

ТЕОРИЯ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ СПЕКТРА ЭНЕРГИИ АТОМА МЮОННОГО ВОДОРОДА¹

© 2005 А.П. Мартыненко²

Вычислены поправки порядка α^3 , α^4 и α^5 в лэмбовском сдвиге $1S$ и $2S$ уровней энергии атомов мюонного водорода (μp) и мюонного дейтерия (μd). Учтены эффекты структуры ядра в терминах зарядовых радиусов протона r_p и дейтрона r_d для однофотонного взаимодействия, а также с помощью электромагнитных формфакторов протона и дейтрона в случае однопетлевых амплитуд. Получено численное значение изотопического сдвига (μd)–(μp) для расщепления ($1S \div 2S$) 101003.3495 мэВ, которое может рассматриваться как надежная оценка при проведении соответствующего эксперимента с точностью 10^{-6} . Вычислены интервалы тонкой структуры $E(1S) - 8E(2S)$ в мюонном водороде и мюонном дейтерии.

Введение

Исследование структуры уровней энергии водородоподобных (ВП) атомов представляет собой важную задачу для проверки Стандартной модели и получения более точных значений ряда фундаментальных физических констант (постоянная тонкой структуры, массы электрона и мюона, зарядовый радиус протона и др.) [1, 2, 3]. В последние годы значительный интерес в этой области связан с атомом мюонного водорода [4–7]. Он обусловлен прежде всего активизацией экспериментальных исследований лэмбовского ($2P - 2S$) сдвига и сверхтонкой структуры атома мюонного водорода. Измерение лэмбовского сдвига ($2P - 2S$) с точностью 30 *ppm* позволит получить величину зарядового радиуса протона с точностью 10^{-3} , что на порядок больше того значения, которое известно в настоящее время из различных источников, включая электрон-протонное рассеяние и значение лэмбовского сдвига ($2P - 2S$) в атоме электронного водорода. Измерение сверхтонкого расщепления основного состояния мюонного водорода с аналогичной точностью позволило бы получить новое значение другого фундаментального

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором В.А. Салеевым.

²Мартыненко Алексей Петрович (mart@ssu.samara.ru), кафедра общей и теоретической физики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

параметра теории — радиуса Земаха [8] с точностью 10^{-3} [9, 10]. Затем оно может быть использовано при вычислении нового теоретического значения сверхтонкого расщепления в электронном водороде и ограничений на величину поправки на поляризуемость протона [11–13].

Наконец, существует еще одна экспериментальная задача исследования интервала большой тонкой структуры ($1S - 2S$) в атоме мюонного водорода и изотопического сдвига ”мюонный водород – мюонный дейтерий” для этого расщепления [14, 15], которая позволяет получить новые данные о зарядовых радиусах протона и дейтрона. Следует отметить, что обе указанные величины входят в число наиболее точно измеренных для атома электронного водорода. Так, величина изотопического сдвига ”водород–дейтерий” для расщепления ($1S - 2S$), при измерении которой экспериментальная точность возросла за прошедшее десятилетие на три порядка, составляет в настоящее время [16]

$$\Delta\nu_{1S} = [E(2S) - E(1S)]_D - [E(2S) - E(1S)]_H = 670\,994\,334.64(15) \text{ kHz}, \quad (1)$$

а интервал ($1S - 2S$) в водороде был измерен с рекордной точностью до сотых долей КГц [17]:

$$\Delta\nu_{1S-2S}(H) = 2\,466\,061\,413\,187\,103(46) \text{ Hz}, \quad \delta = 1.8 \cdot 10^{-14}. \quad (2)$$

Экспериментальные исследования интервалов (1), (2) в мюонном водороде пока находятся на стадии предварительной подготовки.

Теоретические исследования различных вкладов в уровни энергии мюонных атомов проводились много лет назад в работах [18–20] (см. также ссылки на другие работы в обзорной статье [1]). В последние годы вычисление различных поправок в спектре энергии мюонного водорода было связано в основном с лэмбовским сдвигом ($2P - 2S$) и сверхтонкой структурой S -уровней [24, 21, 13, 22, 23]. В этих работах был построен оператор взаимодействия частиц, который дает для интервала ($2P - 2S$) и сверхтонкого расщепления уровней $1S$ и $2S$ поправки порядка α^5 , α^6 . В настоящее время существует необходимость теоретического исследования поправок порядка α^3 , α^4 , α^5 в лэмбовском сдвиге $1S$ и $2S$ состояний мюонного водорода и мюонного дейтерия, в изотопическом смещении (μp) – (μd) для перехода ($1S - 2S$), которое до сих пор оставалось неизвестным, а также в интервале тонкой структуры [$E(1S) - 8E(2S)$]. Такие расчеты могут способствовать активизации экспериментальных исследований интервалов тонкой структуры (1) и (2) в мюонном водороде и получения в результате более точных значений таких фундаментальных физических постоянных как зарядовые радиусы протона и дейтрона, масса мюона.

В данной работе получены численные результаты для вкладов порядка α^3 , α^4 , α^5 в расщеплении $1S - 2S$ и в изотопическом сдвиге (μp) – (μd) для этого расщепления. При этом для некоторых вкладов использовались известные аналитические формулы, на основе которых найдены соответствующие численные значения. Большая часть вкладов для уровней энергии $1S$,

$2S$ в мюонном водороде и изотопическом сдвиге были получены впервые в интегральной форме, которая использовалась для численных оценок. Зависимость от главного квантового числа n подавляющего большинства поправок не является тривиальной, то есть не сводится к фактору $1/n^3$. Причина этого связана с характерными значениями импульса фотонов и обсуждается ниже. Цель работы состояла в расчете квантовоэлектродинамических поправок в изотопическом сдвиге "мюонный водород – мюонный дейтерий" для перехода ($1S - 2S$), в интервале тонкой структуры $[E(1S) - 8E(2S)]$, в получении численных значений этих величин с точностью 10^{-9} , которые могут рассматриваться как надежный ориентир при проведении соответствующих экспериментов, так и для извлечения из этих экспериментов более точных значений зарядового радиуса протона, дейтрона, массы мюона. Тонкая структура спектра энергии ВП-атома исследуется уже длительное время с помощью различных методов [25, 26, 15, 1]. С точностью до членов порядка $(Z\alpha)^4$ уровни энергии S -состояний ВП-атома, состоящего из частиц m_1 и m_2 , определяются следующим выражением:

$$E_n = m_1 + m_2 - \frac{\mu^2(Z\alpha)^2}{2n^2} - \frac{\mu(Z\alpha)^4}{2n^3} \left[1 - \frac{3}{4n} + \frac{\mu^2}{4m_1m_2n} \right]. \quad (3)$$

Несмотря на то, что относительная величина теоретической ошибки в (3), которая связана с неопределенностями α и масс частиц, достигает значений порядка 10^{-7} , мы представили численные значения в (3) с точностью до 0.0001 мэВ, что является важным при рассмотрении различных интервалов тонкой структуры спектра энергии. При этом использовались следующие значения фундаментальных физических констант: $\alpha^{-1} = 137.03599976$ (50), $m_\mu = 0.105658357$ (5), $m_p = 0.938271998$ (38), $m_d = 1.875612762$ (75) Гэв [3]. Вклад выражения (3) в изотопический сдвиг $(\mu p) - (\mu d)$ для перехода ($1S - 2S$) является определяющим (см. табл. 1). Вместе с тем существует ряд важных эффектов как электромагнитного, так и сильного взаимодействия, которые необходимо последовательно учесть для получения величины изотопического сдвига с точностью до членов порядка α^5 включительно.

1. Эффекты одно- и двухпетлевой поляризации вакуума в однофотонном взаимодействии

Наши вычисления спектров энергии водородоподобных атомов выполняются в рамках квазипотенциального метода, в котором связанное состояние двух частиц описывается уравнением шредингеровского типа [27, 28]:

$$[G^f]^{-1} \psi_M \equiv \left(\frac{b^2}{2\mu_R} - \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_R} \right) \psi_M(\mathbf{p}) = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p}, \mathbf{q}, M) \psi_M(\mathbf{q}), \quad (4)$$

где

$$b^2 = E_1^2 - m_1^2 = E_2^2 - m_2^2,$$

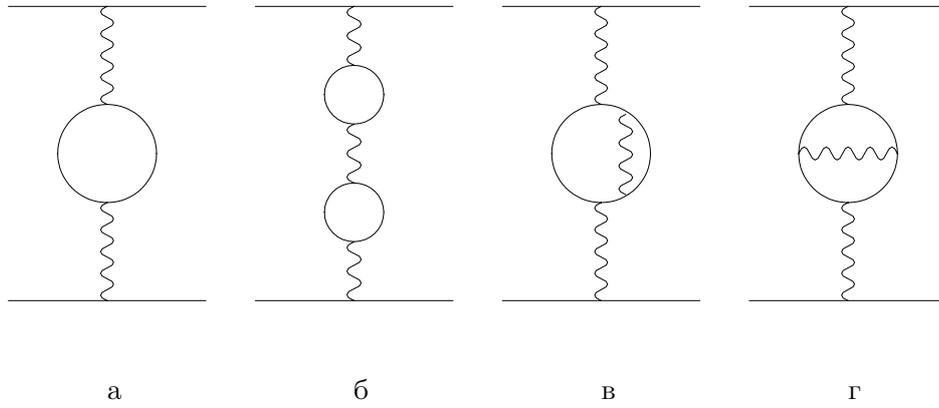


Рис. 1. Эффекты одно- и двухпетлевой поляризации вакуума в однофотонном взаимодействии

$\mu_R = E_1 E_2 / M$ — релятивистская приведенная масса, $M = E_1 + E_2$ — масса связанного состояния. Квазипотенциал уравнения (5) строится в квантовой электродинамике по теории возмущений с помощью спроектированной на положительно частотные состояния двухчастичной амплитуды рассеяния T вне массовой поверхности при нулевых относительных энергиях частиц:

$$V = V^{(1)} + V^{(2)} + V^{(3)} + \dots, \quad T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)} + \dots, \quad (5)$$

$$V^{(1)} = T^{(1)}, \quad V^{(2)} = T^{(2)} - T^{(1)} \times G^f \times T^{(1)}, \dots \quad (6)$$

Увеличение массы лептона при переходе от электронного водорода к мюонному водороду приводит к уменьшению радиуса боровской орбиты (μp). В результате комptonовская длина волны электрона и радиус боровской орбиты (μp) оказываются одного порядка:

$$\frac{\hbar^2}{\mu e^2} : \frac{\hbar}{m_e c} = 0.737384, \quad (7)$$

где m_e — масса электрона, μ — приведенная масса двух частиц в атоме (μp). По этой причине существенно возрастает роль эффектов поляризации вакуума в спектре энергии мюонного водорода [29]. Эффекты одно- и двухпетлевой поляризации вакуума в однофотонном взаимодействии представлены на диаграммах рис. 1.

Чтобы получить вклад диаграммы рис. 1,а (электронная поляризация вакуума) в оператор взаимодействия частиц, необходимо сделать следующую замену в фотонном пропагаторе [29]:

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty ds \frac{\sqrt{s^2 - 1}(2s^2 + 1)}{s^4(k^2 + 4m_e^2 s^2)}. \quad (8)$$

Если $(-k^2) = \mathbf{k}^2 \sim \mu_e^2(Z\alpha)^2 \sim m_e^2(Z\alpha)^2$ (электронный водород, μ_e — приведенная масса двух частиц в атоме водорода), то, пренебрегая первым слагаемым знаменателя в правой части (8), получим: $-\alpha/15\pi m_e^2$. Но если

$\mathbf{k}^2 \sim \mu^2(Z\alpha)^2 \sim m_1^2(Z\alpha)^2$ (мюонный водород, m_1 — масса мюона), тогда параметры $\mu\alpha$ и m_e оказываются одного порядка и делать разложение по α в знаменателе (8) нельзя. В этом случае (мюонный водород) необходимо строить оператор взаимодействия частиц в однофотонном приближении, используя точное выражение (8). В дальнейшем мы учитываем, что электронная поляризация вакуума дает в спектре энергии S -состояний вклады порядка α^3 , α^4 и α^5 .

Модификация кулоновского потенциала $V^C(\mathbf{k}) = -Ze^2/\mathbf{k}^2$ за счет поляризации вакуума (VP) определяется с учетом (8) следующим выражением в импульсном представлении [29]:

$$V_{VP}^C(\mathbf{k}) = -4\pi Z\alpha \frac{\alpha}{\pi} \int_1^\infty \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{3\xi^4} \frac{(2\xi^2 + 1)}{\mathbf{k}^2 + 4m_e^2\xi^2} d\xi. \quad (9)$$

Выполняя преобразование Фурье выражения (9), получим соответствующий оператор в координатном представлении:

$$V_{VP}^C(r) = \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty d\xi \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}(2\xi^2 + 1)}{\xi^4} \left(-\frac{Z\alpha}{r} e^{-2m_e\xi r} \right). \quad (10)$$

Последнее выражение позволяет получить поправку электронной поляризации вакуума порядка α^3 в спектр энергии $1S$ и $2S$ состояний атома мюонного водорода. Имея в виду, что волновые функции $1S$, $2S$ состояний имеют вид

$$\psi_{100}(r) = \frac{W^{3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-Wr}, \quad \psi_{200}(r) = \frac{W^{3/2}}{2\sqrt{2\pi}} e^{-Wr/2} \left(1 - \frac{Wr}{2} \right), \quad W = \mu Z\alpha, \quad (11)$$

представим эту поправку в виде:

$$\Delta E_{1\gamma,VP}(1S) = -\frac{\mu(Z\alpha)^2\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \frac{1}{p_1^2(\xi)}, \quad (12)$$

$$\Delta E_{1\gamma,VP}(2S) = -\frac{\mu(Z\alpha)^2\alpha}{6\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \left(\frac{1}{p_2^2(\xi)} - \frac{2}{p_2^3(\xi)} + \frac{3}{2p_2^4(\xi)} \right), \quad (13)$$

$$p_1(\xi) = 1 + \frac{m_e\xi}{W}, \quad p_2(\xi) = 1 + \frac{2m_e\xi}{W}, \quad \rho(\xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}(2\xi^2 + 1)}{\xi^4}.$$

Эффекты электронной поляризации вакуума очень чувствительны к структуре связанного состояния, так как характерный импульс частиц в атоме мюонного водорода равен $\mu(Z\alpha)$. Поэтому вклад рассматриваемых амплитуд с электронной поляризацией вакуума не сводится к фактору $|\psi^C(0)|^2 \sim 1/n^3$, а зависит от главного квантового числа более сложным образом, который и представлен выражениями (12), (13). Численные значения вклада электронной поляризации вакуума для $1S$, $2S$ состояний мюонного водорода и дейтерия

$$\Delta E_{1\gamma,VP} = \begin{cases} \mu p(1S) : -1898.8379 \text{ meV}; \mu p(2S) : -219.5849 \text{ meV}, \\ \mu d(1S) : -2129.2820 \text{ meV}; \mu d(2S) : -245.3205 \text{ meV} \end{cases} \quad (14)$$

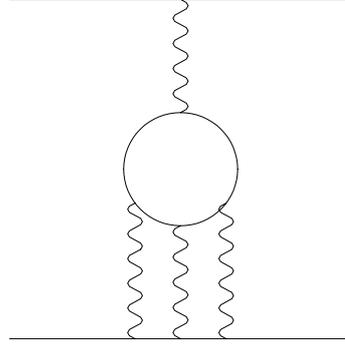


Рис. 2. Поправка Вихмана–Кролла. Волнистой линией обозначен кулоновский фотон

различаются только за счет приведенной массы двух частиц. Вклад мюонной поляризации вакуума (MVP) может быть получен с помощью выражения (9), в котором необходимо заменить $m_e \rightarrow m_\mu$. Эта поправка порядка α^5 в спектре энергии мюонного ВП-атома включена в табл. 1 вместе с мюонной собственно-энергетической поправкой (MSE).

Вид однопетлевой поляризации вакуума имеет еще одна диаграмма на рис. 2, которая определяет в спектре энергии поправку пятого порядка по α -поправку Вихмана–Кролла [30, 31]. Потенциал взаимодействия частиц в этом случае был получен в интегральной форме:

$$\Delta V^{WK}(r) = \frac{\alpha(Z\alpha)^3}{\pi r} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^4} e^{-2m_e \xi r} \left[-\frac{\pi^2}{12} \sqrt{\xi^2 - 10}(\xi - 1) + \int_0^\xi dx \sqrt{\xi^2 - x^2} f^{WK} \right]. \quad (15)$$

Выражение для спектральной функции $f^{WK}(x)$ приведено в [1, 30, 31]. Вычисляя интегралы с волновыми функциями (11), выразим вклад в спектр энергии S -состояний в виде:

$$\Delta E^{WK}(1S) = \frac{\mu\alpha(Z\alpha)^4}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^4 p_1^2(\xi)} \left[-\frac{\pi^2}{12} \sqrt{\xi^2 - 10}(\xi - 1) + \int_0^\xi dx \sqrt{\xi^2 - x^2} f^{WK} \right], \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Delta E^{WK}(2S) &= \frac{\mu\alpha(Z\alpha)^4}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^4} \left(\frac{1}{p_2^2(\xi)} - \frac{2}{p_3^2(\xi)} + \frac{3}{2p_4^2(\xi)} \right) \times \\ &\times \left[-\frac{\pi^2}{12} \sqrt{\xi^2 - 10}(\xi - 1) + \int_0^\xi dx \sqrt{\xi^2 - x^2} f^{WK}(x) \right], \quad (17) \end{aligned}$$

а численные значения поправок (16), (17) представлены в табл. 1.

Рассмотрим модификацию кулоновского потенциала за счет двухпетлевой поляризации вакуума (см. рис. 1). Вклад первой диаграммы, содержащий две последовательно расположенные петли, может быть найден с помощью двухкратной замены (8) в пропагаторе фотона. В координатном представлении соответствующий оператор взаимодействия частиц имеет вид

$$V_{1\gamma, VP-VP}^C(r) = \frac{\alpha^2}{9\pi^2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \left(-\frac{Z\alpha}{r}\right) \frac{\rho(\eta) d\eta}{(\xi^2 - \eta^2)} (\xi^2 e^{-2m_e \xi r} - \eta^2 e^{-2m_e \eta r}) \quad (18)$$

и дает в спектре энергии следующие результаты:

$$\Delta E_{1\gamma, VP-VP}(1S) = -\frac{\mu\alpha^2(Z\alpha)^2}{9\pi^2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \frac{1}{(\xi^2 - \eta^2)}, \quad (19)$$

$$\left(\frac{\xi^2}{p_1^2(\xi)} - \frac{\eta^2}{p_1^2(\eta)}\right) = \begin{cases} \mu p : -1.8816 \text{ meV}, \\ \mu d : -2.1871 \text{ meV}, \end{cases}$$

$$\Delta E_{1\gamma, VP-VP}(2S) = -\frac{\mu\alpha^2(Z\alpha)^2}{18\pi^2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \frac{1}{(\xi^2 - \eta^2)} \times \quad (20)$$

$$\times \left[\xi^2 \left(\frac{1}{p_2^2(\xi)} - \frac{2}{p_2^3(\xi)} + \frac{3}{2p_2^4(\xi)} \right) - \eta^2 \left(\frac{1}{p_2^2(\eta)} - \frac{2}{p_2^3(\eta)} + \frac{3}{2p_2^4(\eta)} \right) \right] = \begin{cases} \mu p : -0.2426 \text{ meV}, \\ \mu d : -0.2811 \text{ meV}. \end{cases}$$

Для вычисления вкладов диаграмм рис. 1,в,г, которые определяются поляризационным оператором второго порядка, необходимо использовать следующую подстановку в фотонном пропагаторе [32]:

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_0^1 \frac{f(v)}{4m_e^2 + k^2(1-v^2)} dv = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{2}{3} \int_0^1 dv \frac{v}{4m_e^2 + k^2(1-v^2)} \times \quad (21)$$

$$\times \left\{ (3-v^2)(1+v^2) \left[Li_2\left(-\frac{1-v}{1+v}\right) + 2Li_2\left(\frac{1-v}{1+v}\right) + \frac{3}{2} \ln \frac{1+v}{1-v} \ln \frac{1+v}{2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \ln \frac{1+v}{1-v} \ln v \right] + \left[\frac{11}{16} (3-v^2)(1+v^2) + \frac{v^4}{4} \right] \ln \frac{1+v}{1-v} + \right. \\ \left. + \left[\frac{3}{2} v (3-v^2) \ln \frac{1-v^2}{4} - 2v (3-v^2) \ln v \right] + \frac{3}{8} v (5-3v^2) \right\}.$$

В данном случае при определении численного значения вклада удобно использовать координатное представление и привести потенциал взаимодействия частиц к виду

$$\Delta V_{1\gamma, 2-loop VP}^C = -\frac{2Z\alpha}{3r} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_0^1 \frac{f(v) dv}{(1-v^2)} e^{-2m_e r / \sqrt{1-v^2}}. \quad (22)$$

Потенциал (22) дает следующие поправки в лэмбовском сдвиге S -уровней мюонного водорода и дейтерия:

$$\Delta E_{1\gamma, 2-loop VP}(1S) = \frac{-2\mu\alpha^2(Z\alpha)^2 W^2}{3\pi^2 m_e^2} \int_0^1 \frac{f(v) dv}{(1+W\sqrt{1-v^2}/m_e)^2} = \\ = \begin{cases} \mu p : -12.6144 \text{ meV}, \\ \mu d : -14.0141 \text{ meV}, \end{cases} \quad (23)$$

$$\Delta E_{1\gamma, 2-loop VP}(2S) = \frac{-1}{12\pi^2} \mu\alpha^2(Z\alpha)^2 \frac{W^2}{m_e^2} \int_0^1 \frac{f(v) dv}{(1+W\sqrt{1-v^2}/2m_e)^2}, \quad (24)$$

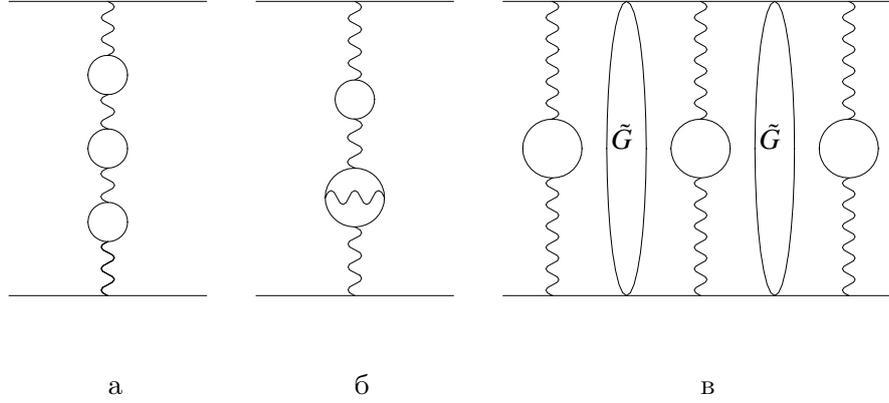


Рис. 3. Эффекты трехпетлевой поляризации вакуума в однофотонном взаимодействии (а,б) и в третьем порядке теории возмущений (в)

$$\left[1 - \frac{2}{p_3(v)} + \frac{3}{2p_3^2(v)} \right] = \begin{cases} \mu p : -1.4112 \text{ meV}, \\ \mu d : -1.5606 \text{ meV}, \end{cases} \quad p_3(v) = \frac{1}{1 + \frac{2m_e}{W\sqrt{1-v^2}}}.$$

Отметим здесь, что, поскольку мы получаем вклады в спектр энергии численно, соответствующие результаты представлены с точностью 0.0001 мэВ.

2. Трехпетлевая поляризация вакуума в однофотонном взаимодействии

В пятом порядке по α дают также вклад трехпетлевые амплитуды поляризации вакуума в однофотонном взаимодействии (см. рис. 3,а,б). Вклад диаграммы рис. 3,а в потенциал имеет вид:

$$V_{VP-VP-VP}^C(r) = -\frac{Z\alpha}{r} \frac{\alpha^3}{(3\pi)^3} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \int_1^\infty \rho(\zeta) d\zeta \times \quad (25)$$

$$\times \left[e^{-2m_e \zeta r} \frac{\zeta^4}{(\xi^2 - \zeta^2)(\eta^2 - \zeta^2)} + e^{-2m_e \xi r} \frac{\xi^4}{(\zeta^2 - \xi^2)(\eta^2 - \xi^2)} + e^{-2m_e \eta r} \frac{\eta^4}{(\xi^2 - \eta^2)(\zeta^2 - \eta^2)} \right].$$

Вклад диаграммы рис. 3,б в потенциал можно представить в интегральной форме, используя выражения (8), (21):

$$V_{VP-2-loop}^C \text{ }_{VP} = -\frac{4\mu\alpha^3(Z\alpha)}{9\pi^3} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \frac{f(\eta)}{\eta} d\eta \frac{1}{r} \times \quad (26)$$

$$\times \left[e^{-2m_e \eta r} \frac{\eta^2}{\eta^2 - \xi^2} - e^{-2m_e \xi r} \frac{\xi^2}{\eta^2 - \xi^2} \right].$$

Соответствующие этим взаимодействиям поправки в спектре энергии атомов (μp) и (μd) равны

$$\Delta E_{VP-VP-VP}(1S) = -\frac{\mu\alpha^3(Z\alpha)^2}{27\pi^3} \int_1^\infty \rho(\xi)d\xi \int_1^\infty \rho(\eta)d\eta \int_1^\infty \rho(\zeta)d\zeta \times \quad (27)$$

$$\times \left[\frac{\xi^4}{(\xi^2 - \eta^2)(\xi^2 - \zeta^2)p_1^2(\xi)} + \frac{\eta^4}{(\eta^2 - \xi^2)(\eta^2 - \zeta^2)p_1^2(\eta)} + \frac{\zeta^4}{(\zeta^2 - \xi^2)(\zeta^2 - \eta^2)p_1^2(\zeta)} \right] = \begin{cases} \mu p : -0.0029 \text{ meV}, \\ \mu d : -0.0034 \text{ meV}, \end{cases}$$

$$\Delta E_{VP-VP-VP}(2S) = -\frac{\mu\alpha^3(Z\alpha)^2}{54\pi^3} \int_1^\infty \rho(\xi)d\xi \int_1^\infty \rho(\eta)d\eta \int_1^\infty \rho(\zeta)d\zeta \times \quad (28)$$

$$\times \left\{ \frac{\xi^4}{(\xi^2 - \eta^2)(\xi^2 - \zeta^2)} \left[\frac{1}{p_2^2(\xi)} - \frac{1}{p_2^3(\xi)} \right] + \frac{\eta^4}{(\eta^2 - \xi^2)(\eta^2 - \zeta^2)} \left[\frac{1}{p_2^2(\eta)} - \frac{1}{p_2^3(\eta)} \right] + \frac{\zeta^4}{(\zeta^2 - \xi^2)(\zeta^2 - \eta^2)} \left[\frac{1}{p_2^2(\zeta)} - \frac{1}{p_2^3(\zeta)} \right] \right\} = \begin{cases} \mu p : -0.0003 \text{ meV}, \\ \mu d : -0.0004 \text{ meV}, \end{cases}$$

$$\Delta E_{VP-2-loop VP}(1S) = -\frac{4\mu\alpha^3(Z\alpha)^2}{9\pi^3} \int_1^\infty \rho(\xi)d\xi \int_1^\infty \frac{f(\eta)}{\eta} \frac{d\eta}{\eta^2 - \xi^2}, \quad (29)$$

$$\left[\frac{\eta^2}{p_1^2(\eta)} - \frac{\xi^2}{p_1^2(\xi)} \right] = \begin{cases} \mu p : -0.0223 \text{ meV}, \\ \mu d : -0.0251 \text{ meV}, \end{cases}$$

$$\Delta E_{VP-2-loop VP}(2S) = -\frac{2\mu\alpha^3(Z\alpha)^2}{9\pi^3} \int_1^\infty \rho(\xi)d\xi \int_1^\infty \frac{f(\eta)}{\eta} \frac{d\eta}{\eta^2 - \xi^2} \times \quad (30)$$

$$\times \left\{ \eta^2 \left[\frac{1}{p_2^2(\eta)} - \frac{1}{p_2^3(\eta)} \right] - \xi^2 \left[\frac{1}{p_2^2(\xi)} - \frac{1}{p_2^3(\xi)} \right] \right\} = \begin{cases} \mu p : -0.0030 \text{ meV} \\ \mu d : -0.0035 \text{ meV} \end{cases}$$

В функции $f(v)$, которая определяется формулой (21), необходимо сделать подстановку: $v = \sqrt{\eta^2 - 1}/\eta$.

Существует еще ряд диаграмм, которые представляют собой трехпетлевые поправки в поляризационный оператор. Они были впервые вычислены для лэмбовского сдвига ($2P - 2S$) в работах Киношиты, Нио [33, 34]. При этом наибольший вклад в спектр энергии дают диаграммы поляризации вакуума 6 порядка с одной электронной петлей (вклады $P^{(p6)}$ [33]). Оценка их вклада в лэмбовский сдвиг уровней энергии $1S$ и $2S$ включена в табл. 1.

3. Эффекты поляризации вакуума с учетом релятивистских поправок

При расчете спектра энергии S -состояний мюонного водорода с точностью α^5 необходимо построить квазипотенциал на основе соотношений (5)–(6), в котором учитываются релятивистские эффекты указанного порядка (гамильтониан Брейта ΔV_B). С учетом электронной поляризации вакуума брейтовский гамильтониан ΔV_B^{VP} был получен Пахуцким в [20]. Опуская

зависящие от спина частиц члены оператора взаимодействия, представим эти гамильтонианы в виде:

$$\Delta V_B = -\mathbf{p}^4 \left(\frac{1}{8m_1^3} + \frac{1}{8m_2^3} \right) + \frac{\pi Z\alpha}{2} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \delta(\mathbf{r}) - \frac{Z\alpha}{2m_1 m_2 r} \left(\mathbf{p}^2 + \frac{r_i r_j p_i p_j}{r^2} \right), \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_B^{VP} = & \frac{\alpha}{3\pi} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \left\{ \frac{Z\alpha}{2} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \left[\pi \delta(\mathbf{r}) - \frac{m_e^2 \xi^2}{r} e^{-2m_e \xi r} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{Z\alpha m_e^2 \xi^2}{m_1 m_2 r} e^{-2m_e \xi r} (1 - m_e \xi r) - \frac{Z\alpha}{2m_1 m_2} p_i \frac{e^{-2m_e \xi r}}{r} \left[\delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^2} (1 + 2m_e \xi r) \right] p_j \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

В первом порядке теории возмущений (ППТВ) потенциал (32) дает следующий вклад в энергетический спектр после усреднения по кулоновским волновым функциям (11):

$$\Delta E_{1,B}^{rel,VP} = \langle \psi^C | \Delta V_B^{VP} | \psi^C \rangle = \begin{cases} \mu p(1S) : 0.1962 \text{ meV}; & \mu p(2S) : 0.0249 \text{ meV}, \\ \mu d(1S) : 0.2515 \text{ meV}; & \mu d(2S) : 0.0322 \text{ meV}. \end{cases} \quad (33)$$

Эти поправки имеют порядок $\alpha(Z\alpha)^4$. Поправки второго порядка теории возмущений (ВПТВ) в спектре энергии ВП системы определяются редуцированной кулоновской функцией Грина (РКФГ) [35], частичное разложение которой имеет вид:

$$\tilde{G}_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l,m} \tilde{g}_{nl}(r, r') Y_{lm}(\mathbf{n}) Y_{lm}^*(\mathbf{n}'). \quad (34)$$

Радиальная функция $\tilde{g}_{nl}(r, r')$ была получена в [35] в виде штурмовского разложения по полиномам Лагерра. Приведем ее выражение для 1S и 2S состояний:

$$\tilde{g}_{10}(r, r') = -4\mu^2 Z\alpha \left(\sum_{m=2}^\infty \frac{L_{m-1}^1(x) L_{m-1}^1(x')}{m(m-1)} + \frac{5}{2} - \frac{x}{2} - \frac{x'}{2} \right) e^{-(x+x')/2}, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{20}(r, r') = & -2\mu^2 Z\alpha \left[\sum_{m=1}^\infty \frac{L_{m-1}^1(x) L_{m-1}^1(x')}{m(m-2)} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{5}{2} + x \frac{\partial}{\partial x} + x' \frac{\partial}{\partial x'} \right) L_1^1(x) L_1^1(x') \right] e^{-(x+x')/2}, \end{aligned} \quad (36)$$

где $x = \mu Z\alpha r$, L_n^m — обычные полиномы Лагерра, которые определяются формулой:

$$L_n^m(x) = \frac{e^x x^{-m}}{n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (e^{-x} x^{n+m}). \quad (37)$$

Ряд слагаемых квазипотенциала содержит $\delta(\mathbf{r})$, поэтому необходимо знать величину $\tilde{G}_n(\mathbf{r}, 0)$. Выражение для РКФГ в этом случае было получено в [36] с помощью представления Хостлера для кулоновской функции Грина в результате вычитания полюсного члена в виде:

$$\tilde{G}_{1S}(\mathbf{r}, 0) = \frac{Z\alpha\mu^2}{4\pi} \frac{2e^{-x/2}}{x} \left[2x(\ln x + C) + x^2 - 5x - 2 \right], \quad (38)$$

$$\tilde{G}_{2S}(\mathbf{r}, 0) = -\frac{Z\alpha\mu^2 e^{-x/2}}{4\pi} \frac{1}{2x} \left[4x(x-2)(\ln x + C) + x^3 - 13x^2 + 6x + 4 \right], \quad (39)$$

где $C = 0.5772\dots$ — постоянная Эйлера. Однопетлевая поляризация вакуума дает во втором порядке теории (SOPT) возмущений вклад, который определяется следующим выражением:

$$\Delta E_{n \text{ SOPT}} = 2 \sum_{m=1, m \neq n}^{\infty} \frac{\langle \Psi_n^C | \Delta V_B | \Psi_m^C \rangle \langle \Psi_m^C | V_{VP}^C | \Psi_n^C \rangle}{E_n^C - E_m^C}, \quad (40)$$

При расчете матричного элемента оператора \mathbf{p}^4 вначале использовалась подстановка $\mathbf{p}^4/4\mu^2 = (H_0 + Z\alpha/r)(H_0 + Z\alpha/r)$ ($H_0 = \mathbf{p}^2/2\mu - Z\alpha/r$), а затем алгебраические преобразования вида:

$$\begin{aligned} & \langle \Psi_n^C | \frac{Z\alpha}{r} H_0 \sum_{m, m \neq n} \frac{|\Psi_m^C\rangle \langle \Psi_m^C|}{E_n^C - E_m^C} V_{VP}^C | \Psi_n^C \rangle = - \langle \Psi_n^C | \frac{Z\alpha}{r} \times \\ & \times \left(I - |\Psi_n^C\rangle \langle \Psi_n^C| \right) V_{VP}^C | \Psi_n^C \rangle + E_n^C \langle \Psi_n^C | \frac{Z\alpha}{r} \sum_{m, m \neq n} \frac{|\Psi_m^C\rangle \langle \Psi_m^C|}{E_n^C - E_m^C} V_{VP}^C | \Psi_n^C \rangle. \end{aligned} \quad (41)$$

Возникающие после интегрирования с РКФГ (34) по координатам r, r' суммы вычислялись с учетом того, что область изменения переменной ξ ($1 \div \infty$) и $1/(1 + W/m_e\xi) < 1$. Характерный матричный элемент для $1S$ состояния имеет вид:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-x} dx \int_0^{\infty} x' e^{-x' p_1(\xi)} dx' \left[\frac{5}{2} - \frac{x}{2} - \frac{x'}{2} + \right. \\ & \left. + \sum \frac{L_{m-1}^1(x) L_{m-1}^1(x')}{m(m-1)} \right] = \frac{5}{4p_1^2(\xi)} - \frac{1}{2p_1^3(\xi)} + \frac{\ln p_1(\xi)}{p_1^2(\xi)}, \quad (42) \\ \sum_{m=2}^{\infty} \frac{[p_1(\xi) - 1]^{m-1}}{(m-1)p_1(\xi)^{m+1}} &= \frac{1}{p_1^2(\xi)} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{(m-1)p_1^{m-1}(\xi)} = \frac{\ln p_1(\xi)}{p_1^2(\xi)}. \end{aligned}$$

Опуская другие многочисленные промежуточные аналитические выражения, приведем суммарное численное значение поправок, для $1S$ и $2S$ уровней во втором порядке теории возмущений (40):

$$\Delta E_{2,B}^{rel,VP} = \begin{cases} \mu p(1S) : -0.2644 \text{ meV}; & \mu p(2S) : -0.0559 \text{ meV}, \\ \mu d(1S) : -0.3194 \text{ meV}; & \mu d(2S) : -0.0696 \text{ meV}. \end{cases} \quad (43)$$

4. Двух- и трехпетлевая поляризация вакуума во втором порядке теории возмущений

Двухпетлевая поляризация вакуума дает вклад во втором порядке теории возмущений (рис. 4,а):

$$\Delta E_{SOPT}^{VP,VP} = \langle \Psi_n^C | V_{VP}^C \cdot \tilde{G} \cdot V_{VP}^C | \Psi_n^C \rangle. \quad (44)$$

Расчет этого матричного элемента может быть выполнен с помощью соотношений (10), (35), (36). В результате получаем следующие поправки для 1S и 2S уровней энергии порядка $\alpha^2(Z\alpha)^2$:

$$\Delta E_{S_{OPT}}^{VP,VP}(1S) = -\frac{\mu\alpha^2(Z\alpha)^2}{9\pi^2} \int_1^\infty \rho(\xi)d\xi \int_1^\infty \rho(\eta)d\eta \left[\frac{5}{2} \frac{1}{p_1^2(\xi)p_1^2(\eta)} - \right. \quad (45)$$

$$\left. -\frac{1}{p_1^2(\xi)p_1^3(\eta)} - \frac{1}{p_1^3(\xi)p_1^2(\eta)} + \frac{[p_1(\xi) - 1][p_1(\eta) - 1]}{p_1^2(\xi)p_1^2(\eta)(p_1(\xi) + p_1(\eta) - 1)} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{p_1^2(\xi)p_1^2(\eta)} \ln \frac{[p_1(\xi) + p_1(\eta) - 1]}{(p_1(\xi) + p_1(\eta))} \right],$$

$$\Delta E_{S_{OPT}}^{VP,VP}(2S) = -\frac{\mu\alpha^2(Z\alpha)^2}{9\pi^2} \int_1^\infty \rho(\xi)d\xi \int_1^\infty \rho(\eta)d\eta f(\xi, \eta), \quad (46)$$

$$f(\xi, \eta) = -\frac{9}{2p_2^4(\xi)p_2^5(\eta)} + \frac{6}{p_2^3(\xi)p_2^5(\eta)} - \frac{3}{p_2^2(\xi)p_2^5(\eta)} - \frac{9}{2p_2^5(\xi)p_2^4(\eta)} + \frac{153}{8p_2^4(\xi)p_2^4(\eta)}$$

$$-\frac{39}{2p_2^3(\xi)p_2^4(\eta)} + \frac{33}{4p_2^2(\xi)p_2^4(\eta)} + \frac{6}{p_2^5(\xi)p_2^3(\eta)} - \frac{39}{2p_2^4(\xi)p_2^3(\eta)} + \frac{17}{p_2^3(\xi)p_2^3(\eta)}$$

$$-\frac{6}{p_2^2(\xi)p_2^3(\eta)} - \frac{3}{p_2^5(\xi)p_2^2(\eta)} + \frac{33}{4p_2^4(\xi)p_2^2(\eta)} - \frac{6}{p_2^3(\xi)p_2^2(\eta)} + \frac{3}{2p_2^2(\xi)p_2^2(\eta)}$$

$$-\frac{z^4}{a_2^2(\xi)a_2^2(\eta)(z-1)} - \frac{z^4(6-5z)}{2a_2^2(\xi)a_2^2(\eta)(z-1)^2 p_2(\xi)} - \frac{z^4(6-5z)}{2a_2^2(\xi)a_2^2(\eta)(z-1)^2 p_2(\eta)} +$$

$$+\frac{z^4(4-3z)}{2a_2^2(\xi)a_2^3(\eta)(z-1)^2} + \frac{z^4(4-3z)}{2a_2^3(\xi)a_2^2(\eta)(z-1)^2} + \frac{z^5(-30+49z-21z^2)}{4a_2^3(\xi)a_2^3(\eta)(z-1)^3}$$

$$-\frac{z^4(-18+27z-11z^2)}{4a_2^2(\xi)a_2^3(\eta)(z-1)^3 p_2(\xi)} - \frac{z^4(-18+27z-11z^2)}{4a_2^3(\xi)a_2^2(\eta)(z-1)^3 p_2(\eta)} + \frac{z^4(-10+13z-5z^2)}{4a_2^3(\xi)a_2^3(\eta)(z-1)^3}$$

$$+\ln(1-z) \left[-\frac{2z^3}{a_2^2(\xi)a_2^2(\eta)} + \frac{3z^3}{a_2^2(\xi)a_2^2(\eta)p_2(\xi)} + \frac{3z^3}{a_2^2(\xi)a_2^2(\eta)p_2(\eta)} - \frac{z^3}{a_2^2(\xi)a_2^3(\eta)} - \right.$$

$$\left. -\frac{z^3}{a_2^3(\xi)a_2^2(\eta)} - \frac{9z^4}{2a_2^3(\xi)a_2^3(\eta)} + \frac{3z^3}{2a_2^2(\xi)a_2^3(\eta)p_2(\xi)} + \frac{3z^3}{2a_2^2(\xi)a_2^3(\eta)p_2(\eta)} - \frac{z^3}{2a_2^3(\xi)a_2^2(\eta)p_2(\eta)} - \frac{z^3}{2a_2^3(\xi)a_2^3(\eta)} \right],$$

где $a_2(\xi) = p_2(\xi) - 1$, $z = a_2(\xi)a_2(\eta)/p_2(\xi)p_2(\eta)$.

Вклады трехпетлевой поляризации вакуума во ВПТВ, показанные на рис. 4,б,в,г, имеют порядок $\alpha^3(Z\alpha)^2$. Для их вычисления вновь необходимо использовать выражение для одно- и двухпетлевого поляризационного оператора. Выполняя интегрирование по координатам волновых функций, можно представить эти вклады в виде:

$$\Delta E_{S_{OPT}}^{VP-VP,VP}(1S) = -\frac{2\mu\alpha^3(Z\alpha)^2}{27\pi^3} \times \quad (47)$$

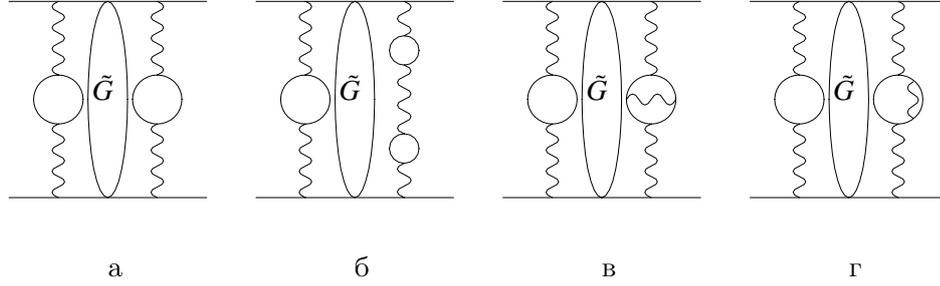


Рис. 4. Поправки двух- и трехпетлевой поляризации вакуума во втором порядке теории возмущений

$$\times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \frac{\rho(\eta) d\eta}{(\xi^2 - \eta^2)} \int_1^\infty \frac{\rho(\zeta) d\zeta}{p_1^2(\zeta)} \left[\frac{\xi^2 g(\xi, \zeta)}{p_1^2(\xi)} - \frac{\eta^2 g(\eta, \zeta)}{p_1^2(\eta)} \right],$$

$$g(\xi, \zeta) = \frac{5}{2} - \frac{1}{p_1(\xi)} - \frac{1}{p_1(\zeta)} + \frac{[p_1(\xi) - 1][p_1(\zeta) - 1]}{p_1(\xi) + p_1(\zeta) - 1} - \ln \frac{p_1(\xi) + p_1(\zeta) - 1}{p_1(\xi) \cdot p_1(\zeta)}, \quad (48)$$

$$\Delta E_{S OPT}^{VP-VP,VP}(2S) = -\frac{2\mu\alpha^3(Z\alpha)^2}{27\pi^3} \times \quad (49)$$

$$\times \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \int_1^\infty \rho(\eta) d\eta \int_1^\infty \rho(\zeta) d\zeta \frac{[\xi^2 f(\xi, \zeta) - \eta^2 f(\eta, \zeta)]}{\xi^2 - \eta^2},$$

где функция $f(\xi, \zeta)$ определена ранее выражением (46),

$$\Delta E_{S OPT}^{2-loop VP,VP}(1S) = -\frac{\mu\alpha^3(Z\alpha)^2}{9\pi^2} \int_0^1 f(v) dv \left\{ \frac{5}{2} \frac{1}{p_1^2(\xi) q_1^2(v)} - \frac{1}{p_1^3(\xi) q_1^2(v)} + \right. \quad (50)$$

$$\left. + \frac{1}{p_1^2(\xi) q_1^2(v)} \left[\frac{p_1(\xi) q_1(v)}{p_1(\xi) + q_1(v) + 1} - \ln \frac{p_1(\xi) + q_1(v) + 1}{p_1(\xi) + q_1(v)} \right] \right\}, \quad q_1(v) = 1 + \frac{m_e}{W \sqrt{1-v^2}},$$

$$\Delta E_{S OPT}^{2-loop VP,VP}(2S) = -\frac{4\mu\alpha^3(Z\alpha)^2}{9\pi^3} \int_0^1 \frac{f(v) dv}{1-v^2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi f(\xi, v), \quad (51)$$

где в функции $f(\xi, v)$ $p_2(v) = 1 + 2m_e/W \sqrt{1-v^2}$, $a_2(v) = 2m_e/W \sqrt{1-v^2}$. Вклад поправок (45)–(51) в изотопический сдвиг равен:

$$\Delta E_{S OPT,IS}^{VP,VP} = 0.3125 \text{ meV}, \quad (52)$$

а отдельные вклады для S -уровней представлены в табл. 1. Анализ вклада трехпетлевой поляризации вакуума в третьем порядке теории возмущений на рис. 3,в показывает, что он на порядок меньше вклада диаграммы рис. 4,в, и им, следовательно, можно пренебречь.

5. Мюонные собственно-энергетические поправки, мюонная поляризация вакуума и поправки на отдачу

Для оценки вкладов собственной энергии мюона (MSE) и мюонной поляризации вакуума (MVP) порядка $\alpha(Z\alpha)^4$ воспользуемся известными ана-

литическими результатами для атома водорода. Для $1S$ и $2S$ состояний эти результаты имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \Delta E_{MVP,MSE}(1S) &= \frac{\alpha(Z\alpha)^4 \mu^3}{\pi m_1^2} \left[\frac{4}{3} \ln \frac{m_1}{\mu(Z\alpha)^2} - \frac{4}{3} \ln k_0(1,0) + \frac{38}{45} \right] = \\ &= \begin{cases} \mu p : 5.1180 \text{ meV}, \\ \mu d : 5.9395 \text{ meV}, \end{cases} \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{MVP,MSE}(2S) &= \frac{\alpha(Z\alpha)^4 \mu^3}{8\pi m_1^2} \left[\frac{4}{3} \ln \frac{m_1}{\mu(Z\alpha)^2} - \frac{4}{3} \ln k_0(2,0) + \frac{38}{45} \right] = \\ &= \begin{cases} \mu p : 0.6543 \text{ meV}, \\ \mu d : 0.7594 \text{ meV}, \end{cases} \end{aligned} \quad (54)$$

где $\ln k_0(n, l)$ — логарифм Бете:

$$\ln k_0(1,0) = 2.984128555765498, \quad \ln k_0(2,0) = 2.811769893120563. \quad (55)$$

Поправка, определяемая суммой радиационных вставок в лептонную линию, также известна в аналитическом виде. Мы приводим ее значение, несмотря на ее порядок $\alpha(Z\alpha)^5$, так как соответствующий коэффициент порядка 10 [1]:

$$\Delta E_{rad}(1S) = \frac{\alpha(Z\alpha)^5 \mu^3}{m_1^2} \left(\frac{427}{96} - 2 \ln 2 \right) = \begin{cases} \mu p : 0.0355 \text{ meV}, \\ \mu d : 0.0414 \text{ meV}, \end{cases} \quad (56)$$

$$\Delta E_{rad}(2S) = \frac{\alpha(Z\alpha)^5 \mu^3}{8m_1^2} \left(\frac{427}{96} - 2 \ln 2 \right) = \begin{cases} \mu p : 0.0044 \text{ meV}, \\ \mu d : 0.0052 \text{ meV}. \end{cases} \quad (57)$$

Следуя работе Пахуцкого [20], оценим вклады двух диаграмм, также имеющих шестой порядок по α , усиленный $\ln \alpha$. Диаграмма рис. 5,а для мюонной радиационной поправки и электронной поляризации вакуума дает следующие вклады:

$$\begin{aligned} \Delta E_{1,rad+VP}(1S) &= \frac{2\mu^3 \alpha^2 (Z\alpha)^4}{9\pi^2 m_1^2} \ln \frac{m_1}{\mu \alpha^2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \left[\frac{2}{p_1(\xi)} - \frac{2}{p_1^2(\xi)} + \frac{1}{p_1^3(\xi)} \right] = \\ &= \begin{cases} \mu p : 0.0061 \text{ meV}, \\ \mu d : 0.0073 \text{ meV}, \end{cases} \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{1,rad+VP}(2S) &= \frac{\mu^3 \alpha^2 (Z\alpha)^4}{48\pi^2 m_1^2} \ln \frac{m_1}{\mu \alpha^2} \int_1^\infty \rho(\xi) d\xi \times \\ &\times \left[\frac{16}{3p_2(\xi)} - \frac{9}{2p_2^2(\xi)} + \frac{3}{p_2^3(\xi)} - \frac{9}{4p_2^4(\xi)} + \frac{1}{p_2^5(\xi)} \right] = \begin{cases} \mu p : 0.0010 \text{ meV}, \\ \mu d : 0.0012 \text{ meV}. \end{cases} \end{aligned} \quad (59)$$

Диаграмма рис. 5,б дает вклад в спектр энергии, который можно выразить в терминах наклона дираковского формфактора F'_1 и паулиевского формфактора F_2 :

$$\Delta E_{2,rad+VP}(nS) = \frac{\mu^3}{m_1^2} \frac{(Z\alpha)^4}{n^3} \left[4m_1^2 F'_1(0) + F_2(0) \right], \quad (60)$$

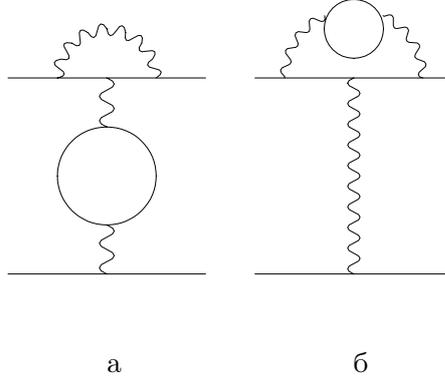


Рис. 5. Радиационные поправки с учетом электронной поляризации вакуума

где формфакторы F'_1 и F_2 были вычислены в [37]:

$$m_1^2 F'_1(0) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left[\frac{1}{9} \ln^2 \frac{m_1}{m_e} - \frac{29}{108} \ln \frac{m_1}{m_e} + \frac{1}{9} \zeta(2) + \frac{395}{1296} \right], \quad (61)$$

$$F_2(0) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left[\frac{1}{3} \ln \frac{m_1}{m_e} - \frac{25}{36} \right]. \quad (62)$$

Тогда поправка в лэмбовский сдвиг S-уровней примет вид:

$$\Delta E_{2,rad+VP}(nS) = \frac{\mu^3 \alpha^2 (Z\alpha)^4}{m_1^2 n^3 \pi^2} \left(\frac{4}{9} \ln^2 \frac{m_1}{m_e} - \frac{20}{27} \ln \frac{m_1}{m_e} + \frac{4}{9} \zeta(2) + \frac{85}{162} \right). \quad (63)$$

В этот раздел включена еще одна известная в аналитическом виде поправка на отдачу порядка $(Z\alpha)^5$, которая определяется двухфотонными обменными диаграммами [38]:

$$\Delta E_{rec}(nS) = \frac{(Z\alpha)^5 \mu^3}{\pi n^3 m_1 m_2} \left[-\frac{2}{3} \ln(Z\alpha) - \frac{8}{3} \ln k_0(n, 0) - \frac{1}{9} - \frac{7}{3} a_n - \frac{2}{m_2^2 - m_1^2} \left(m_2^2 \ln \frac{m_1}{\mu} - m_1^2 \ln \frac{m_2}{\mu} \right) \right], \quad (64)$$

где

$$a_n = -2 \left[\ln \frac{2}{n} + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) + 1 - \frac{1}{2n} \right]. \quad (65)$$

Численные значения поправок (63), (64) также включены в табл. 1.

6. Эффекты структуры, поляризуемости ядра и поляризации вакуума

В спектре энергии мюонного водорода важная роль принадлежит сильным взаимодействиям, которые связаны с плотностью распределения электрического заряда и магнитного момента ядра. В лидирующем порядке

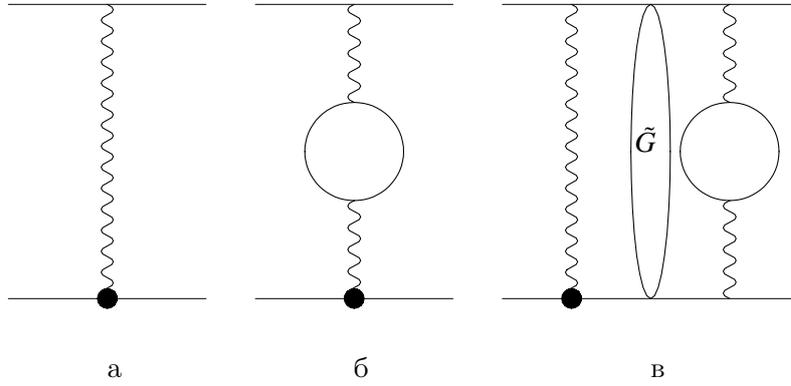


Рис. 6. Поправки на структуру ядра и поляризацию вакуума

$(Z\alpha)^4$ эффекты структуры ядра определяются дифференциальной характеристикой распределения электрического заряда — зарядовым радиусом ядра r_N . При вычислении однопетлевых поправок необходимо знать вид самих электромагнитных формфакторов ядра. Вклад эффектов структуры ядра как в сверхтонкую структуру уровней энергии, так и в лэмбовский сдвиг изучался в ряде работ [20, 21, 24, 39, 1]. Лидирующая поправка структуры ядра порядка $(Z\alpha)^4$ в спектре энергии S -уровней мюонного водорода имеет вид (см. диаграмму рис. 6,а):

$$\Delta E_{str,(Z\alpha)^4}(nS) = \frac{2}{3n^3} \mu^3 (Z\alpha)^4 \langle r_p^2 \rangle, \quad (66)$$

где r_p^2 — среднеквадратичный радиус протона. Численные значения этой поправки для уровней с $n = 1$ и $n = 2$ (при $r_p = 0.891$ фм [1]), представленные в таблице, имеют значительный относительный вес, поэтому снижение погрешности определения зарядового радиуса протона является чрезвычайно актуальной задачей, если мы хотим получить более точное теоретическое значение для лэмбовского сдвига S -уровней. В случае дейтерия использовалось значение зарядового радиуса дейтрона $r_d = 2.094$ фм [24].

Двухфотонные обменные амплитуды, показанные на рис. 7, дают поправки на структуру ядра порядка $(Z\alpha)^5$. В этом случае квазипотенциал двухфотонного взаимодействия может быть найден с помощью соотношений (5)–(6) [21, 20], а соответствующая поправка в спектре энергии имеет вид одномерного интеграла:

$$\Delta E_{str,(Z\alpha)^5}(nS) = -\frac{\mu^3 (Z\alpha)^5}{\pi n^3} \int_0^\infty \frac{dk}{k} V(k), \quad (67)$$

$$V(k) = \frac{2(F_1^2 - 1)}{m_1 m_2} + \frac{8m_1[F_2(0) + 4m_2^2 F_1'(0)]}{m_2(m_1 + m_2)k} + \frac{k^2}{2m_1^3 m_2^3} \times \quad (68)$$

$$\times \left[2(F_1^2 - 1)(m_1^2 + m_2^2) + 4F_1 F_2 m_1^2 + 3F_2^2 m_1^2 \right] + \frac{\sqrt{k^2 + 4m_1^2}}{2m_1^3 m_2(m_1^2 - m_2^2)k} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ k^2 \left[2(F_1^2 - 1)m_2^2 + 4F_1F_2m_1^2 + 3F_2^2m_1^2 \right] - 8m_1^4F_1F_2 + \frac{16m_1^4m_2^2(F_1^2 - 1)}{k^2} \right\} - \\ & - \frac{\sqrt{k^2 + 4m_2^2}m_1}{2m_2^3(m_1^2 - m_2^2)k} \left\{ k^2 \left[2(F_1^2 - 1) + 4F_1F_2 + 3F_2^2 \right] - 8m_2^2F_1F_2 + \frac{16m_2^4(F_1^2 - 1)}{k^2} \right\}. \end{aligned}$$

Для проведения численных расчетов на основе выражения (67) использовалась параметризация дираковского F_1 и паулиевского F_2 протонных форм-факторов, полученная в [40]. Для атома мюонного дейтерия аналогичные вклады найдены в работе [24]. Вклад пятого порядка по α , связанный со структурой ядра, дает также эффекты электронной поляризации вакуума, которые показаны на рис. 6,б,в. Оператор взаимодействия частиц, который соответствует амплитуде рис. 6,б определяется следующим выражением:

$$\Delta V_{str,VP}(r) = \frac{2\alpha(Z\alpha)r_N^2}{9} \int_1^\infty \rho(\xi)d\xi \left[\pi\delta(\mathbf{r}) - \frac{m_e^2\xi^2}{r} e^{-2m_e\xi r} \right], \quad (69)$$

а вклады в спектр энергии $1S$ и $2S$ уровней имеют вид:

$$\Delta E_{str,VP}(1S) = \frac{2}{9}\alpha(Z\alpha)^4\mu^3r_N^2 \int_1^\infty \frac{\rho(\xi)d\xi}{p_1^2(\xi)} \left(1 + \frac{2m_e\xi}{W} \right) = \begin{cases} \mu p : 0.1991 \text{ meV}, \\ \mu d : 1.4155 \text{ meV}, \end{cases} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{str,VP}(2S) &= \frac{1}{36}\alpha(Z\alpha)^4\mu^3r_N^2 \int_1^\infty \frac{\rho(\xi)d\xi}{p_1^2(\xi)} \left[\left(1 + \frac{4m_e\xi}{W} \right) - \frac{4m_e^2\xi^2}{W^2} \times \right. \\ & \left. \times \left(-\frac{2}{p_2(\xi)} + \frac{3}{2p_2^2(\xi)} \right) \right] = \begin{cases} \mu p : 0.0257 \text{ meV}, \\ \mu d : 0.1824 \text{ meV}. \end{cases} \end{aligned} \quad (71)$$

Имеется также вклад электронной поляризации вакуума и структуры ядра во втором порядке теории возмущений (см. диаграмму рис. 6,в), который определяется редуцированной кулоновской функцией Грина $\tilde{G}_n(r, 0)$ (38) и (39). В этом случае вклады в сдвиг S -уровней равны:

$$\Delta E_{str,VP;S OPT}(1S) = -\frac{2}{9\pi}\alpha(Z\alpha)^4\mu^3r_N^2 \int_1^\infty \frac{\rho(\xi)d\xi}{p_1^3(\xi)} \times \quad (72)$$

$$\times \left[2 - 3p_1(\xi) - 2p_1^2(\xi) - 2p_1(\xi) \ln p_1(\xi) \right] = \begin{cases} \mu p : 0.1242 \text{ meV}, \\ \mu d : 0.8913 \text{ meV}, \end{cases}$$

$$\Delta E_{str,VP;S OPT}(2S) = \frac{1}{36\pi}\alpha(Z\alpha)^4\mu^3r_N^2 \int_1^\infty \frac{\rho(\xi)d\xi}{p_1^5(\xi)} \left[-12 + 23p_2(\xi) - 8p_2^2(\xi) - \right. \quad (73)$$

$$\left. -4p_2^3(\xi) + 4p_2^4(\xi) + 4p_2(\xi)(3 - 4p_2(\xi) + 2p_2^2(\xi)) \ln p_2(\xi) \right] = \begin{cases} \mu p : 0.0126 \text{ meV}, \\ \mu d : 0.0898 \text{ meV}. \end{cases}$$

Существует еще один вклад сильного взаимодействия, который связан с поляризуемостью ядра. Для атома мюонного дейтерия он был получен в работе [41]:

$$\Delta E_{d,pol}(nS) = -\frac{\alpha(Z\alpha)^3}{\pi n^3}\mu^3m_1 \left[5\alpha_d \left(\ln \frac{8I}{m_1} + \frac{1}{20} \right) - \beta_d \left(\ln \frac{8I}{m_1} - 1.24 \right) \right], \quad (74)$$

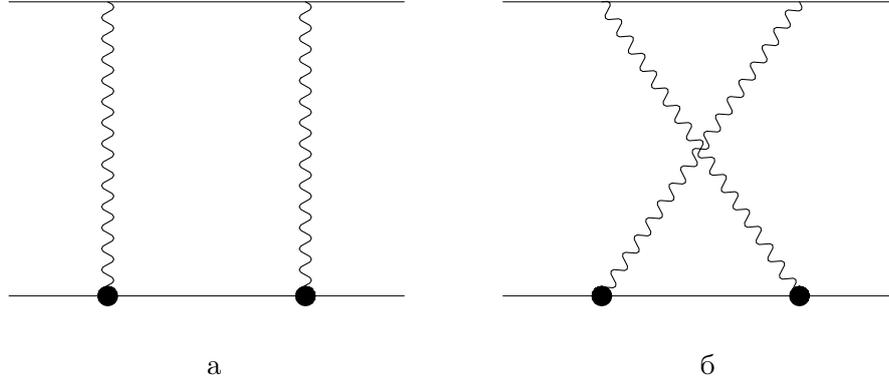


Рис. 7. Поправки на структуру ядра порядка $(Z\alpha)^5$. Жирной точкой на диаграмме обозначен вершинный оператор ядра

где энергия связи дейтрона $I = \kappa^2/m_2$, а $\kappa = 45.7$ MeV, $\alpha_d = 0.635 fm^3$ и $\beta_d = 0.073 fm^3$ — электрическая и магнитная поляризуемости дейтрона. Для атома мюонного водорода вклад поляризуемости протона в лэмбовский сдвиг S -уровней может быть вычислен с помощью выражения [21, 22]:

$$\begin{aligned} \Delta E_{p,pol}(nS) = & \\ = & \frac{-16\mu^3(Z\alpha)^5 m_1}{\pi^2 n^3} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \int_0^\pi d\phi \int_{\nu_0}^\infty \frac{dy \sin^2 \phi}{(k^2 + 4m_1^2 \cos^2 \phi)(y^2 + k^2 \cos^2 \phi)} \times \quad (75) \\ & \times [(1 + 2 \cos^2 \phi) \frac{(1 + k^2/y^2) \cos^2 \phi}{1 + R(y, k^2)} + \sin^2 \phi] F_2(y, k^2) + \frac{2\mu^3 \alpha^5}{\pi n^3 m_1 m_2} \int_0^\infty h(k^2) \beta(k^2) k dk, \end{aligned}$$

где F_2 — структурная функция глубоконеупругого рассеяния, $R = \sigma_L/\sigma_T$ — отношение сечений поглощения продольно- и поперечно-поляризованных фотонов адронами, ν_0 — порог рождения π -мезонов. В вычитательное слабое входят функции

$$h(k^2) = 1 + \left(1 - \frac{k^2}{2m_1^2}\right) \left(\sqrt{\frac{4m_1^2}{k^2} + 1} - 1 \right), \quad \beta(k^2) = \beta \cdot G(k^2), \quad G(k^2) = \frac{1}{(1 + k^2/0.71)^2}, \quad (76)$$

где $\beta_p = 2.1(0.9) \cdot 10^{-4} fm^3$ — магнитная поляризуемость протона. Вклад внутренней поляризуемости дейтрона также может быть вычислен на основе (75) [42]. Он включен в таблицу вместе с поправкой (74).

Вклад адронной поляризации вакуума порядка $\alpha(Z\alpha)^4$ в сдвиг S -уровней атома мюонного водорода, который исследовался в работах [43, 44], можно представить в виде:

$$\Delta E_{HVP}(nS) = -\frac{4\alpha(Z\alpha)^4 \mu^3}{\pi n^3} \int_{4m_\pi^2}^\infty \frac{\rho^h(s) ds}{s}, \quad (77)$$

где спектральная плотность $\rho^h(s)$ связана с сечением аннигиляции e^+e^- в

адроны:

$$\rho^h(s) = \frac{\sigma^h(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{3s\sigma_{\mu\mu}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}. \quad (78)$$

Разбивая всю область интегрирования по s на интервалы, в которых сечение e^+e^- -аннигиляции в адроны, как известно из эксперимента [45], выполним численное интегрирование в (77). Полные численные результаты также включены в табл. 1.

Заключение

В данной работе выполнен расчет различных КЭД эффектов, эффектов структуры, поляризуемости протона и адронной поляризации вакуума в лэмбовском сдвиге уровней энергии $1S$ и $2S$ в мюонном водороде, мюонном дейтерии и в изотопическом сдвиге $(\mu p) - (\mu d)$ для расщепления $(1S - 2S)$. Рассматривались поправки порядка α^3 , α^4 и α^5 , а также некоторые вклады порядка α^6 , усиленные $\ln \alpha$. При этом мы учли, что отношение $\mu\alpha/m_e$ близко к единице и уделили особое внимание вычислению эффектов электронной поляризации вакуума. Численные значения полученных вкладов представлены в табл. 1. В таблицу включены также ссылки на многие работы, в которых исследовались аналитически или численно аналогичные поправки, несмотря на то, что конкретные численные результаты для $1S$ и $2S$ уровней в этих работах отсутствуют. Для сравнения полученных результатов с расчетами других авторов очень часто используется обзорная работа [1], которая аккумулирует последние достижения в физике энергетических спектров простейших атомов и содержит подробные ссылки на проведенные ранее расчеты.

Отметим ряд особенностей выполненных вычислений:

1. Для мюонного водорода важную роль играют эффекты поляризации вакуума, которые приводят как к модификации брейтовского потенциала взаимодействия частиц, так и оператора взаимодействия в целом, который дает в спектре энергии поправки пятого порядка по постоянной тонкой структуры α .

2. Эффекты структуры протона в спектре энергии S состояний выражены в главном порядке $(Z\alpha)^4$ в терминах зарядового радиуса ядра (протона и дейтрона), а в однопетлевых амплитудах порядка $(Z\alpha)^5$ с помощью электромагнитных формфакторов ядра.

3. Оценка вкладов на поляризуемость ядра (второй вклад сильного взаимодействия) была выполнена с помощью выражения (74), полученного Мильштейном, Петросяном, Хриповичем, а также (75) в работах [21, 22]. Вклады структуры и поляризуемости ядра вносят наибольшую теоретическую погрешность в величину интервала $(1S - 2S)$, а также в изотопический сдвиг для этого расщепления.

Полные численные значения энергии $1S$ и $2S$ состояний в мюонном во-

Таблица 1
Поправки порядка $\alpha^3, \alpha^4, \alpha^5$ в лэмбовском сдвиге 1S и 2S-уровней энергии мюонного водорода и мюонного дейтерия и в изотопическом сдвиге ΔE_{IS}

Вклад в энергию атома	$\mu p, \text{ meV}$		$\mu d, \text{ meV}$		ΔE_{IS}
	1S	2S	1S	2S	
1	2	3	4	5	6
Формула тонкой структуры $E_n = m_1 + m_2 - \frac{\mu^2(Z\alpha)^2}{2n^2} - \frac{\mu(Z\alpha)^4}{2n^3} \left[1 - \frac{3}{4n} + \frac{\mu^2}{4nm_1m_2} \right]$	1043927826 ~470.3586	1043929722 ~866.0601	1981268455 ~762.7537	1981270453 ~188.8081	101030 .3530
Вклад 1-петл. ПВ в 1γ взаимодействии порядка $\alpha(Z\alpha)^2$	-1898.8379	-219.5849	-2129.2820	-245.3205	204.7085
Поправка Вихмана—Кролла порядка $\alpha(Z\alpha)^4$	0.0114	0.0012	0.0126	0.0014	-0.0010
Вклад 2-петл. ПВ (VP-VP) в 1γ взаимодействии порядка $\alpha^2(Z\alpha)^2$	-1.8816	-0.2426	-2.1871	-0.2811	0.2616
Вклад 2-петл. ПВ (2-loop) в 1γ взаимодействии порядка $\alpha^2(Z\alpha)^2$	-12.6144	-1.4112	-14.0141	-1.5606	1.2476
Вклад 3-петл. ПВ (VP-VP-VP) в 1γ взаимодействии порядка $\alpha^3(Z\alpha)^2$	-0.0029	-0.0003	-0.0034	-0.0004	0.0004
Вклад 3-петл. ПВ (VP-2-loop VP) в 1γ взаимодействии порядка $\alpha^3(Z\alpha)^2$	-0.0223	-0.0030	-0.0251	-0.0035	0.0023
Вклад 3-петл. ПВ $P^{(p^6)}$ в 1γ взаимодействии порядка $\alpha^3(Z\alpha)^2$	-0.0340	-0.0045	-0.0380	-0.0050	0.0035
Вклад релятивистских эффектов и ПВ в ППТВ порядка $\alpha^3(Z\alpha)^2$	0.1962	0.0249	0.2515	0.0322	-0.0480
Вклад релятивистских эффектов и ПВ во ВПТВ порядка $\alpha^3(Z\alpha)^2$	-0.2644	-0.0559	-0.3194	-0.0696	0.0413
Вклад 2-петл. ПВ во ВПТВ порядка $\alpha^2(Z\alpha)^2$	-2.0343	-0.1532	-2.3675	-0.1750	0.3114

Окончание табл. 1

1	2	3	4	5	6
Вклад 3-петл. ПВ (VP-VP,VP) во ВПТВ порядка $\alpha^3(Z\alpha)^2$	-0.0061	-0.0002	-0.0073	-0.0005	0.0009
Вклад 3-петл. ПВ (2-loop VP,VP) во ВПТВ порядка $\alpha^3(Z\alpha)^2$	-0.0059	-0.0016	-0.0069	-0.0021	0.0005
Вклад СЭ мюона и МПВ порядка $\alpha(Z\alpha)^4$	5.1180	0.6543	5.9395	0.7594	-0.7164
Радиационные поправки порядка $\alpha(Z\alpha)^5$	0.0355	0.0044	0.0414	0.0052	-0.0051
Радиационные поправки+ВП порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4$	0.0178	0.0025	0.0209	0.0029	-0.0027
Поправки на отдачу порядка $(Z\alpha)^5$	0.3009	0.0428	0.1781	0.0253	0.1053
Вклад структуры ядра порядка $(Z\alpha)^4$	38.5711	4.8214	213.4218	26.6825	-152.6597
Вклад структуры ядра порядка $(Z\alpha)^5$	-0.1464	-0.0183	-2.9384	-0.3674	2.4429
Вклад структуры ядра и ПВ порядка $\alpha(Z\alpha)^4$	0.2127	0.0274	1.4155	0.1824	-1.0478
Вклад структуры ядра и ПВ во ВПТВ порядка $\alpha(Z\alpha)^4$	0.1327	0.0135	0.8913	0.0898	-0.6823
Вклад поляризуе- мости ядра порядка $(Z\alpha)^5$	-0.1291	-0.0161	92.0511	11.5064	-80.6577
Вклад АПВ порядка $\alpha(Z\alpha)^4$	-0.0864	-0.0108	-0.1010	-0.0126	0.0128
Суммарный вклад	1043927824 ~598.8893	1043929722 ~650.1499	1981268453 ~925.6873	1981270452 ~980.2974	101003 ~.3495

дороду и мюонном дейтерии, а также величина изотопического смещения для перехода ($1S - 2S$) представлены в табл. 1. Они могут рассматриваться, как надежная оценка для будущих экспериментов как по изотопическому сдвигу "мюонный водород – мюонный дейтерий", так и по интервалу большой тонкой структуры ($1S - 2S$) в мюонном водороде и мюонном дейтерии. Численные значения поправок получены с точностью 0.0001 meV . Для перехода ($1S - 2S$) теоретическая ошибка полученных результатов определяется рядом факторов: неопределенностями фундаментальных параметров (постоянная тонкой структуры, массы протона, дейтрона и мюона), которые составляют величину порядка 10^{-7} . Квантовоэлектродинамические поправки более высокого порядка α^6 дают ошибку порядка 10^{-8} . Наибольший вклад в теоретическую ошибку дают неопределенности значений зарядовых радиусов протона и дейтрона. Их относительный вклад составляет величину порядка 10^{-6} (использовались значения зарядовых радиусов протона $r_p = 0.891 \text{ фм}$, $r_d = 2.094 \text{ фм}$.) Дальнейшие улучшения теоретических результатов, представленных в табл. 1, связаны прежде всего с поправками на структуру и поляризуемость ядра. В этой связи для сравнения выполненных теоретических расчетов с экспериментальными данными большой интерес представляет величина интервала тонкой структуры $[E(1S) - 8E(2S)]$, в которой эффекты структуры и поляризуемости ядра отсутствуют в главном порядке $(Z\alpha)^4$. Численные значения этого интервала для мюонного водорода и мюонного дейтерия имеют вид:

$$\begin{aligned} \mu p: \quad E(1S) - 8E(2S) &= -7\,307\,509\,956\,602.3099 \text{ meV}, \\ \mu d: \quad E(1S) - 8E(2S) &= -13\,868\,895\,169\,916.6917 \text{ meV}. \end{aligned} \quad (79)$$

Относительная величина той части теоретической ошибки в (79), которая обусловлена поправками более высокого порядка, чрезвычайно мала (порядка 10^{-15}).

Изотопическое смещение в системе "мюонный водород – мюонный дейтерий" для расщепления ($1S - 2S$) представляет собой одну из важнейших характеристик спектров энергии этих ВП-атомов. Различие в длинах волн, излучаемых изотопами одного элемента возникает из-за различия масс изотопов, а также из-за различий в распределении заряда ядер. В то время как массы протона и дейтрона известны в настоящее время с достаточно высокой точностью, характеристики структуры ядер определены менее точно. Используя результаты проведенных расчетов, можно выразить разность зарядовых радиусов дейтрона и протона в терминах изотопического сдвига:

$$\frac{r_d^2}{(1 + m_\mu/m_d)^3} - \frac{r_p^2}{(1 + m_\mu/m_p)^3} = \frac{12}{7m_\mu^3(Z\alpha)^4} (\Delta\tilde{E}_{1S}^{th} - \Delta E_{1S}^{exp}), \quad (80)$$

где теоретическое значение $\Delta\tilde{E}_{1S}^{th}$ не содержит поправки на структуру ядра порядка $(Z\alpha)^4$. Таким образом, измерение изотопического смещения

(μp) – (μd) позволит, с одной стороны, осуществить еще одну проверку КЭД, а с другой — получить более точное значение зарядового радиуса дейтрона из соотношения (80) после определения зарядового радиуса протона в эксперименте PSI [4].

Автор благодарит В.А.Салеева за интерес к работе и ценные советы, Д.Д.Бакалова, Т.Киношиту, В.А.Матвеева, М.Нио, В.Г.Пальчикова, К.Пахуцкого, В.А.Рубакова, В.И.Саврина, Р.Н.Фаустова, В.В.Фильченкова, И.Б.Хрипловича, М.И.Эйдеса за полезные обсуждения различных аспектов проблемы спектра энергии атома мюонного водорода. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант №. 04-02-16085) и программы "Университеты России — Фундаментальные исследования" (грант №.02.01.367).

Литература

- [1] Eides M.I., Grotch H., Shelyuto V.A. Theory of light hydrogenlike atoms. Phys. Rep. **342**, 62 (2001).
- [2] Соколов Ю.Л. Интерференционный метод измерения параметров атомных состояний. УФН. **169**, 559 (1999).
- [3] Mohr P.J., Taylor B.N. CODATA recommended values of the fundamental physical constants. 1998. Rev. Mod. Phys. **72**, 351 (2000).
- [4] Kottmann F., Biraben F., Conde C.A.N. et al. Towards a Lamb shift measurement in muonic hydrogen. In: G.Cantatore (Ed.), Quantum Electrodynamics and Physics of the Vacuum, QED 2000 Second Workshop Proc. New York, AIP Conf. Proc., **564**, 13 (2001).
- [5] Pohl R., Biraben F., Conde C.A.N. et al. Experiment to measure the Lamb shift in muonic hydrogen. Hyperfine Interactions **127**, 161 (2000).
- [6] Adamczak A., Bakalov D., Bakalova K. et al. On the use of a $H_2 - O_2$ gas target in muonic hydrogen atom hyperfine splitting experiments. Hyperfine Interactions **136**, 1 (2001).
- [7] Dupays A., Beswick A., Lepetit B. et al. Proton Zemach radius from measurements of the hyperfine splitting of hydrogen and muonic hydrogen. Phys. Rev. **A68**, 052503 (2003).
- [8] Zemach A.C. Proton structure and the hyperfine shift in hydrogen. Phys. Rev. **104**, 1771 (1956).
- [9] Мартыненко А.П., Фаустов Р.Н. Сверхтонкая структура основного состояния мюонного водорода. ЖЭТФ **125**, 48 (2004), hep-ph/0312116 v2.
- [10] Martynenko A.P. 2S hyperfine splitting of muonic hydrogen. E-preprint hep-ph/0409107 (2004).
- [11] Drell S.D., Sullivan J.D. Polarizability contribution to the hydrogen hyperfine structure. Phys. Rev. **154**, 1477 (1967).
- [12] Bernabeu J., Ericson T.E.O. Polarizability effects in muonic hydrogen. Z. Phys. **A309**, 213 (1983).

- [13] Cherednikova E.V., Faustov R.N., Martynenko A.P.. Proton polarizability contribution to the hyperfine splitting in muonic hydrogen. Nucl. Phys. **A703**, 365 (2002).
- [14] Breit G. Theory of isotope shift. Rev. Mod. Phys. **30**, 507 (1958).
- [15] Pachucki K., Leibfried D., Weitz M. et al. Theory of the energy levels and precise two-photon spectroscopy of atomic hydrogen and deuterium. J. Phys. **B29**, (1996) 177.
- [16] Huber A., Udem Th., Gross B. et al. Hydrogen – deuterium 1S-2S isotope shift and the structure of the deuteron. Phys. Rev. Lett. **80**, (1998) 468.
- [17] Niering M., Holzwarth R., Reichert J. et al. Measurement of the hydrogen 1S-2S transition frequency by phase coherent comparison with a microwave cesium fountain clock. Phys. Rev. Lett. **84**, (2000) 267.
- [18] Sternheim M.M. Vacuum polarization corrections to hyperfine structure in muonic atoms. Phys. Rev. **138**, B430 (1965).
- [19] Borie E., Rinker G.A. The energy levels of muonic atoms. Rev. Mod. Phys. **54**, 67 (1982).
- [20] Pachucki K. Theory of the Lamb shift in muonic hydrogen. Phys. Rev. **A53**, 2092 (1996).
- [21] Мартыненко А.П., Фаустов Р.Н. Поляризуемость протона и лэмбовский сдвиг в атоме мюонного водорода. ЯФ **63**, 915 (2000).
- [22] Pachucki K. Proton structure effects in muonic hydrogen. Phys. Rev. **A60**, 3593 (1999).
- [23] Veitia A., Pachucki K. Nuclear recoil effects in antiprotonic and muonic atoms. Phys. Rev. **A69**, 042501, (2004).
- [24] Faustov R.N., Martynenko A.P. Nuclear structure corrections in the energy spectra of electronic and muonic deuterium. Phys. Rev. **A67**, 052506 (2003).
- [25] Salpeter E.E. Mass corrections to the fine structure of hydrogen-like atoms. Phys. Rev. **87**, 328 (1952).
- [26] Salpeter E.E. The Lamb shift for hydrogen and deuterium. Phys. Rev. **89**, 92 (1953).
- [27] Мартыненко А.П., Фаустов Р.Н. Релятивистская приведенная масса и квазипотенциальное уравнение. ТМФ **64**, 179 (1985).
- [28] Мартыненко А.П., Фаустов Р.Н. Поправки порядка $(Z\alpha)^6 m_e^2/m_\mu$ к тонкой структуре мюония. ЖЭТФ **115**, 1221 (1999).
- [29] Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. М., Наука, 1980.
- [30] Wichmann E.H., Kroll N.M. Vacuum Polarization in a Strong Coulomb Field. Phys. Rev. **101**, 843 (1956).
- [31] Mohr P.J., Plunien G., Soff G. QED corrections in heavy atoms. Phys. Rep. **293**, 228 (1998).

- [32] Eides M.I., Shelyuto V.A. Polarization operator contributions to the Lamb shift and hyperfine splitting. *Phys. Rev.* **D68**, 042106 (2003).
- [33] Kinoshita T., Nio M. Sixth order vacuum polarization contribution to the Lamb shift of the muonic hydrogen. *Phys. Rev. Lett.* **62**, 3240 (1999).
- [34] Kinoshita T., Nio M. Accuracy of calculations involving α^3 vacuum polarization diagrams: muonic hydrogen Lamb shift and muon g-2. *Phys. Rev.* **D60**, 053008 (1999).
- [35] Запрягаев С.А., Манаков Н.Л., Пальчиков В.Г. Теория многозарядных ионов с одним и двумя электронами. М.: Энергоатомиздат, 1985.
- [36] Иванов В.Г., Каршенбойм С.Г. Радиационные логарифмические поправки к дипольным матричным элементам в атоме водорода. *ЖЭТФ* **109**, 1219 (1996).
- [37] Barbieri R., Caffo M., Remiddi E. A contribution to sixth order electron and muon anomalies. *Nuovo Cimento Lett.* **7**, 60 (1973).
- [38] Sapirstein J.R., Yennie D.R. Theory of hydrogenic bound states. In *Quantum Electrodynamics*, edited by T.Kinoshita, World Scientific, Singapore, p. 560, (1990).
- [39] Friar J.L., Martorell J., Sprung D.W.L. Nuclear sizes and the isotope shift. *Phys. Rev.* **A56**, 4579 (1997).
- [40] Simon G.G., Schmitt Ch., Borkowski F. et al. Absolute electron – proton cross sections at low momentum transfer measured with a high pressure gas target system. *Nucl. Phys.* **A333**, 381 (1980).
- [41] Мильштейн А.И., Петросян С.С., Хриплович И.Б. Поправки к сверхтонкой структуре и Лэмб-сдвигу дейтерия, обусловленные структурой ядра. *ЖЭТФ* **109**, 1146 (1996).
- [42] Faustov R.N., Martynenko A.P. Nucleus polarizability contribution to the hydrogen – deuterium isotope shift. *Mod. Phys. Lett.* **A16**, 507 (2001).
- [43] Friar J.L., Martorell J., Sprung D.W.L. Hadronic vacuum polarization and the Lamb shift. *Phys. Rev.* **A59**, 4061 (1999).
- [44] Faustov R.N., Martynenko A.P. Hadronic vacuum polarization contribution to the Lamb shift in muonic hydrogen. *EPJdirect* **C6**, 1 (1999).
- [45] Akhmetshin R.R. et al. Measurement of $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ cross section with CMD2 around ρ meson. *Phys. Lett.* **B527**, 161 (2002).

Поступила в редакцию 8/XII/2004;
в окончательном варианте — 8/XII/2004.

THE THEORY OF THE FINE STRUCTURE OF THE ENERGY SPECTRUM IN MUONIC HYDROGEN ATOM³

© 2005 A.P. Martynenko⁴

The corrections of orders α^3 , α^4 и α^5 to the Lamb shift of $1S$ and $2S$ states in muonic hydrogen (μp) and muonic deuterium (μd) are calculated. The nuclear structure effects are taken into account in terms of the proton r_p and deuteron r_d charge radii for 1γ interaction and by means of the nucleus electromagnetic form factors in the case of one loop amplitudes. The obtained numerical value of the isotope shift (μd) – (μp) for the splitting ($1S \div 2S$) 101003.3495 meV can be considered as a proper estimation for the future experiment with the accuracy 10^{-6} . The fine structure intervals $E(1S) - 8E(2S)$ in muonic hydrogen and deuterium are calculated.

Paper received 8/*XII*/2004.

Paper accepted 8/*XII*/2004.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) V.A. Saleev.

⁴Martynenko Alexey Petrovich (mart@ssu.samara.ru), Dept. of General and Theoretical Physics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.