_2 = Y_1 \int Y_1^{-2} dx$, Y_1, Y_2 — фундаментальная система решений уравнения

$$Y'' + a_0(x)Y = 0.$$

Тогда для уравнения (1.20) общее решение примет вид:

$$y = \sqrt{C_1 e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}x} + C_2 + C_3 e^{\frac{2}{\sqrt{3}}x}}, \qquad C_2^2 - 4C_1C_3 = -1.$$

Совершая замену (1.17) и вновь переобозначив Y на y, получим решение уравнения (1.16) при $\sigma = -\frac{4}{3}$ в виде (см. рис. 1, 2)

$$y = \left(C_1 e^{-\frac{2}{\sqrt{3}}x} + C_2 + C_3 e^{\frac{2}{\sqrt{3}}x}\right)^{-\frac{3}{2}}, \qquad C_2^2 - 4C_1C_3 = -1. \tag{1.22}$$

Далее, повторно рассмотрим уравнение (1.16) и найдем его однопараметрические решения методом точной линеаризации (см. [7; 5, с. 283]). Следуя этому методу, уравнение

$$y'' + f(y)y'^2 + \psi(y) = 0$$

преобразованием

$$z = \sqrt{2\int \psi \, \exp\left(2\int f\,dy\right) dy}, \quad dt = \psi \, \exp\left(\int f\,dy\right) z^{-1} dx$$

сводится к уравнению $\ddot{z} + z = 0$, имеет первые интегралы

$$y'^2 = \left(C - z^2\right) \exp\left(-2\int f\,dy\right)$$

и, кроме того, допускает однопараметрические решения

$$\int \exp\left(\int f dy\right) z^{-1} dy = \pm ix + C,$$

где C — произвольная постоянная.

В уравнении (1.16) имеем $f(y) = \frac{\sigma}{y}$, $\psi(y) = y - \frac{1}{\sigma} y^{1-\sigma}$. Формула для решения (1.16) примет вид (см. [5, с. 402])

$$\int \frac{y^{\frac{\sigma-2}{2}}\, dy}{\sqrt{\frac{y^\sigma}{\sigma+1} - \frac{2}{\sigma(\sigma+2)}}} = \pm ix + C, \quad \sigma \neq 0,\, -1,\, -2. \tag{1.23}$$

Подынтегральное выражение в (1.23) представляет собой дифференциальный бином, который берется в конечном виде. В результате получаем следующую формулу для однопараметрического решения уравнения (1.16):

$$y = \left(\frac{\sigma(\sigma+2)}{2(\sigma+1)}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} \left(1 - \frac{\left(1 - Ce^{\frac{i\sigma}{\sqrt{\sigma+1}}x}\right)^2}{\left(1 + Ce^{\frac{i\sigma}{\sqrt{\sigma+1}}x}\right)^2}\right)^{-\frac{1}{\sigma}},$$

которое при $C = 1$, в зависимости от значения параметра σ, можно переписать в более простом виде:

$$\sigma > -1: \quad y = \left(\frac{2(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \left(\cos\frac{\sigma}{2\sqrt{\sigma+1}}x\right)^{\frac{2}{\sigma}}, \tag{1.24}$$

$$\sigma < -1,\ \sigma \neq -2: \quad y = \left(\frac{2(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \left(\cosh\frac{\sigma}{2\sqrt{-\sigma-1}}x\right)^{\frac{2}{\sigma}} \tag{1.25}$$

(см. рис. 3, 4)

Интересно рассмотреть частный случай уравнения (1.1), когда параметр $\beta = 1$, а именно

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x + u. \tag{1.26}$$

Уравнение (1.26) допускает однопараметрическую группу

$$t' = t, \qquad x' = x^{\frac{\delta\sigma}{2}}, \qquad u' = ue^{\delta},$$

а соответствующий инфинитезимальный оператор имеет вид

$$X = \frac{\sigma}{2}x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Составив систему уравнений

$$\frac{dt}{0} = \frac{dx}{\frac{\sigma}{2}x} = \frac{du}{u},$$

найдем ее первые интегралы:

$$t = C_1, \qquad ux^{-\frac{2}{\sigma}} = C_2.$$

В результате получим автомодельное решение (1.26) в форме

$$u(t,x) = x^{\frac{2}{\sigma}}v(t). \tag{1.27}$$

Подставив (1.27) в (1.26), придем к уравнению типа Бернулли

$$\dot{v} = \left(\frac{2}{\sigma}+1\right)\frac{2}{\sigma}v^{\sigma+1} + v. \tag{1.28}$$

Решив его методом вариации произвольной постоянной, найдем выражение для $v(t)$:

$$v(t) = \frac{e^t}{\left(-\left(\frac{2}{\sigma}+1\right)\frac{2}{\sigma}e^{\sigma t} + C_1\right)^{\frac{1}{\sigma}}};$$

тогда точное автомодельное решение уравнения (1.26) примет вид (см. рис. 5, 6):

$$u(t,x) = x^{\frac{2}{\sigma}}\frac{e^t}{\left(-\left(\frac{2}{\sigma}+1\right)\frac{2}{\sigma}e^{\sigma t} + C_1\right)^{\frac{1}{\sigma}}}. \tag{1.29}$$

1.2. Нахождение точных решений типа бегущей волны

Чтобы найти решения типа бегущей волны для уравнения (1.1), построим обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ), выполнив замену:

$$u(t,x) = y(\tau), \quad \tau = x - at. \tag{1.30}$$

Тогда соответствующее ОДУ примет вид:

$$y_{\tau\tau} + \frac{\sigma}{y} y_\tau^2 + a y^{-\sigma} y_\tau + y^{\beta-\sigma} = 0. \tag{1.31}$$

При конкретных соотношениях параметров $\beta = 1-\sigma$ и $\beta = -\sigma$ уравнение (1.31) решается методом точной линеаризации (см. [5, с. 268]).

Уравнение

$$y'' + f(y)y'^2 + b_1\varphi(y)\,y' + b_0\varphi \exp\left(\int f\,dy\right)\int \varphi \exp\left(-\int f\,dy\right)dy = 0$$

преобразованием

$$z = \int \varphi \exp\left(\int f\,dy\right)dy, \quad dt = \varphi(y)dx$$

приводится к линейному виду

$$\ddot{z} + b_1\dot{z} + b_0 z = 0$$

и допускает также однопараметрические решения

$$r_k x + C_k = \int z^{-1} \exp\left(\int f\,dy\right)dy, \qquad k = 1,\ 2,$$

где r_k — простые корни характеристического уравнения: $r^2 + b_1 r + b_0 = 0$.

Случай $\boldsymbol{\beta = 1 - \sigma}$. Уравнение (1.31) примет вид

$$y_{\tau\tau} + \frac{\sigma}{y} y_\tau^2 + a y^{-\sigma} y_\tau + y^{1-2\sigma} = 0. \tag{1.32}$$

Заменой $z = y$, $dt = y^{-\sigma}d\tau$ (1.32) сводится к линейному уравнению

$$\ddot{z} + a\dot{z} + z = 0, \tag{1.33}$$

которому соответствуют характеристические корни

$$r_k = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}, \qquad k = 1,\ 2. \tag{1.34}$$

Тогда однопараметрические решения уравнения (1.32) будут следующими:

$$y = (\sigma r_k \tau + C_k)^{\frac{1}{\sigma}},$$

где r_k удовлетворяют (1.34).

Общее решение (1.32) можно представить в параметрическом виде

$$y = s^{\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}}\left(C_1 + C_2 s^{-\sqrt{a^2-4}}\right), \qquad s = e^t,$$

$$\tau = \int s^{\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}\sigma-1}\left(C_1 + C_2 s^{-\sqrt{a^2-4}}\right)^{\sigma} ds. \qquad (1.35)$$

Заметим, что в силу известной теоремы П.Л. Чебышева интеграл (1.35) берется в конечном виде тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

$$\sigma \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\left(a + \sqrt{a^2-4}\right)\sigma}{2\sqrt{a^2-4}} \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\left(a + 3\sqrt{a^2-4}\right)\sigma}{2\sqrt{a^2-4}} \in \mathbb{Z}.$$

Случай $\beta = -\sigma$. Уравнение (1.31) примет вид

$$y_{\tau\tau} + \frac{\sigma}{y} y_{\tau}^2 + a y^{-\sigma} y_{\tau} + y^{-2\sigma} = 0. \qquad (1.36)$$

Заменой $z = y$, $dt = y^{-\sigma} d\tau$ (1.36) сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\ddot{z} + a\dot{z} + 1 = 0.$$

Общее решение уравнения (1.36) может быть представлено в параметрическом виде:

$$y = C_1 + C_2 e^{-at} - \frac{1}{a} t, \quad \tau = \int \left(C_1 + C_2 e^{-at} - \frac{1}{a} t\right)^{\sigma} dt.$$

2. Асимптотические решения

Рассмотрим уравнение (1.12) в виде

$$y''(x) + \frac{\sigma}{y} y'^2(x) + \frac{\sigma + 1 - \beta}{2(\beta - 1)} x y^{-\sigma} y'(x) + y^{\beta-\sigma} - \frac{1}{\beta - 1} y^{1-\sigma} = 0. \qquad (2.1)$$

Для поиска асимптотических решений применим преобразование Куммера—Лиувилля (см. [5, 6])

$$y = v(x) z, \quad dt = u(x) dx. \qquad (2.2)$$

Получим уравнение вида

$$\ddot{z} + \frac{2v'u + vu'}{vu^2}\dot{z} + \frac{v''}{vu^2} z + \frac{\sigma}{z}\left(\dot{z} + \frac{v'}{vu} z\right)^2 + \frac{\sigma + 1 - \beta}{2(\beta - 1)} x v^{-\sigma} u^{-1} z^{-\sigma}\left(\dot{z} + \frac{v'}{vu} z\right) +$$
$$+ v^{\beta-\sigma-1} u^{-2} z^{\beta-\sigma} - \frac{1}{\beta - 1} v^{-\sigma} u^{-2} z^{1-\sigma} = 0. \qquad (2.3)$$

Потребуем, чтобы

$$x v^{-\sigma} u^{-1} = 1. \qquad (2.4)$$

Рассмотрим специальный случай формулы (2.4): $u = 1$, $v = x^{\frac{1}{\sigma}}$. Преобразование (2.2) будет иметь вид

$$y = x^{\frac{1}{\sigma}} z, \quad dt = dx, \qquad (2.5)$$

с помощью которого уравнение (2.1) примет форму

$$z'' + \frac{2}{\sigma x} z' + \frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)\frac{1}{x^2} z + \frac{\sigma}{z}\left(z' + \frac{1}{\sigma x} z\right)^2 + \frac{\sigma + 1 - \beta}{2(\beta - 1)} z^{-\sigma}\left(z' + \frac{1}{\sigma x} z\right) +$$

$$+x^{\frac{\beta-\sigma-1}{\sigma}}z^{\beta-\sigma}-\frac{1}{\beta-1}x^{-1}z^{1-\sigma}=0. \tag{2.6}$$

Будем искать решения уравнения (2.6) при $x\to\infty$.

Случай $0<\beta<\sigma$, $\beta\neq 1$. Тогда получим уравнение

$$z''+\frac{\sigma}{z}z'^2+\frac{\sigma+1-\beta}{2(\beta-1)}z^{-\sigma}z'=0. \tag{2.7}$$

Применим метод точной линеаризации. Выполнив замену $w=z$, $ds==z^{-\sigma}dx$, придем к уравнению вида

$$z''(s)+\frac{\sigma+1-\beta}{2(\beta-1)}z'(s)=0.$$

Однопараметрические решения уравнения (2.7) имеют вид

$$z=\left(\frac{\sigma(\sigma+1-\beta)}{2(1-\beta)}x+C\right)^{\frac{1}{\sigma}},\quad z=\mathrm{const}. \tag{2.8}$$

Асимптотические автомодельные решения уравнения (2.1) можно в силу (2.5) и (2.8) представить, в частности, в виде $y=\lambda x^{2/\sigma}$ и $y=\mu x^{1/\sigma}$, где λ и μ — определенные постоянные.

Отметим также общее решение уравнения (2.7):

$$z=C_1e^{\frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}s}+C_2,\quad x=\int\left(C_1e^{\frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}s}+C_2\right)^{\sigma}ds.$$

Применим новую переменную интегрирования $e^s=\tau$, тогда

$$z=C_1\tau^{\frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}}+C_2,\quad x=\int\tau^{-1}\left(C_1\tau^{\frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}}+C_2\right)^{\sigma}ds.$$

При любых рациональных β и σ указанный выше интеграл берется в конечном виде.

Случай $\beta=\sigma+1$. При этом (2.6) можно заменить уравнением

$$z''+\frac{\sigma}{z}z'^2+z=0. \tag{2.9}$$

а (2.1) — уравнением (1.16). Уравнение (2.9) преобразованием $z=w^{\frac{1}{\sigma+1}}$ приводится к линейному виду

$$w''+(\sigma+1)w=0.$$

Общее решение уравнения (2.9) имеет вид:

$$z=\begin{cases}\left(C_1e^{\sqrt{-\sigma-1}x}+C_2e^{-\sqrt{-\sigma-1}x}\right)^{\frac{1}{\sigma+1}}, & \sigma\leqslant-1,\\ \left(C_1\cos\left(x\sqrt{\sigma+1}\right)+C_2\sin\left(x\sqrt{\sigma+1}\right)\right)^{\frac{1}{\sigma+1}}, & \sigma>-1.\end{cases} \tag{2.10}$$

Из (2.5) и (2.10) можно найти асимптотические автомодельные решения уравнения (1.16).

Замечание. В работах [1–4] рассматривались режимы с обострением. Поэтому значения параметров выбирались вида $\beta=\sigma+1$, $\beta<\sigma+1$, $\beta>\sigma+1$ при $\sigma>0$. В данной работе рассматриваются также случаи при $\sigma\leqslant-1$ и дана их геометрическая интерпретация. Мы не обсуждаем их физический смысл.

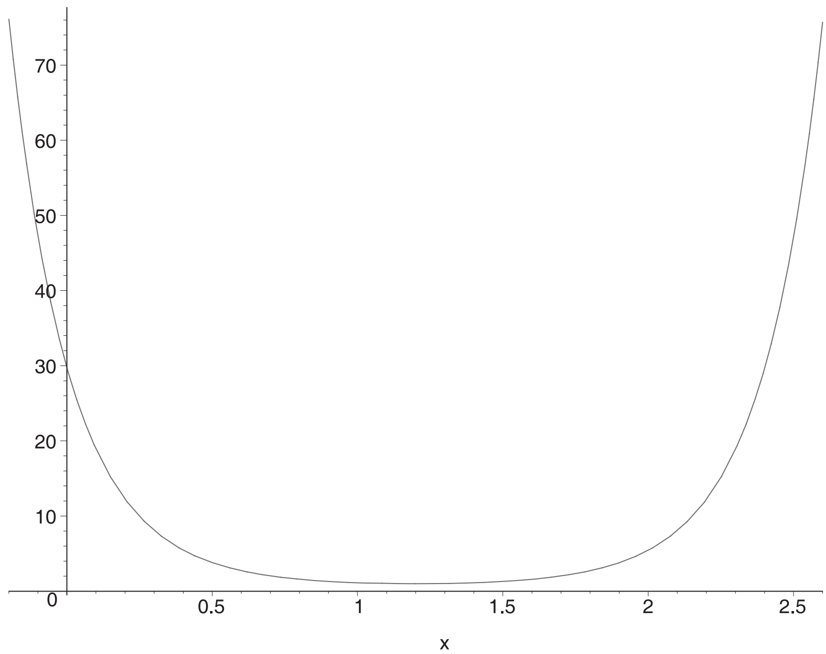

Рис. 1. Решение (1.22) ($C_1 = 2,\ C_2 = 0$) уравнения (1.16) при $\sigma = -\frac{4}{3}$

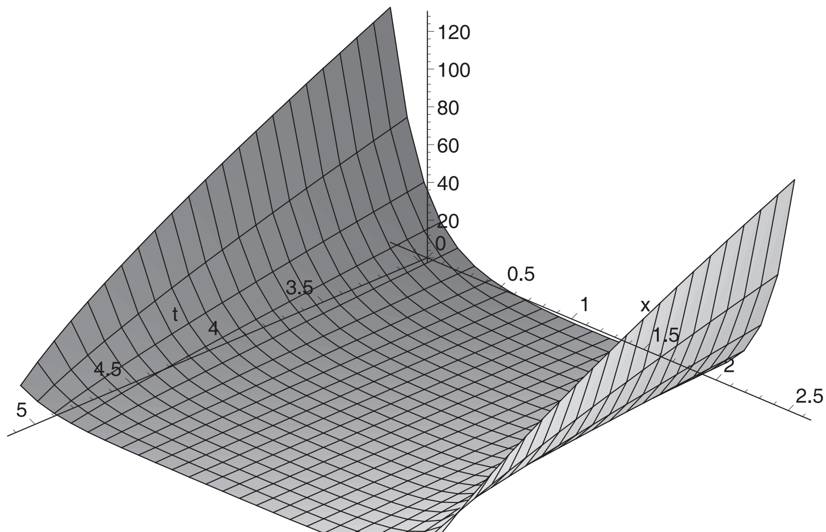

Рис. 2. Интегральная поверхность уравнения (1.1) при $\sigma = -\frac{4}{3}$, $\beta = -\frac{1}{3}$, ($C_1 = 2$, $C_2 = 0$)

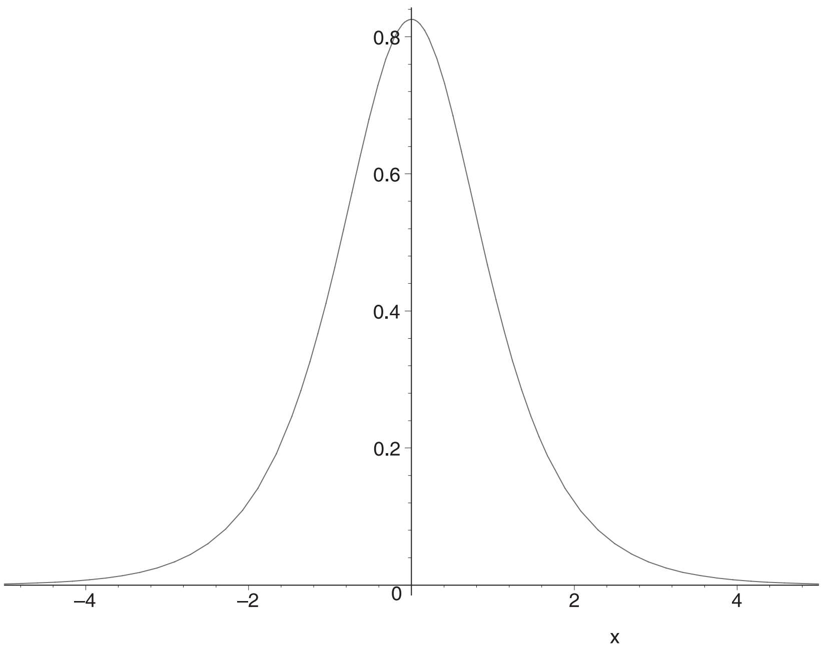

Рис. 3. Интегральная кривая уравнения (1.16) при σ = −1.5

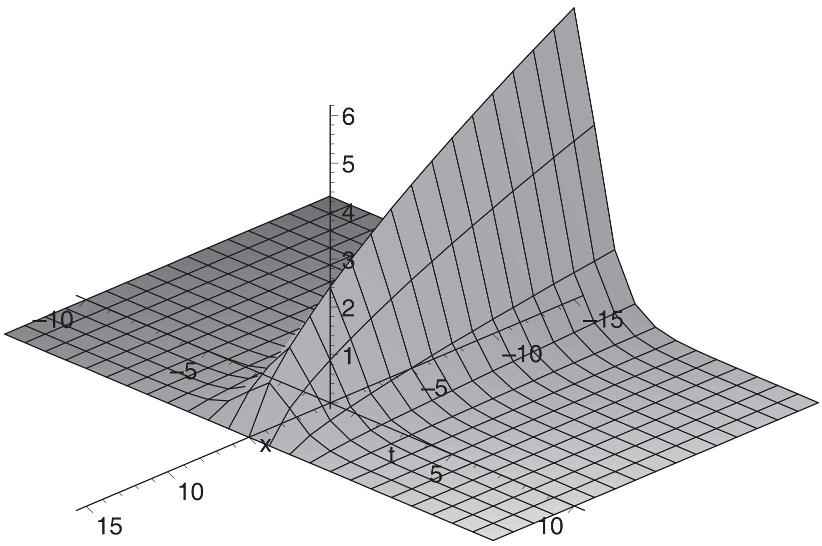

Рис. 4. Интегральная поверхность уравнения (1.1) при σ = −1.5, β = −0.5

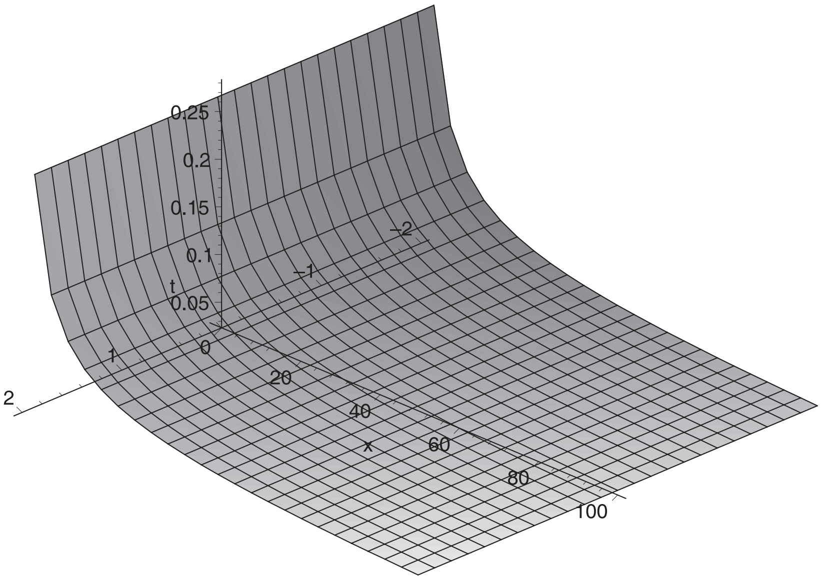

Рис. 5. Интегральная поверхность уравнения (1.26) при $\sigma = -3$

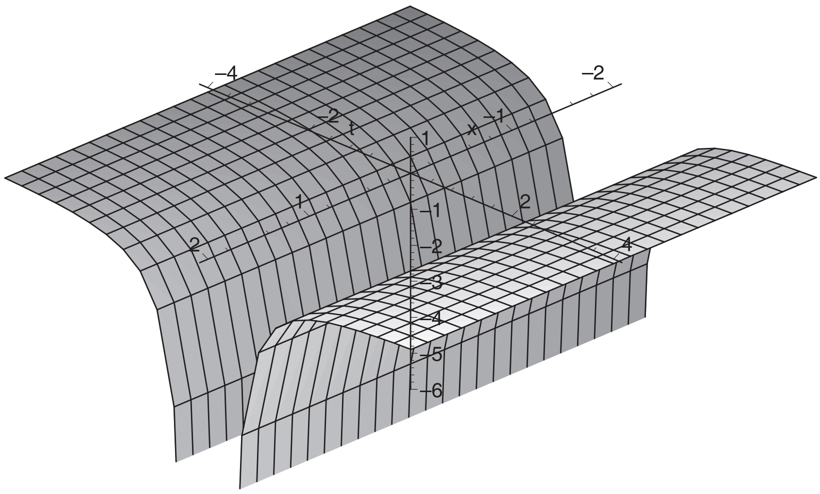

Рис. 6. Интегральная поверхность уравнения (1.26) при $\sigma = -1$

Литература

[1] Курдюмов С.П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982. С. 217–243.

[2] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П. и др. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 470 с.

[3] Галактионов В.А., Дородницын В.А., Еленин Г.Г. и др. Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотины, структуры // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Деп. в ВИНИТИ. М., 1986. Т. 28. С. 95–205.

[4] Куркина Е.С., Курдюмов С.П. Спектр диссипативных структур, развивающихся в режиме с обострением // Доклады Академии наук. 2004. Т. 395. №6. С. 743–748.

[5] Беркович Л.М. Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002. 464 с.

[6] Беркович Л.М. Преобразование обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Куйбышев: Изд-во КГУ, 1978. 92 с.

[7] Беркович Л.М. Метод точной линеаризации нелинейных автономных дифференциальных уравнений второго порядка // Прикл. матем. мех. 1979. Т. 43. №4. С. 629–638.

Поступила в редакцию 12/*IV*/2005;
в окончательном варианте — 16/*VII*/2005.

INVARIANT SOLUTIONS OF THE NONLINEAR HEAT CONDUCTION EQUATION[3]

© 2005 L.M. Berkovich, A.N. Lepilov[4]

In the paper self-similar solutions (exact and asymptotic) of the nonlinear heat conduction equation are obtained by using group analysis technique and exact linearization of differential equations. The obtained solutions describe both the processes of blow-up and travelling wave.

Paper received 12/IV/2005.
Paper accepted 16/VII/2005.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. V.I. Astafjev.

[4]Berkovich Lev Meilikhovich (berk@ssu.samara.ru), Lepilov Alexander Nickolaevich, Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.