

УДК 539.376

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТРЕЩИНЕ ТИПА I В СВЯЗАННОЙ ПОСТАНОВКЕ (СВЯЗКА ПОЛЗУЧЕСТЬ–ПОВРЕЖДЕННОСТЬ)¹

© 2004 Л.В. Степанова,² М.Е. Федина,³ Н.А. Курнышева⁴

В статье представлено асимптотическое исследование полей напряжений, скоростей деформаций ползучести и поврежденности у вершины стационарной трещины нормального отрыва (типа I) в условиях ползучести в связанной формулировке задачи в связке ползучесть–поврежденность. Асимптотическое решение получено с помощью автомодельной переменной, предложенной Риделем. Показано, что у вершины трещины существует область полностью поврежденного материала. Определена геометрия данной области для различных значений материальных параметров, входящих в определяющие соотношения степенного закона Нортон установившейся ползучести и кинетического уравнения, постулирующего степенной закон накопления повреждений. Установлена новая асимптотика дальнего поля напряжений.

Введение

Целью настоящего исследования является изучение напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины неподвижной трещины типа I (нормального отрыва) в условиях ползучести в среде с поврежденностью в связанной постановке в связке ползучесть–поврежденность. Определяющие соотношения рассматриваемого материала построены на основе степенного закона Нортон теории установившейся ползучести с использованием концепции эффективного напряжения континуальной механики повре-

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором В.И. Астафьевым.

²Степанова Лариса Валентиновна (lst@ssu.samara.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

³Федина Мария Ефимовна (phedina@ssu.samara.ru), кафедра безопасности информационных систем Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

⁴Курнышева Наталья Александровна (kurnysheva@ssu.samara.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

жденности. Анализ проведен с помощью автомодельной переменной, предложенной Риделем [1] для данного типа определяющих уравнений, кинетического уравнения, постулирующего степенной закон накопления повреждений, и асимптотического граничного условия, формулируемого в бесконечно удаленной точке и представляющего собой требование асимптотического сближения искомого решения с классическим решением нелинейной механики разрушения — решения Хатчинсона—Райса—Розенгрена (HRR) [2, 3]. В рамках выполненного асимптотического исследования построены трехчленное асимптотическое разложение скалярного параметра сплошности и двучленные асимптотические разложения компонент тензора напряжений на значительном удалении от вершины трещины (исследовалась так называемая асимптотика дальнего поля напряжений — асимптотика напряжений на расстояниях, больших по сравнению с длиной трещины, по сравнению с характерным линейным размером области полностью поврежденного материала, но все еще малых по сравнению с характерным размером тела).

Подобный подход ранее реализован для исследования задачи о трещине антиплоского сдвига в условиях ползучести в среде с поврежденностью [4, 5], где показано, что в окрестности вершины стационарной трещины существует область полностью поврежденного материала, в которой все компоненты тензора напряжений равны нулю, а скалярный параметр сплошности достигает своего критического значения (в данном случае предполагается, что это значение равно нулю). Также установлена новая асимптотика дальнего поля напряжений, действительно "управляющая" конфигурацией области полностью поврежденного материала. Сначала предполагалось, что граничные условия в бесконечно удаленной точке (где сплошность равна единице) есть условия асимптотического сближения искомого решения с решением HRR, однако эта асимптотика дальнего поля не "управляет" формой области полностью поврежденного материала, поскольку геометрия области полностью поврежденного материала, определяемая с помощью двучленного и трехчленного асимптотических разложений параметра сплошности, существенно отличаются друг от друга. Существенным образом отличаются друг от друга и характерные линейные размеры областей полностью поврежденного материала, построенные на основе двучленного и трехчленного асимптотических разложений параметра сплошности (для сравнения использовалась протяженность области полностью поврежденного материала вдоль линии, продолжающей трещину), что позволило прийти к выводу о необходимости определения новой асимптотики дальнего поля напряжений. Данная новая асимптотика дальнего поля напряжений для трещины антиплоского сдвига была найдена. К сожалению, не удалось найти аналитические зависимости, выражающие связь между показателем степени степенного закона Нортон и найденными собственными значениями, подобно той связи, которая существует в решении HRR, но такая аналитическая зависимость может и не существовать, таким образом этот вопрос требует дополнительного исследования. Для задачи о тре-

щине антиплоского сдвига удалось построить трехчленные асимптотические разложения компонент тензора эффективных напряжений и четырехчленное асимптотическое разложение параметра сплошности [4, 5]. Поэтому для различных значений материальных констант сравнивались конфигурации трех областей полностью поврежденного материала: конфигурации, к которым приводят двучленное, трехчленное и четырехчленное асимптотические разложения параметра сплошности. Сравнение показало, что полученные конфигурации являются очень близкими, что характерные линейные размеры этих областей (их протяженность вдоль линии продолжения трещины) практически совпадают, следовательно, найденная новая асимптотика дальнего поля действительно "управляет" формой области полностью поврежденного материала, моделируемой в окрестности вершины трещины.

Естественным продолжением исследований в данном направлении является изучение напряженно-деформированного состояния в окрестности вершин трещины других типов, а именно трещин типа I и типа II (трещин нормального отрыва и поперечного сдвига). В настоящей работе приводится анализ напряженно-деформированного состояния в окрестности наиболее важной с практической точки зрения трещины нормального отрыва в связанной постановке (ползучесть-поврежденность) в условиях плоского деформированного и плоского напряженного состояний.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о растущей полубесконечной трещине типа I в неограниченном теле. Пусть определяющие соотношения исследуемого материала построены на основе степенного закона Нортена теории установившейся ползучести:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\psi}, \quad (1.1)$$

где $\dot{\epsilon}_{ij}$ — компоненты тензора скоростей деформаций ползучести; B , n — константы материала; σ_e — интенсивность напряжений: в случае плоского деформированного состояния $\sigma_e^2 = 3(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2/4 + 3\sigma_{r\varphi}^2$, в случае плоского напряженного состояния $\sigma_e^2 = \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{r\varphi}^2$, где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ψ — параметр сплошности Качанова [6] ($\omega = 1 - \psi$ — параметр поврежденности Работнова [7]); $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}/3$ — компоненты девиатора напряжений: в случае плоского деформированного состояния $s_{rr} = -s_{\varphi\varphi} = (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})/2$, в случае плоского напряженного состояния $s_{rr} = (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})/3$, $s_{\varphi\varphi} = (2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})/3$.

Уравнения равновесия рассматриваемой задачи имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0. \quad (1.2)$$

Условие совместности деформаций, сформулированное для скоростей деформаций ползучести, представляется в форме

$$2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_{rr}}{\partial \varphi^2} - r \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{rr}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 (r \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi})}{\partial r^2}. \quad (1.3)$$

Кинетическое уравнение, постулирующее степенной закон накопления повреждений, имеет вид

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\sigma_{eqv}}{\psi} \right)^m, \quad (1.4)$$

где A , m — константы материала; t — время;

$$\sigma_{eqv} = \alpha \sigma_e + \beta \sigma_1 + (1 - \alpha - \beta) \sigma_{kk} \quad (1.5)$$

— эквивалентное напряжение, σ_1 — максимальное главное напряжение, σ_{kk} — гидростатическое напряжение, константы α и β находятся экспериментально. Определяющие соотношения (1.1) представляются в форме:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{rr} = -\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} &= \frac{3}{4} B \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\psi}, \\ \dot{\varepsilon}_{r\varphi} &= \frac{3}{2} B \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{r\varphi}}{\psi} \end{aligned} \quad (1.6)$$

в случае плоской деформации и

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{rr} &= \frac{1}{2} B \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\psi}, \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2} B \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}}{\psi}, \\ \dot{\varepsilon}_{r\varphi} &= \frac{3}{2} B \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{r\varphi}}{\psi} \end{aligned} \quad (1.7)$$

в случае плоского напряженного состояния.

Условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины имеют вид

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi = \pm\pi, t) = 0, \quad \sigma_{r\varphi}(r, \varphi = \pm\pi, t) = 0. \quad (1.8)$$

Граничное условие в бесконечно удаленной точке имеет форму

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \varphi, t) \rightarrow \tilde{C} r^s \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n), \quad (1.9)$$

где значения s находятся в процессе решения задачи; $\bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n)$ — функции, подлежащие определению.

Следует отметить, что граничное условие (1.9) для рассматриваемых определяющих соотношений (1.1) в бесконечно удаленной точке может быть сформулировано как требование асимптотического сближения с решением HRR:

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \varphi, t) = \left(\frac{C^*}{B I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n), \quad (1.10)$$

поскольку в бесконечно удаленной точке $\psi = 1$ и двучленное асимптотическое разложение скалярного параметра сплошности на значительном расстоянии от вершины трещины разыскивается в форме

$$\psi(r, \varphi, t) = 1 - r^\gamma g(\varphi, t) + o(r^\gamma), \quad \gamma < 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.11)$$

В этом случае из кинетического уравнения накопления повреждений (1.4) вытекает соотношение $\gamma = 1 - m/(n+1)$ и так как $m = 0,7n$, то $\gamma > 0$, что противоречит условию $\gamma < 0$ в (1.11). Следовательно, граничное условие (1.10) принимается в более общем виде (1.9) и $s \neq -1/(n+1)$. Постоянная $\tilde{C}$ может быть найдена путем решения задачи с истинными граничными условиями для реального элемента конструкции, находящегося под действием определенной системы нагрузок.

2. Автомодельная переменная в задаче о росте трещины в среде с поврежденностью

Рассмотрим стационарную или растущую полубесконечную трещину в бесконечном теле в материале с определяющими соотношениями связанной задачи теории ползучести и механики поврежденности, построенных на основе степенной связи между скоростями деформаций ползучести и напряжениями

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\psi}, \quad (2.1)$$

где ψ — параметр сплошности; $\dot{\epsilon}_{ij}$ — компоненты тензора скоростей деформаций ползучести; s_{ij} — компоненты девиатора напряжений; $\sigma_e = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}$ — интенсивность напряжений; B, n — константы материала.

Начальные условия имеют вид

$$\sigma_{ij}(r, \varphi, t = 0) = \left(\frac{C^*}{BI_n r} \right)^{1/(n+1)} \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n), \quad (2.2)$$

где C^* — инвариантный интеграл теории установившейся ползучести, I_n — функция, зависящая от n и определяемая как безразмерный C^* -интеграл, $\bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n)$ — функции, известные из решения Хатчинсона—Райса—Розенгрена (HRR) [2, 3]; r, φ — полярные координаты.

Асимптотическое условие при $r \rightarrow \infty$ определяется решением аналогичной задачи без учета процесса накопления повреждений ($\psi \equiv 1$):

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \varphi, t) = \left(\frac{C^*}{BI_n r} \right)^{1/(n+1)} \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n). \quad (2.3)$$

Заметим, что начальное условие при $t = 0$ (2.2) и граничное условие в бесконечно удаленной точке (2.3) совпадают, поскольку они задаются решением задачи для $\psi \equiv 1$.

Следует подчеркнуть, что асимптотическое условие (2.3) есть гипотеза о том, что вдали от вершины трещины поле напряжений совпадает с полем напряжений у вершины стационарной трещины в материале со степенными определяющими соотношениями (с решением Хатчинсона—Райса—Розенгрена). Поэтому отметим, что (2.3) — гипотеза, справедливость или несправедливость которой должна быть установлена полученным решением.

В [1] установлено, что для определяющих соотношений (2.1) с начальными и граничными условиями (2.2) и (2.3) существует автомодельная переменная

$$R = \frac{r}{k(n)(At)^{(n+1)/m}}, \quad (2.4)$$

где $k(n) = C^*/(BI_n)$; A, m — постоянные кинетического уравнения

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^m, \quad (2.5)$$

или в декартовой системе координат

$$X_1 = \frac{x_1}{k(n)(At)^{(n+1)/m}}, \quad X_2 = \frac{x_2}{k(n)(At)^{(n+1)/m}}. \quad (2.6)$$

Выражение (2.4) и само существование автомодельной переменной R без труда обосновывается с помощью анализа размерностей.

Действительно, перейдем к безразмерным величинам согласно формулам

$$\hat{r} = \frac{r}{L}, \quad \hat{t} = \frac{t}{T}, \quad \hat{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{(k(n)/L)^{1/(n+1)}}, \quad (2.7)$$

где L — некоторая характерная длина, T — характерное время. Характерные длина и время могут быть связаны с помощью анализа кинетического уравнения накопления повреждений (2.5), позволяющего установить

$$T = \frac{1}{A} \left(\frac{k(n)}{L} \right)^{-m/(n+1)}. \quad (2.8)$$

В этом случае безразмерные напряжения $\hat{\sigma}_{ij}$ как функции от безразмерных переменных запишутся в следующей форме:

$$\hat{\sigma}_{ij}(\hat{r}, \varphi, \hat{t}) = \frac{1}{(k(n)/L)^{1/(n+1)}} \sigma_{ij} \left(r/L, \varphi, tA (k(n)/L)^{m/(n+1)} \right). \quad (2.9)$$

Поскольку в рассматриваемой задаче отсутствует характерный линейный размер L , то необходимо его исключить из аргументов функции $\hat{\sigma}_{ij}$, что достигается с помощью введения автомодельной переменной

$$R = \frac{r/L}{\left[tA (k(n)/L)^{m/(n+1)} \right]^{(n+1)/m}}. \quad (2.10)$$

В результате имеем автомодельную переменную (2.4).

В этом случае напряжения и параметр сплошности представляются в виде

$$\sigma_{ij}(r, \varphi, t) = (At)^{(n+1)/m} \hat{\sigma}_{ij}(R, \varphi), \quad \psi(r, \varphi, t) = \hat{\psi}(R, \varphi), \quad (2.11)$$

где $\hat{\sigma}_{ij}(R, \varphi)$ и $\hat{\psi}(R, \varphi)$ являются безразмерными функциями безразмерных переменных R, φ и подлежат определению в ходе решения конкретных краевых задач.

Следует отметить, что введение автомоделной переменной для граничного условия в бесконечно удаленной точке (1.9) осуществляется способом, аналогичным ранее изложенному, и он основан на анализе размерностей величин, входящих в задачу. Действительно, для степенных определяющих соотношений (2.1) с начальными и граничными условиями в бесконечно удаленной точке

$$\sigma_{ij}(r, \varphi, t) \rightarrow \tilde{C} r^s \bar{\sigma}_{ij}(\varphi) \quad (2.12)$$

существует автомоделная переменная вида

$$R = \frac{r}{[t A \tilde{C}^m]^{-1/(sm)}} \quad (2.13)$$

или

$$R = \frac{r}{k} t^{1/(sm)}, \quad (2.14)$$

где $k = (A \tilde{C}^m)^{-1/(sm)}$. Тогда напряжения представляются в виде

$$\sigma_{ij}(r, \varphi, t) = \tilde{C} k^s t^{-1/m} \hat{\sigma}_{ij}(R, \varphi). \quad (2.15)$$

Введение автомоделной переменной (2.14) не вызывает изменения системы уравнений, состоящей из уравнений равновесия, условия совместности и кинетического уравнения. Изменение претерпевает граничное условие в бесконечно удаленной точке, что приводит к необходимости определения нового собственного числа s , отличного от $-1/(n+1)$. Впоследствии надстрочный знак $\hat{}$ опускается.

3. Автомоделное решение

На основе результатов ранее проведенных исследований [8–16] принимается, что у вершины трещины существует область полностью поврежденного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль. Таким образом, необходимо найти решение системы уравнений:

уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{RR}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{R\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi}}{R} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{R\varphi}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + 2 \frac{\sigma_{R\varphi}}{R} = 0; \quad (3.1)$$

условия совместности

$$2 \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \dot{\epsilon}_{R\varphi}}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_{RR}}{\partial \varphi^2} - R \frac{\partial \dot{\epsilon}_{RR}}{\partial R} + R \frac{\partial^2 (R \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi})}{\partial R^2}; \quad (3.2)$$

кинетического уравнения

$$R \frac{\partial \Psi}{\partial R} = -sm \left(\frac{\sigma_{eqv}}{\Psi} \right)^m, \quad (3.3)$$

где скорости деформаций ползучести имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{RR} = -\dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} &= \frac{3}{4}B\left(\frac{\sigma_e}{\Psi}\right)^{n-1} \frac{\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\Psi}, \\ \dot{\epsilon}_{R\varphi} &= \frac{3}{2}B\left(\frac{\sigma_e}{\Psi}\right)^{n-1} \frac{\sigma_{R\varphi}}{\Psi}\end{aligned}\quad (3.4)$$

в случае плоской деформации

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{RR} &= \frac{1}{2}B\left(\frac{\sigma_e}{\Psi}\right)^{n-1} \frac{2\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\Psi}, \\ \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2}B\left(\frac{\sigma_e}{\Psi}\right)^{n-1} \frac{2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{RR}}{\Psi}, \\ \dot{\epsilon}_{R\varphi} &= \frac{3}{2}B\left(\frac{\sigma_e}{\Psi}\right)^{n-1} \frac{\sigma_{R\varphi}}{\Psi}\end{aligned}\quad (3.5)$$

и в случае плоского напряженного состояния, интенсивность напряжений определяется следующими формулами: в случае плоского деформированного состояния

$$\sigma_e^2 = 3(\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi})^2/4 + 3\sigma_{R\varphi}^2,$$

в случае плоского напряженного состояния

$$\sigma_e^2 = \sigma_{RR}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{RR}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{R\varphi}^2.$$

Решение этой системы уравнений должно удовлетворять граничным условиям:

отсутствия поверхностных усилий на верхнем берегу трещины

$$\sigma_{R\varphi}(R, \varphi = \pi) = 0, \quad \sigma_{\varphi\varphi}(R, \varphi = \pi) = 0, \quad (3.6)$$

симметрии на ее продолжении

$$\sigma_{R\varphi}(R, \varphi = 0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi}(R, \varphi = 0) = 0, \quad (3.7)$$

асимптотическому условию в бесконечно удаленной точке

$$\sigma_{ij}(R, \varphi) \rightarrow R^s \tilde{\sigma}_{ij}(\varphi, n), \quad (R \rightarrow \infty, s < 0). \quad (3.8)$$

Решение системы уравнений (3.1)–(3.5), подчиняющееся граничным условиям (3.6)–(3.8), разыскивается во всей плоскости за исключением полностью поврежденной зоны, примыкающей к вершине трещины и внутри которой материал не удовлетворяет сформулированной системе уравнений. Предполагается, что внутри области полностью поврежденного материала все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль, а на границе введенной области разыскиваемое решение должно удовлетворять условиям

$$\Psi = 0, \quad \sigma_{ij} = 0. \quad (3.9)$$

4. Асимптотическое решение задачи

4.1. Плоское деформированное состояние

Двучленное асимптотическое разложение функции напряжений Эри и трехчленное асимптотическое разложение скалярного параметра сплошности для больших расстояний от вершины трещины разыскиваются в виде:

$$F(R, \varphi) = R^\lambda f^{(0)}(\varphi) + R^{\lambda_1} f^{(1)}(\varphi) + o(R^{\lambda_1}), \quad R \rightarrow \infty \quad (4.1)$$

$$\psi(R, \varphi) = 1 - R^\gamma g^{(0)}(\varphi) - R^{\gamma_1} g^{(1)}(\varphi) + o(R^{\gamma_1}),$$

где $\lambda, \lambda_1, \gamma, \gamma_1, f^{(0)}(\varphi), f^{(1)}(\varphi)$ — неизвестные собственные значения и собственные функции, подлежащие определению, соответственно.

Тогда двучленные асимптотические разложения компонент тензора напряжений при $R \rightarrow \infty$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{RR}(R, \varphi) &= R^s \left(\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right) + R^{s_1} \left(\lambda_1 f^{(1)} + (f^{(1)})'' \right) + o(R^{s_1}), \\ \sigma_{\varphi\varphi}(R, \varphi) &= R^s \lambda (\lambda - 1) f^{(0)} + R^{s_1} \lambda_1 (\lambda_1 - 1) f^{(1)} + o(R^{s_1}), \\ \sigma_{R\varphi}(R, \varphi) &= R^s (1 - \lambda) (f^{(0)})' + R^{s_1} (1 - \lambda_1) (f^{(1)})' + o(R^{s_1}), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $s = \lambda - 2, s_1 = \lambda_1 - 2$.

Тогда, учитывая, что

$$\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi} = R^s \left[\lambda(2 - \lambda) f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right] + R^{s_1} \left[\lambda_1(2 - \lambda_1) f^{(1)} + (f^{(1)})'' \right], \quad (4.3)$$

можно найти квадрат интенсивности напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= (\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + 4\sigma_{R\varphi}^2 = \left\{ R^s \left[\lambda(2 - \lambda) f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right] + R^{s_1} \left[\lambda_1(2 - \lambda_1) f^{(1)} + (f^{(1)})'' \right] \right\}^2 + \\ &+ 4 \left\{ R^2 (1 - \lambda) (f^{(0)})' + R^{s_1} (1 - \lambda_1) (f^{(1)})' \right\}^2 = R^{2s} (h(\varphi))^2 + 2R^{s+s_1} h_1(\varphi), \end{aligned}$$

где введены следующие обозначения:

$$h(\varphi) = \sqrt{\left[\lambda(2 - \lambda) f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right]^2 + 4(1 - \lambda)^2 ((f^{(0)})')^2}, \quad (4.4)$$

$$h_1(\varphi) = \left[\lambda(2 - \lambda) f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right] \left[\lambda_1(2 - \lambda_1) f^{(1)} + (f^{(1)})'' \right] + 4(1 - \lambda)(1 - \lambda_1) (f^{(0)})' (f^{(1)})'. \quad (4.5)$$

Поэтому

$$\sigma_e^2 = R^{2s} h^2 + 2R^{s+s_1} h_1 = R^{2s} h^2 \left(1 + 2R^{s_1-s} \frac{h_1}{h^2} \right) \quad (4.6)$$

и двучленное асимптотическое разложение интенсивности напряжений имеет вид

$$\sigma_e = \sigma_e(R, \varphi) = R^s h \left(1 + R^{s_1-s} \frac{h_1}{h^2} \right). \quad (4.7)$$

Трехчленное асимптотическое разложение параметра сплошности разыскивается в форме

$$\psi(R, \varphi) = 1 - R^\gamma g^{(0)}(\varphi) - R^{\gamma_1} g^{(1)}(\varphi) - o(R^{\gamma_1}), \quad R \rightarrow \infty. \quad (4.8)$$

Асимптотический анализ кинетического уравнения позволяет найти, что $\gamma = sm$, $\gamma_1 = sm + s_1 - s$ (здесь принята гипотеза о совпадении порядков малости главных членов асимптотических разложений слагаемых, входящих в правую и левую части кинетического уравнения).

Определяющие соотношения задачи приводят к следующим асимптотическим разложениям скоростей деформаций ползучести на значительном расстоянии от вершины трещины, например, для $\dot{\epsilon}_{RR}$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{RR} &= \frac{1}{2} R^{s(n-1)} h^{n-1} \left(1 + (n-1) R^{sm} \frac{h_1}{h^2} \right) (1 + n R^{sm} g^{(0)}) \times \\ &\times \left\{ R^s \left[\lambda(2-\lambda) f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right] + R^{s_1} \left[\lambda_1(2-\lambda_1) f^{(1)} + (f^{(1)})'' \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2} R^{sn} h^{n-1} \left[1 + R^{sm} \left((n-1) \frac{h_1}{h^2} + n g^{(0)} \right) \right] \times \\ &\times \left\{ \left[\lambda(2-\lambda) f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right] + R^{s_1-s} \left[\lambda_1(2-\lambda_1) f^{(1)} + (f^{(1)})'' \right] \right\}. \end{aligned}$$

Из последнего равенства вытекает, что главный член асимптотического разложения имеет порядок R^{sn} , а следующие за ним имеют порядки R^{sn+sm} и R^{sn+s_1-s} . Необходимо отметить, что, рассматривая коэффициенты при главных членах асимптотических разложений в условии совместности и законе накопления повреждений, можно прийти к обыкновенному дифференциальному уравнению для определения функции $f^{(0)}$, а затем к алгебраическому уравнению, позволяющему найти функцию $g^{(0)}$. Исследуя слагаемые более высоких порядков малости, необходимо получать дифференциальные уравнения для нахождения функций $f^{(i)}$ (в рассматриваемом случае удерживается лишь функция $f^{(1)}$, но нужно построить такие асимптотические разложения для скоростей деформации ползучести, которые давали бы возможность получения неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения для определения функции $f^{(i)}$, считая, что ранее определены функции $f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(i-1)}$ и $g^{(0)}, g^{(1)}, \dots, g^{(i-1)}$). Таким образом, необходимо гарантировать продолжения процесса построения асимптотических разложений и получения цепочки обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения коэффициентов этих разложений, что приводит к условию $s_1 = s + sm$, которое позволяет учесть все слагаемые в последнем асимптотическом разложении скорости деформации ползучести.

Окончательные выражения для двучленных асимптотических разложений скоростей деформаций ползучести принимают форму

$$\dot{\epsilon}_{RR} = -\dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} = R^{sn} \epsilon_{RR}^{(0)}(\varphi) + R^{s_1-s+sn} \epsilon_{RR}^{(1)}(\varphi), \quad \dot{\epsilon}_{R\varphi} = R^{sn} \epsilon_{R\varphi}^{(0)}(\varphi) + R^{s_1-s+sn} \epsilon_{R\varphi}^{(1)}(\varphi), \quad (4.9)$$

или, учитывая, что $s_1 - s = sm$,

$$\dot{\epsilon}_{RR} = -\dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} = R^{sn} \epsilon_{RR}^{(0)}(\varphi) + R^{s(n+m)} \epsilon_{RR}^{(1)}(\varphi), \quad \dot{\epsilon}_{R\varphi} = R^{sn} \epsilon_{R\varphi}^{(0)}(\varphi) + R^{s(n+m)} \epsilon_{R\varphi}^{(1)}(\varphi), \quad (4.10)$$

где

$$\epsilon_{RR}^{(0)}(\varphi) = h^{n-1} \left(\lambda(2-\lambda) f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right), \quad \epsilon_{R\varphi}^{(0)}(\varphi) = h^{n-1} (1-\lambda) (f^{(0)})', \quad (4.11)$$

$$\varepsilon_{RR}^{(1)}(\varphi) = h^{n-1} \left\{ \lambda_1(2 - \lambda_1)f^{(1)} + (f^{(1)})'' + \omega^{(1)}(\varphi) [\lambda(2 - \lambda)f^{(0)} + (f^{(0)})''] \right\}, \quad (4.12)$$

$$\varepsilon_{R\varphi}^{(1)}(\varphi) = h^{n-1} \left[(1 - \lambda_1)(f^{(1)})' + \omega^{(1)}(\varphi)(1 - \lambda)(f^{(0)})' \right],$$

где $\omega^{(1)}(\varphi) = (n - 1)\frac{h_1}{h^2} + ng^{(0)}$.

Подстановка этих двучленных асимптотических разложений компонент тензора скоростей деформаций ползучести в условие совместности приводит к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям, связывающим угловые коэффициенты главного и следующего за ним членов данных разложений соответственно:

$$2(sn + 1)\frac{\partial \varepsilon_{R\varphi}^{(0)}}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{RR}^{(0)}}{\partial \varphi^2} - sn(sn + 2)\varepsilon_{RR}^{(0)}, \quad (4.13)$$

$$2[s(n + m) + 1]\frac{\partial \varepsilon_{R\varphi}^{(1)}}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{RR}^{(1)}}{\partial \varphi^2} - s(n + m)[s(n + m) + 2]\varepsilon_{RR}^{(1)}. \quad (4.14)$$

Первое из полученных уравнений и выражения (4.11) приводят к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно функции $f^{(0)}(\varphi)$:

$$\begin{aligned} (f^{(0)})^{IV} N(\varphi) = & 4(sn + 1)(1 - \lambda) \left[(n - 1)K(\varphi)(f^{(0)})' + h^2 (f^{(0)})'' \right] - \\ & - h^2 \left[((2 - \lambda)\lambda - sn(sn + 2))(f^{(0)})'' - sn(sn + 2)(2 - \lambda)\lambda f^{(0)} \right] - \\ & - (n - 1)(n - 3)(K(\varphi)/h)^2 \left[(2 - \lambda)\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right] - \\ & - 2(n - 1)K(\varphi) \left[(2 - \lambda)\lambda (f^{(0)})' + (f^{(0)})''' \right] - \\ & - (n - 1)M(\varphi) \left[(2 - \lambda)\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right], \end{aligned} \quad (4.15)$$

где

$$\begin{aligned} K(\varphi) = & \left[(2 - \lambda)\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right] \times \\ & \times \left[(2 - \lambda)\lambda (f^{(0)})' + (f^{(0)})''' \right] + 4(1 - \lambda)^2 (f^{(0)})' (f^{(0)})'', \\ M(\varphi) = & \left[(2 - \lambda)\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right] \lambda(2 - \lambda)(f^{(0)})'' + \\ & + \left[(2 - \lambda)\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right]^2 + 4(1 - \lambda)^2 (f^{(0)})' (f^{(0)})'', \\ N(\varphi) = & n \left[(2 - \lambda)\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right]^2 + 4(1 - \lambda)^2 \left[(f^{(0)})' \right]^2. \end{aligned}$$

Решение уравнения (4.15) должно удовлетворять граничным условиям, следующим из требования отсутствия поверхностных усилий на верхнем берегу трещины

$$f^{(0)}(\varphi = \pi) = 0, \quad (f^{(0)})'(\varphi = \pi) = 0, \quad (4.16)$$

и условиям симметрии на ее продолжении

$$(f^{(0)})'(\varphi = 0) = 0, \quad (f^{(0)})'''(\varphi = 0) = 0. \quad (4.17)$$

Таблица 1

Собственные числа s , значения $(f^{(0)})''(0)$, $f^{(1)}(0)$ и $(f^{(1)})''(0)$ в случае плоского деформированного состояния

n	s	$(f^{(0)})''(0)$	$f^{(1)}(0)$	$(f^{(1)})''(0)$
3	-0,771694	-0,43724	0,115	-0,015
4	-0,668489	-0,409203	0,035	-0,015
5	-0,617909	-0,398556	0,01	-0,007
6	-0,5901244	-0,395027	0,003	-0,0035
7	-0,573245	-0,394371	0,0012	-0,006
8	-0,562138	-0,394869	0,0005	0,00139
9	-0,554369	-0,395813	0,0002	0,00142

Таким образом, для определения функции $f^{(0)}(\varphi)$ сформулирована двухточечная краевая задача, решение которой разыскивалось численно с помощью метода Рунге—Кутты—Фельберга. Для реализации процедуры данного метода следует задать значения всех искомых функций (в рассматриваемом случае — функции $f^{(0)}(\varphi)$ и ее трех производных на линии продолжения трещины $\varphi = 0$). Необходимо отметить, что уравнение (4.15) является однородным: если функция $f^{(0)}(\varphi)$ представляет собой решение этого уравнения, то любая функция вида $Af^{(0)}(\varphi)$, где A — произвольная константа, также является решением. Поэтому следует положить, что

$$f^{(0)}(\varphi = 0) = 1, \quad (4.18)$$

таким образом, принимается условие нормировки решения. Поэтому для применения классической процедуры метода Рунге—Кутты—Фельберга необходимо подобрать две величины

$$(f^{(0)})''(\varphi = 0) = A_1 \quad (4.19)$$

и собственное число s таким образом, чтобы выполнялись граничные условия на верхнем берегу трещины (4.16).

Собственные числа s , значения $(f^{(0)})''(0)$, $f^{(1)}(0)$ и $(f^{(1)})''(0)$ в случае плоского деформированного состояния, полученные в результате численного анализа, приведены в табл. 1.

Необходимо отметить, что исследование нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (4.15) с начальными условиями (4.17)–(4.19) позволяет найти угловое распределение главного члена асимптотического разложения функции напряжений Эри (функцию $f^{(0)}(\varphi)$), а, следовательно, и угловые распределения главных членов асимптотических разложений компонент тензора напряжений без помощи кинетического уравнения, поскольку главный член асимптотического разложения скалярного параметра сплошности тождественно равен единице (согласно (4.1)). После определения главного члена асимптотического разложения функции напряжений Эри кинетическое уравнение позволяет найти двучленное разложение для

скалярного параметра сплошности. Этот подход дает возможность в связанной задаче рассматривать на каждом шаге одно уравнение (либо для определения функции $f^{(i)}(\varphi)$, либо для нахождения функции $g^{(i)}(\varphi)$). Действительно, для анализа кинетического уравнения (3.3) нужно предварительно найти двучленное асимптотическое разложение эквивалентного напряжения (1.5), которое для случая плоского деформированного состояния принимает вид

$$\sigma_{eqv} = (3 - 3\alpha - 2\beta)(\sigma_{RR} + \sigma_{\varphi\varphi})/2 + \\ + (\sqrt{3}\alpha + \beta) \sqrt{(\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + 4\sigma_{R\varphi}^2}/2.$$

Учитывая следующее равенство:

$$\sigma_{RR} + \sigma_{\varphi\varphi} = R^s [\lambda^2 f^{(0)} + (f^{(0)})''] + R^{s_1} [\lambda_1^2 f^{(1)} + (f^{(1)})'']$$

и соотношение (4.7), можно получить

$$\sigma_{eqv}(R, \varphi) = R^s \sigma_{eqv}^{(0)}(\varphi) + R^{s_1} \sigma_{eqv}^{(1)}(\varphi), \quad (4.20)$$

где

$$\sigma_{eqv}^{(0)}(\varphi) = \frac{1}{2}(3 - 3\alpha - 2\beta) [\lambda^2 f^{(0)} + (f^{(0)})''] + \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \beta)h(\varphi), \\ \sigma_{eqv}^{(1)}(\varphi) = \frac{1}{2}(3 - 3\alpha - 2\beta) [\lambda_1^2 f^{(1)} + (f^{(1)})''] + \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \beta)\frac{h_1(\varphi)}{h(\varphi)}.$$

Тогда кинетическое уравнение (3.3) и подстановка в него асимптотических разложений (4.20) и (4.1) приводят к равенству

$$\gamma R^\gamma g^{(0)}(\varphi) + \gamma_1 R^{\gamma_1} g^{(1)}(\varphi) = smR^{sm} (\sigma_{eqv}^{(0)})^m \left[1 + mR^{sm} \left(\frac{\sigma_{eqv}^{(1)}}{\sigma_{eqv}^{(0)}} + g^{(0)} \right) \right],$$

откуда, путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях R , можно найти коэффициенты трехчленного асимптотического разложения скалярного параметра сплошности

$$g^{(0)}(\varphi) = (\sigma_{eqv}^{(0)})^m, \quad (4.21)$$

$$g^{(1)}(\varphi) = \frac{m}{2} (\sigma_{eqv}^{(0)})^m \left(\frac{\sigma_{eqv}^{(1)}}{\sigma_{eqv}^{(0)}} + g^{(0)} \right).$$

Двучленное разложение параметра сплошности и условие совместности (уравнение (4.14)) ведут к неоднородному линейному дифференциальному уравнению относительно функции $f^{(1)}(\varphi)$:

$$\begin{aligned}
(f^{(1)})^{IV} L(\varphi) = & 4[s(n+m)+1](n-1)K(\varphi) \left[(1-\lambda_1)(f^{(1)})' + B(\varphi) \right] + \\
& + s(n+m)[s(n+m)+2]h^2 \left[\lambda_1(2-\lambda_1)f^{(1)} + (f^{(1)})'' + A(\varphi) \right] - \\
& - (n-1)(n-3)K^2(\varphi) \left[\lambda_1(2-\lambda_1)f^{(1)} + (f^{(1)})'' + A(\varphi) \right] / h^2 - \\
& - \lambda_1(2-\lambda_1)h^2 (f^{(1)})'' - h^2 G(\varphi) \left[\lambda(2-\lambda)f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right] - \\
& - 2(n-1)K(\varphi) \left[\lambda_1(2-\lambda_1)(f^{(1)})' + (f^{(1)})''' + A'(\varphi) \right] - \\
& - (n-1)K'(\varphi) \left[\lambda_1(2-\lambda_1)f^{(1)} + (f^{(1)})'' + A(\varphi) \right] + \\
& + 4[s(n+m)+1]h^2 \left[(1-\lambda_1)(f^{(1)})'' + B'(\varphi) \right] - \\
& - 2\omega_1' \left[\lambda(2-\lambda)(f^{(0)})' + (f^{(0)})''' \right] h^2 - \\
& - \omega_1 \left[\lambda(2-\lambda)(f^{(0)})'' + (f^{(0)})^{IV} \right] h^2,
\end{aligned} \tag{4.22}$$

где

$$\begin{aligned}
L(\varphi) = & n \left[\lambda(2-\lambda)f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right]^2 + 4(1-\lambda)^2 \left((f^{(0)})' \right)^2, \\
A(\varphi) = & \omega_1(\varphi) \left[\lambda(2-\lambda)f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right], \\
B(\varphi) = & \omega_1(\varphi)(1-\lambda)(f^{(0)})', G(\varphi) = (n-1)D(\varphi)/h^2 + E(\varphi), \\
D(\varphi) = & \left[\lambda(2-\lambda)f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right] \lambda_1(2-\lambda_1)(f^{(1)})'' + \\
& + \left[\lambda(2-\lambda)(f^{(0)})'' + (f^{(0)})^{IV} \right] \left[\lambda_1(2-\lambda_1)f^{(1)} + (f^{(1)})'' \right] + \\
& + 2 \left[\lambda(2-\lambda)(f^{(0)})' + (f^{(0)})''' \right] \left[\lambda_1(2-\lambda_1)(f^{(1)})' + (f^{(1)})''' \right] + \\
& + 4(1-\lambda)(1-\lambda_1) \left[(f^{(0)})''' (f^{(1)})' + 2(f^{(0)})'' (f^{(1)})'' + (f^{(0)})' (f^{(1)})''' \right], \\
E(\varphi) = & (n-1) \left[8h_1(\varphi)K^2/h^6 - 4h_1'K/h^4 - 2h_1K'/h^4 \right] + n(g^{(0)})'',
\end{aligned}$$

где функции $g^{(0)}$, $f^{(0)}$ известны. Далее уравнение (4.22) исследуется численно с учетом граничных условий на верхнем берегу трещины

$$f^{(1)}(\varphi = \pi) = 0, \quad (f^{(1)})'(\varphi = \pi) = 0, \tag{4.23}$$

и на ее продолжении

$$(f^{(1)})'(\varphi = 0) = 0, \quad (f^{(1)})'''(\varphi = 0) = 0. \tag{4.24}$$

Для реализации метода Рунге—Кутты—Фельберга необходимо сформулировать следующие начальные условия при $\varphi = 0$:

$$f^{(1)}(\varphi = 0) = A_2, \quad (f^{(1)})'(\varphi = 0) = 0, \tag{4.25}$$

$$(f^{(1)})''(\varphi = 0) = A_3, \quad (f^{(1)})'''(\varphi = 0) = 0.$$

Постоянные A_2 и A_3 находятся из требования выполнения граничных условий (4.23). После определения функции $f^{(1)}(\varphi)$, а следовательно, и $\sigma_{eqv}^{(1)}$, можно найти функцию $g^{(1)}(\varphi)$, используя второе уравнение из системы равенств

(4.21). Таким образом, конфигурация области полностью поврежденного материала определяется посредством соотношений

$$\begin{aligned}\psi &= 1 - R^{sm} g^{(0)}(\varphi) = 0, \\ \psi &= 1 - R^{sm} g^{(0)}(\varphi) - R^{2sm} g^{(1)}(\varphi) = 0,\end{aligned}$$

или

$$R(\varphi) = \left(g^{(0)}(\varphi) \right)^{-1/(sm)}, \quad (4.26)$$

$$R(\varphi) = \left(\frac{g^{(0)}(\varphi) + \sqrt{(g^{(0)}(\varphi))^2 + 4g^{(1)}(\varphi)}}{2} \right)^{-1/(sm)}, \quad (4.27)$$

причем первая зависимость позволяет найти область полностью поврежденного материала, определяемую двучленным асимптотическим разложением параметра сплошности, тогда как второе равенство позволяет найти форму области полностью поврежденного материала, определяемую трехчленным асимптотическим разложением параметра сплошности. Граница области полностью поврежденного материала, найденная с помощью двучленного и трехчленного разложений параметра сплошности для различных значений констант материала, входящих в определяющие соотношения и кинетическое уравнение, представлена на рис. 1–4 (1 — кривая, построенная на основе двучленного разложения параметра сплошности, 2 — кривая, построенная на основе трехчленного разложения параметра сплошности). Из представленных рисунков видно, что конфигурации области полностью поврежденного материала, определяемые двучленным и трехчленным асимптотическими разложениями параметра сплошности, являются близкими по своей форме и их характерные линейные размеры (например, их протяженность вдоль прямой, продолжающей трещину) практически совпадают. Потому можно заключить, что установленная асимптотика дальнего поля напряжений действительно "управляет" конфигурацией области полностью поврежденного материала, моделируемой в окрестности вершины трещины.

На рис. 5–7 приведены конфигурации областей полностью поврежденного материала, полученные для случая, когда граничное условие в бесконечно удаленной точке формулируется как требование асимптотического сближения с решением HRR. Очевидно, что характерный линейный размер области полностью поврежденного материала, соответствующий конфигурациям, построенным с помощью двучленного и трехчленного асимптотического разложения параметра сплошности соответственно, существенно различается (в качестве характерного линейного размера можно принять протяженность области по оси ординат). Следовательно, граничное условие в бесконечно удаленной точке не может быть сформулировано как условие асимптотического сближения с решением HRR.

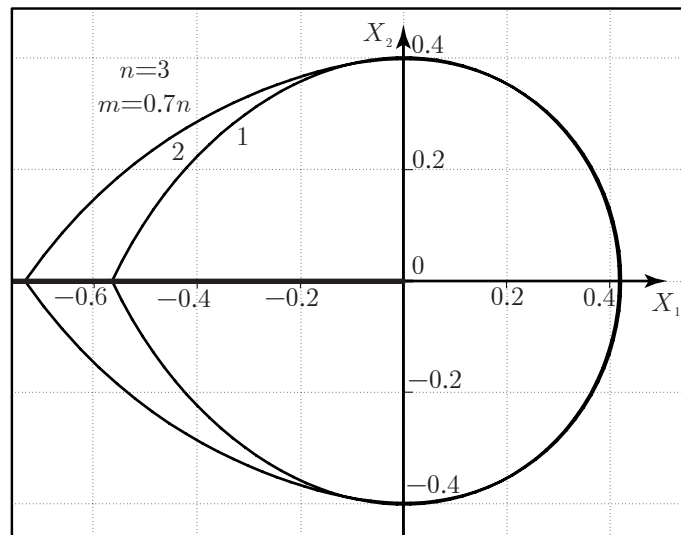


Рис. 1. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 3$ и $m = 0,7n$

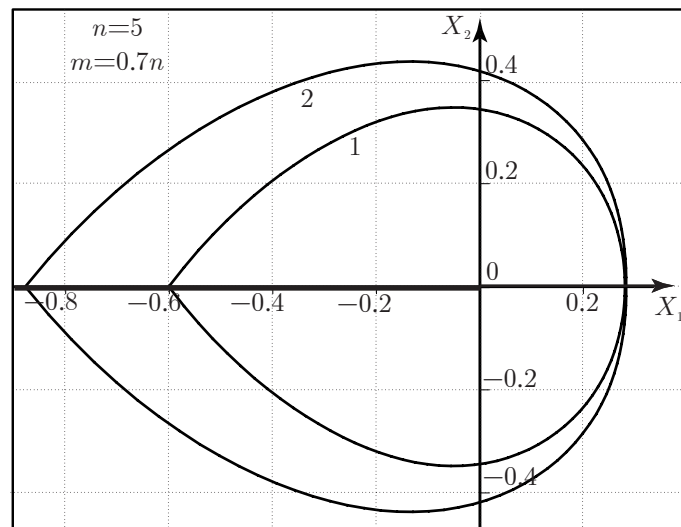


Рис. 2. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 5$ и $m = 0,7n$

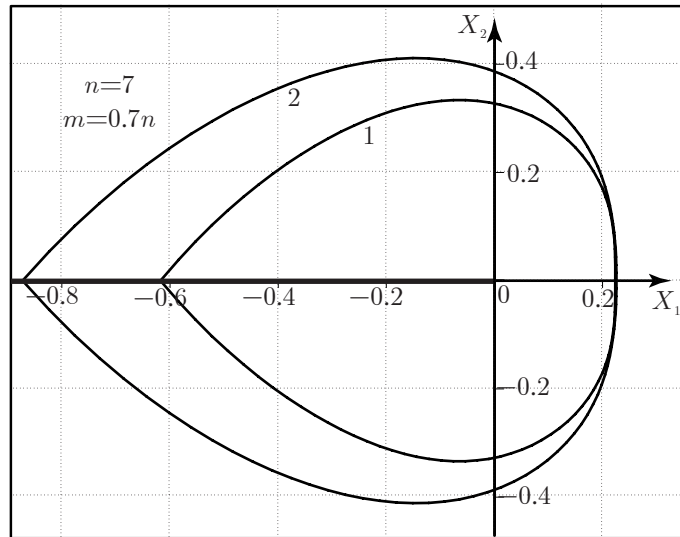


Рис. 3. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 7$ и $m = 0,7n$

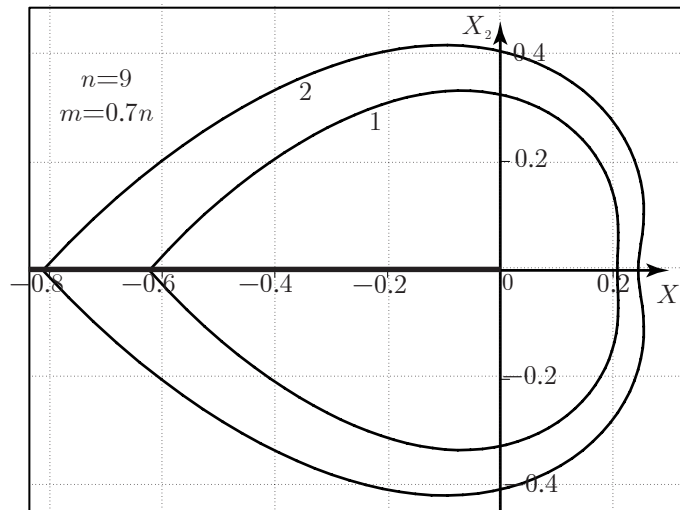


Рис. 4. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 9$ и $m = 0,7n$

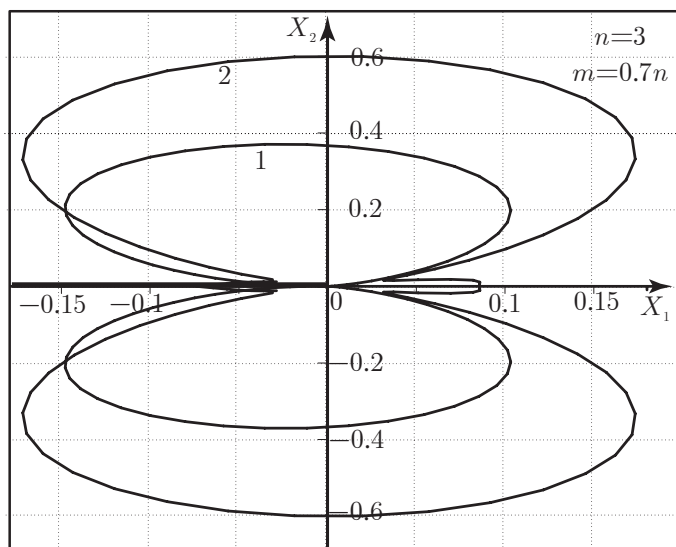


Рис. 5. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 3$ и $m = 0,7n$

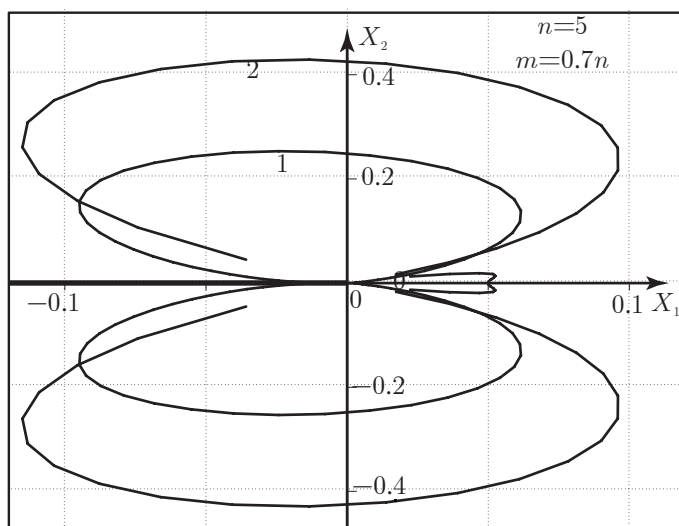


Рис. 6. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 5$ и $m = 0,7n$

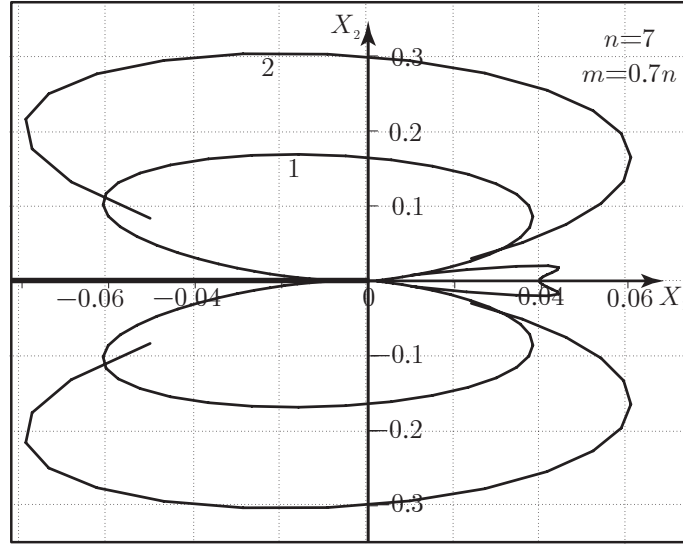


Рис. 7. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 7$ и $m = 0,7n$

4.2. Плоское напряженное состояние

В случае плоского напряженного состояния определяющие уравнения после введения автомоделной переменной принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{RR} &= \left(\frac{\sigma_e}{\Psi}\right)^{n-1} \frac{2\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\Psi}, \\ \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} &= \left(\frac{\sigma_e}{\Psi}\right)^{n-1} \frac{2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{RR}}{\Psi}, \\ \dot{\epsilon}_{R\varphi} &= 3 \left(\frac{\sigma_e}{\Psi}\right)^{n-1} \frac{\sigma_{R\varphi}}{\Psi}.\end{aligned}\tag{4.28}$$

Для определения двучленного асимптотического разложения компонент тензора скоростей деформаций ползучести следует, как и в случае плоского деформированного состояния, предварительно найти двучленное асимптотическое разложение интенсивности напряжений. Поскольку

$$\begin{aligned}\sigma_e^2 &= \sigma_{RR}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{RR}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{R\varphi}^2 = \\ &= \left[R^s (\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'') + R^{s1} (\lambda_1 f^{(1)} + (f^{(1)})'')\right]^2 + \\ &\quad + \left[R^s \lambda (\lambda - 1) f^{(0)} + R^{s1} \lambda_1 (\lambda_1 - 1) f^{(1)}\right]^2 - \\ &\quad - \left[R^s (\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'') + R^{s1} (\lambda_1 f^{(1)} + (f^{(1)})'')\right] \times \\ &\quad \times \left[R^s \lambda (\lambda - 1) f^{(0)} + R^{s1} \lambda_1 (\lambda_1 - 1) f^{(1)}\right] + \\ &\quad + 3 \left[R^s (1 - \lambda) (f^{(0)})' + R^{s1} (1 - \lambda_1) (f^{(1)})'\right]^2,\end{aligned}$$

то, продолжая преобразования, можно получить

$$\begin{aligned}\sigma_e &= R^{2s} \left[\left(\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right) \lambda (1 - \lambda) f^{(0)} + 3(1 - \lambda)^2 \left((f^{(0)})' \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right)^2 + \lambda^2 (\lambda - 1)^2 (f^{(0)})^2 \right] + \\ &+ R^{s+s_1} \left[\lambda \lambda_1 (\lambda - 1) (\lambda_1 - 1) f^{(0)} f^{(1)} + 3(1 - \lambda)(1 - \lambda_1) (f^{(0)})' (f^{(1)})' + \right. \\ &\quad \left. + \left(\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right) (\lambda_1 f^{(1)} + (f^{(1)})'') - \left(\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right) \lambda_1 (\lambda_1 - 1) f^{(1)} / 2 - \right. \\ &\quad \left. - (\lambda_1 f^{(1)} + (f^{(1)})'') \lambda (\lambda - 1) f^{(0)} / 2 \right] = \\ &= R^{2s} h^2 \left(1 + 2R^{s_1-s} \frac{h_1}{h^2} \right)\end{aligned}$$

и легко установить, что двучленное асимптотическое разложение интенсивности напряжений представляется формулой

$$\sigma_e = \sigma_e(R, \varphi) = R^s h \left(1 + R^{s_1-s} \frac{h_1}{h^2} \right), \quad (4.29)$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned}h &= \left[\left(\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right)^2 + \lambda^2 (\lambda - 1)^2 (f^{(0)})^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left(\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right) \lambda (\lambda - 1) f^{(0)} - 3(1 - \lambda)^2 \left((f^{(0)})' \right)^2 \right]^{1/2}, \\ h_1 &= \lambda \lambda_1 (\lambda - 1) (\lambda_1 - 1) f^{(0)} f^{(1)} + 3(1 - \lambda)(1 - \lambda_1) (f^{(0)})' (f^{(1)})' + \\ &+ \left(\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right) (\lambda_1 f^{(1)} + (f^{(1)})'') - \left(\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right) \lambda_1 (\lambda_1 - 1) f^{(1)} / 2 - \\ &\quad - (\lambda_1 f^{(1)} + (f^{(1)})'') \lambda (\lambda - 1) f^{(0)} / 2.\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}2\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi} &= R^s \left[\lambda(3 - \lambda) f^{(0)} + 2(f^{(0)})'' \right] + R^{s_1} \left[\lambda_1(3 - \lambda_1) f^{(1)} + 2(f^{(1)})'' \right], \\ 2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{RR} &= R^s \left[\lambda(2\lambda - 3) f^{(0)} - (f^{(0)})'' \right] + R^{s_1} \left[\lambda_1(2\lambda_1 - 3) f^{(1)} - (f^{(1)})'' \right],\end{aligned}$$

можно получить следующие двучленные асимптотические разложения компонент тензора скоростей деформации ползучести

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{RR} &= R^{sn} \varepsilon_{RR}^{(0)}(\varphi) + R^{s_1-s+sn} \varepsilon_{RR}^{(1)}(\varphi), \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} &= R^{sn} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}(\varphi) + R^{s_1-s+sn} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}(\varphi), \\ \dot{\varepsilon}_{R\varphi} &= R^{sn} \varepsilon_{R\varphi}^{(0)}(\varphi) + R^{s_1-s+sn} \varepsilon_{R\varphi}^{(1)}(\varphi),\end{aligned} \quad (4.30)$$

или, учитывая, что $s_1 - s = sm$,

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{RR} &= R^{sn} \varepsilon_{RR}^{(0)}(\varphi) + R^{s(n+m)} \varepsilon_{RR}^{(1)}(\varphi), \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} &= R^{sn} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}(\varphi) + R^{s(n+m)} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}(\varphi), \\ \dot{\varepsilon}_{R\varphi} &= R^{sn} \varepsilon_{R\varphi}^{(0)}(\varphi) + R^{s(n+m)} \varepsilon_{R\varphi}^{(1)}(\varphi),\end{aligned} \quad (4.31)$$

где

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{RR}^{(0)}(\varphi) &= h^{n-1} \left(\lambda(3 - \lambda)f^{(0)} + 2(f^{(0)})'' \right), \\
 \varepsilon_{RR}^{(1)}(\varphi) &= h^{n-1} \left\{ \lambda(3 - \lambda)f^{(1)} + 2(f^{(1)})'' + \omega_1(\varphi) \left[\lambda(3 - \lambda)f^{(0)} + 2(f^{(0)})'' \right] \right\}, \\
 \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}(\varphi) &= h^{n-1} \left(\lambda(2\lambda - 3)f^{(0)} - (f^{(0)})'' \right), \\
 \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}(\varphi) &= h^{n-1} \left\{ \lambda(2\lambda - 3)f^{(1)} - (f^{(1)})'' + \omega_1(\varphi) \left[\lambda(2\lambda - 3)f^{(0)} - (f^{(0)})'' \right] \right\}, \\
 \varepsilon_{R\varphi}^{(0)}(\varphi) &= 3h^{n-1}(1 - \lambda)(f^{(0)})', \\
 \varepsilon_{R\varphi}^{(1)}(\varphi) &= 3h^{n-1} \left[(1 - \lambda_1)(f^{(1)})' + \omega_1(\varphi)(1 - \lambda)(f^{(0)})' \right],
 \end{aligned}$$

здесь $\omega^{(1)}(\varphi) = (n - 1)\frac{h_1}{h^2} + ng^{(0)}$.

Путем подстановки полученных двучленных асимптотических разложений компонент тензора скоростей деформаций в условие совместности скоростей деформаций и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях R можно найти два нелинейных дифференциальных уравнения, позволяющих определить угловые распределения компонент тензора напряжений и скалярного параметра сплошности

$$2(sn + 1)\frac{\partial \varepsilon_{R\varphi}^{(0)}}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{RR}^{(0)}}{\partial \varphi^2} - sn\varepsilon_{RR}^{(0)} + (sn + 1)sn\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}, \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned}
 2[s(n + m) + 1]\frac{\partial \varepsilon_{R\varphi}^{(1)}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{RR}^{(1)}}{\partial \varphi^2} - s(n + m)\varepsilon_{RR}^{(1)} + \\
 &+ [s(n + m) + 1]sn\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)},
 \end{aligned} \quad (4.33)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
 (f^{(0)})^{IV} N(\varphi) &= 6(sn + 1)(1 - \lambda) \left[(n - 1)K(\varphi) + h^2 (f^{(0)})'' \right] - \\
 &- \left[(n - 3)(K(\varphi)/h)^2 + (n - 1)M(\varphi) \right] \left[\lambda(3 - \lambda)f^{(0)} + 2(f^{(0)})'' \right] - \\
 &- 2(n - 1)K(\varphi) \left[\lambda(3 - \lambda)(f^{(0)})' + 2(f^{(0)})''' \right] - \\
 &- h^2 \lambda sn((sn + 1)(2\lambda - 3) - 3 + \lambda)f^{(0)} - \\
 &- h^2 (\lambda(3 - \lambda) - sn(sn + 1))(f^{(0)})'',
 \end{aligned} \quad (4.34)$$

где

$$\begin{aligned}
 K(\varphi) &= (\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'')(\lambda (f^{(0)})' + (f^{(0)})''') + \lambda^2(\lambda - 1)^2 f^{(0)} (f^{(0)})' + \\
 &+ 3(1 - \lambda)^2 (f^{(0)})' (f^{(0)})'' - \lambda(1 - \lambda) (\lambda (f^{(0)})' + (f^{(0)})''') f^{(0)} / 2 - \\
 &- \lambda(1 - \lambda) (\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'') (f^{(0)})' / 2, \\
 M(\varphi) &= (\lambda (f^{(0)})' + (f^{(0)})''')^2 + \lambda(3 - \lambda) (\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'') (f^{(0)})'' + \\
 &+ \lambda^2(1 - \lambda)^2 ((f^{(0)})'')^2 + \lambda^2(\lambda - 1)(2\lambda - 3) f^{(0)} (f^{(0)})'' / 2 + \\
 &+ 3(1 - \lambda)^2 ((f^{(0)})'')^2 + 3(1 - \lambda)^2 (f^{(0)})' (f^{(0)})''' - \\
 &- \lambda(\lambda - 1) (\lambda (f^{(0)})' + (f^{(0)})''') (f^{(0)})',
 \end{aligned}$$

$$N(\varphi) = (n-1) \left(\lambda(3-\lambda)f^{(0)} + 2(f^{(0)})'' \right)^2 / 2 + 2h^2.$$

Вновь для реализации процедуры метода Рунге—Кутта—Фельберга следует задать значения всех искомых функций (в рассматриваемом случае — функции $f^{(0)}(\varphi)$ и ее трех производных на линии продолжения трещины $\varphi = 0$). Необходимо отметить, что уравнение (4.34) является однородным, поэтому следует положить, что

$$f^{(0)}(\varphi = 0) = 1, \quad (4.35)$$

таким образом, принимается условие нормировки решения. Для применения классической процедуры метода Рунге—Кутта—Фельберга необходимо подобрать две величины

$$(f^{(0)})''(\varphi = 0) = A_1 \quad (4.36)$$

и собственное число s таким образом, чтобы выполнялись граничные условия на верхнем берегу трещины:

$$f^{(0)}(\varphi = \pi) = 0, \quad (f^{(0)})'(\varphi = \pi) = 0. \quad (4.37)$$

Для отыскания двучленного асимптотического разложения параметра сплошности необходимо отметить, что

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{RR} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sqrt{(\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + 4\sigma_{R\varphi}^2}}{2}, \quad \sigma_{kk} = \sigma_{RR} + \sigma_{\varphi\varphi}.$$

После введения дополнительных обозначений

$$\begin{aligned} \sqrt{(\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + 4\sigma_{R\varphi}^2} &= R^s p(\varphi) \left(1 + R^{s_1-s} \frac{p_1(\varphi)}{p(\varphi)} \right), \\ p(\varphi) &= \sqrt{[\lambda(2-\lambda)f^{(0)} + (f^{(0)})'']^2 + 4(1-\lambda)^2 ((f^{(0)})')^2}, \\ p_1(\varphi) &= [\lambda(2-\lambda)f^{(0)} + (f^{(0)})''] [\lambda_1(2-\lambda_1)f^{(1)} + (f^{(1)})''] + \\ &\quad + 4(1-\lambda)(1-\lambda_1)(f^{(0)})'(f^{(1)})' \end{aligned}$$

эквивалентное напряжение (1.5) представляется в виде

$$\sigma_{eqv}(R, \varphi) = R^s \sigma_{eqv}^{(0)}(\varphi) + R^{s_1} \sigma_{eqv}^{(1)}(\varphi), \quad (4.38)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{eqv}^{(0)}(\varphi) &= \left(1 - \alpha - \frac{\beta}{2} \right) [\lambda^2 f^{(0)} + (f^{(0)})''] + \alpha h(\varphi) + \frac{\beta}{2} p(\varphi), \\ \sigma_{eqv}^{(1)}(\varphi) &= \left(1 - \alpha - \frac{\beta}{2} \right) [\lambda_1^2 f^{(1)} + (f^{(1)})''] + \alpha \frac{h_1(\varphi)}{h(\varphi)} + \frac{\beta}{2} \frac{p_1(\varphi)}{p(\varphi)}. \end{aligned}$$

Повторяя ранее проведенные рассуждения, можно найти, что

$$g^{(0)}(\varphi) = (\sigma_{eqv}^{(0)})^m, \quad g^{(1)}(\varphi) = \frac{m}{2} (\sigma_{eqv}^{(0)})^m \left(\frac{\sigma_{eqv}^{(1)}}{\sigma_{eqv}^{(0)}} + g^{(0)} \right). \quad (4.39)$$

Поэтому в следующем линейном обыкновенном дифференциальном уравнении относительно функции $f^{(1)}(\varphi)$ функция $g(0)$ — известная функция, наряду с определенной функцией $f^{(0)}(\varphi)$:

$$\begin{aligned} (f^{(1)})^{IV} L(\varphi) = & 3[s(n+m)+1](n-1)K(\varphi) \left[(1-\lambda_1)(f^{(1)})' + C(\varphi) \right] / h^2 - \\ & - [s(n+m)+1]s(n+m) \left[\lambda_1(2\lambda_1-3)f^{(1)} - (f^{(1)})'' + B(\varphi) \right] / 2 - \\ & - \left[(n-1)(n-3)(K(\varphi)/h^2)^2 + (n-1)K'(\varphi)/h^2 - s(n+m) \right] \times \\ & \times \left[\lambda_1(3-\lambda_1)f^{(1)} + 2(f^{(1)})'' + A(\varphi) \right] / 2 - \\ & - (n-1)K(\varphi) \left[\lambda_1(3-\lambda_1)(f^{(1)})' + 2(f^{(1)})''' + A'(\varphi) \right] / h^2 + \\ & + 3[s(n+m)+1](1-\lambda_1)(f^{(1)})'' + C'(\varphi) - \\ & - \left[\lambda_1(3-\lambda_1)(f^{(1)})'' + H(\varphi) \right] / 2, \end{aligned} \quad (4.40)$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned} L(\varphi) = & 1 + (n-1) \left[\lambda(3-\lambda)f^{(0)} + 2(f^{(0)})'' \right]^2 / (4h^2), \\ A(\varphi) = & \omega_1(\varphi) \left[\lambda(3-\lambda)f^{(0)} + 2(f^{(0)})'' \right], \\ B(\varphi) = & \omega_1(\varphi) \left[\lambda(2\lambda-3)f^{(0)} - (f^{(0)})'' \right], \\ C(\varphi) = & \omega_1(\varphi)(1-\lambda)(f^{(0)})', \\ H(\varphi) = & G(\varphi) \left[\lambda(3-\lambda)f^{(0)} + 2(f^{(0)})'' \right] + \\ & + 2\omega_1' \left[\lambda(3-\lambda)(f^{(0)})' + 2(f^{(0)})''' \right] + \\ & + \omega_1 \left[\lambda(3-\lambda)(f^{(0)})'' + 2(f^{(0)})^{IV} \right], \\ G(\varphi) = & E(\varphi) + (n-1)D(\varphi)/h^2, \\ E(\varphi) = & (n-1) \left[8h_1(\varphi)K^2/h^6 - 4h_1'K/h^4 - 2h_1K'/h^4 \right] + n(g^{(0)})'', \\ D(\varphi) = & \lambda_1 \left(\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'' \right) (f^{(1)})'' + \\ & + \left(\lambda(f^{(0)})'' + (f^{(0)})^{IV} \right) (\lambda_1 f^{(1)} + (f^{(0)})'') + \\ & + \left(\lambda(f^{(0)})' + (f^{(0)})''' \right) (\lambda_1 (f^{(1)})' + (f^{(0)})''') + \\ & + \lambda\lambda_1(\lambda-1)(\lambda_1-1) \left[(f^{(0)})'' f^{(1)} + 2(f^{(0)})' (f^{(1)})' + f^{(0)} (f^{(1)})'' \right] - \\ & - \lambda_1(\lambda_1-1)f^{(1)} \left(\lambda(f^{(0)})'' + (f^{(0)})^{IV} \right) / 2 - \lambda\lambda_1(\lambda-1)f^{(0)} (f^{(1)})' / 2 + \\ & + 3(\lambda-1)(\lambda_1-1) \left[(f^{(0)})''' (f^{(1)})' + 2(f^{(0)})'' (f^{(1)})'' + (f^{(0)})' (f^{(1)})''' \right] - \\ & - \lambda_1(\lambda_1-1) \left[(f^{(1)})' (\lambda(f^{(0)})' + (f^{(0)})''') + (f^{(1)})'' (\lambda f^{(0)} + (f^{(0)})'') / 2 \right] - \\ & - \lambda(\lambda-1) \left[(f^{(0)})' (\lambda_1 (f^{(1)})' + (f^{(1)})''') + (f^{(0)})'' (\lambda_1 f^{(1)} + (f^{(1)})'') / 2 \right], \end{aligned}$$

здесь функции $g^{(0)}$, $f^{(0)}$ известны. Далее уравнение (4.40) исследуется численно с учетом граничных условий на верхнем берегу трещины

$$f^{(1)}(\varphi = \pi) = 0, \quad (f^{(1)})'(\varphi = \pi) = 0, \quad (4.41)$$

и на ее продолжении

$$(f^{(1)})'(\varphi = 0) = 0, \quad (f^{(1)})'''(\varphi = 0) = 0. \quad (4.42)$$

Для реализации метода Рунге—Кутты—Фельберга необходимо сформулировать следующие начальные условия при $\varphi = 0$:

$$f^{(1)}(\varphi = 0) = A_2, \quad (f^{(1)})'(\varphi = 0) = 0, \quad (4.43)$$

$$(f^{(1)})''(\varphi = 0) = A_3, \quad (f^{(1)})'''(\varphi = 0) = 0.$$

Постоянные A_2 и A_3 находятся из требования выполнения граничных условий (4.41). После определения функции $f^{(1)}(\varphi)$, а следовательно и $\sigma_{eqv}^{(1)}$, можно найти функцию $g^{(1)}(\varphi)$, используя второе уравнение из системы равенств (4.39). Таким образом, конфигурация области полностью поврежденного материала определяется посредством соотношений

$$\psi = 1 - R^{sm} g^{(0)}(\varphi) = 0,$$

$$\psi = 1 - R^{sm} g^{(0)}(\varphi) - R^{2sm} g^{(1)}(\varphi) = 0,$$

или

$$R(\varphi) = (g^{(0)}(\varphi))^{-1/(sm)}, \quad (4.44)$$

$$R(\varphi) = \left(\frac{g^{(0)}(\varphi) + \sqrt{(g^{(0)}(\varphi))^2 + 4g^{(1)}(\varphi)}}{2} \right)^{-1/(sm)}, \quad (4.45)$$

причем первая зависимость вновь позволяет найти область полностью поврежденного материала, определяемую двучленным асимптотическим разложением параметра сплошности, тогда как второе равенство позволяет найти форму области полностью поврежденного материала, определяемую трехчленным асимптотическим разложением параметра сплошности.

Собственные числа s , значения $(f^{(0)})''(0)$, $f^{(1)}(0)$ и $(f^{(1)})''(0)$ в случае плоского напряженного состояния, полученные в результате численного анализа, приведены в табл. 2.

На рис. 8–12 приведены конфигурации областей полностью поврежденного материала, полученные с помощью двучленного (кривая, отмеченная цифрой 1) и трехчленного асимптотических разложений (кривая, отмеченная цифрой 2) параметра сплошности соответственно. Очевидно, что формы областей, полученных с помощью двучленного и трехчленного разложений, близки, а также характерные линейные размеры областей отличаются несущественно.

На рис. 13–15 приведены конфигурации областей полностью поврежденного материала, полученные для случая, когда граничное условие в бесконечно удаленной точке формулируется как требование асимптотического

Таблица 2
Собственные числа s , значения $(f^{(0)})''(0)$, $f^{(1)}(0)$ и $(f^{(1)})''(0)$
в случае плоского напряженного состояния

n	s	$(f^{(0)})''(0)$	$f^{(1)}(0)$	$(f^{(1)})''(0)$
3	-1,0	-0,5	0,025	-0,0025
4	-0,913383	-0,465842	0,0171	-0,007
5	-0,858016	-0,442866	0,01172	-0,001
6	-0,819798	-0,426159	0,0084	-0,001
7	-0,7919591	-0,413462	0,006227	-0,00971
8	-0,770842	-0,403501	0,004738	-0,0089
9	-0,754321	-0,395546	0,00368	-0,00801

сближения с решением HRR. Очевидно, что характерный линейный размер области полностью поврежденного материала, соответствующий конфигурациям, построенным с помощью двучленного и трехчленного асимптотического разложения параметра сплошности соответственно, существенно различаются (в качестве характерного линейного размера можно принять протяженность области по линии, продолжающей трещину). Следовательно, граничное условие в бесконечно удаленной точке не может быть сформулировано как условие сближения с решением HRR.

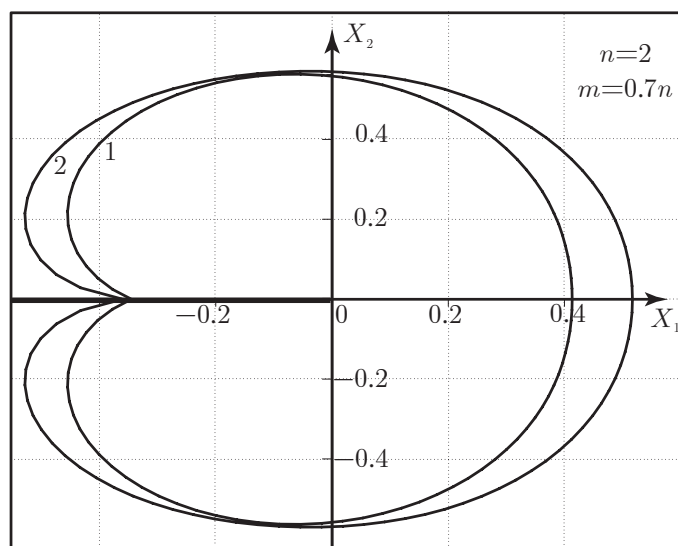


Рис. 8. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 2$ и $m = 0,7n$

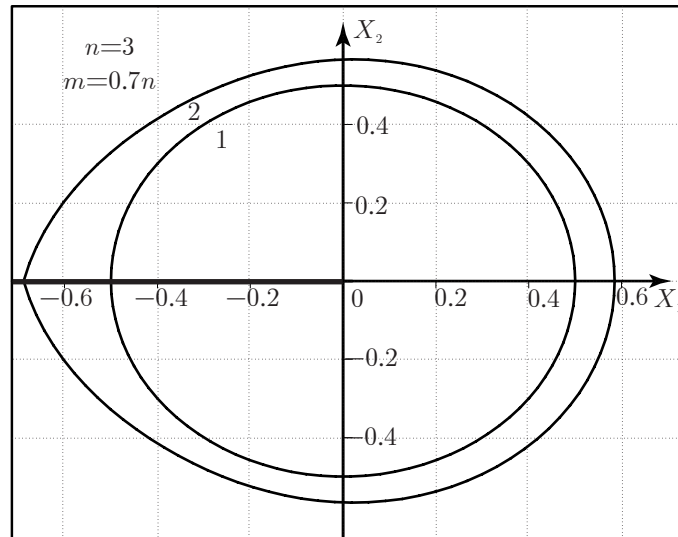


Рис. 9. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 3$ и $m = 0,7n$

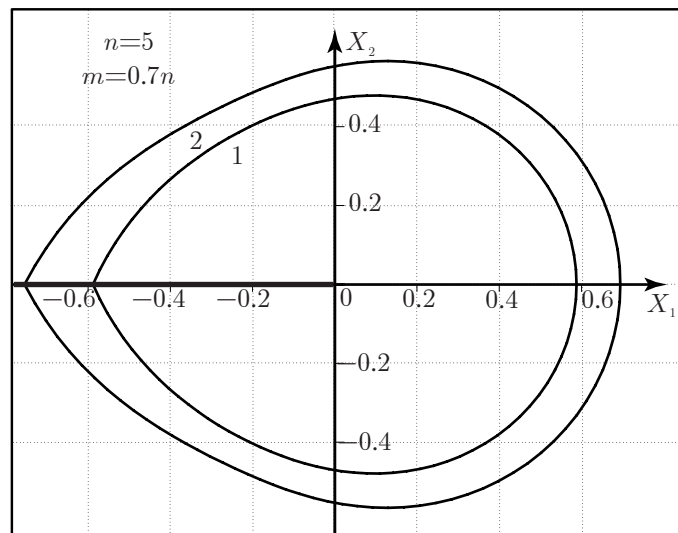


Рис. 10. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 5$ и $m = 0,7n$

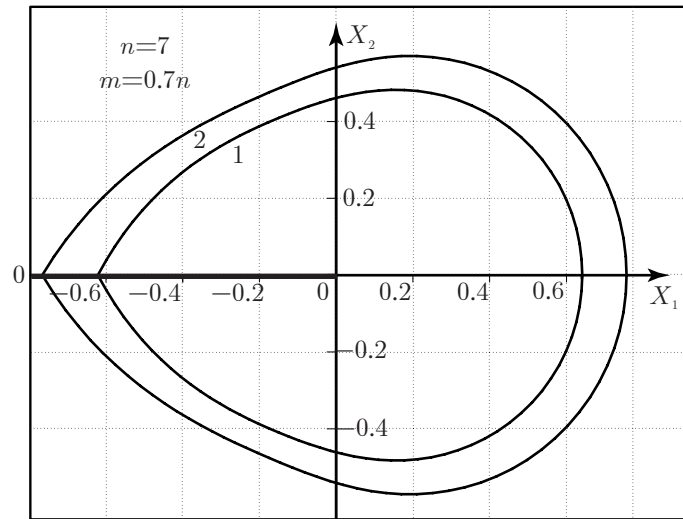


Рис. 11. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 7$ и $m = 0,7n$

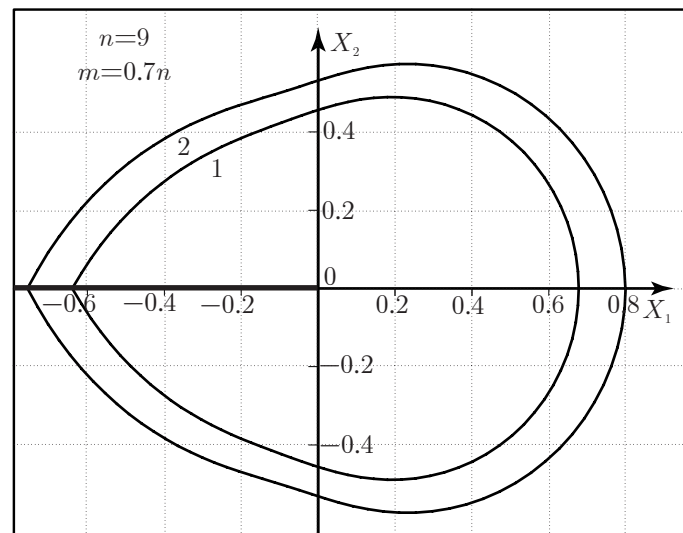


Рис. 12. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 9$ и $m = 0,7n$

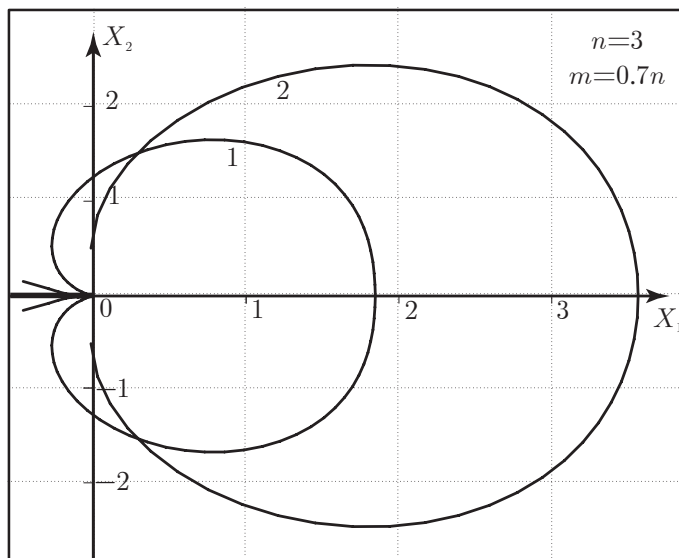


Рис. 13. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 3$ и $m = 0,7n$

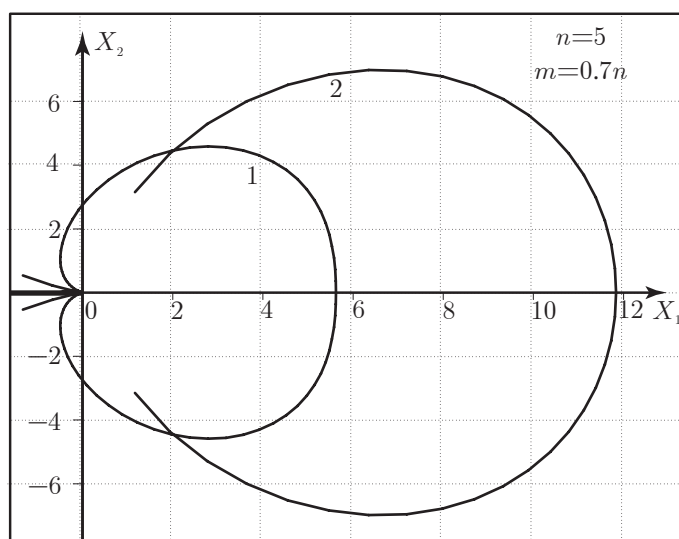


Рис. 14. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 5$ и $m = 0,7n$

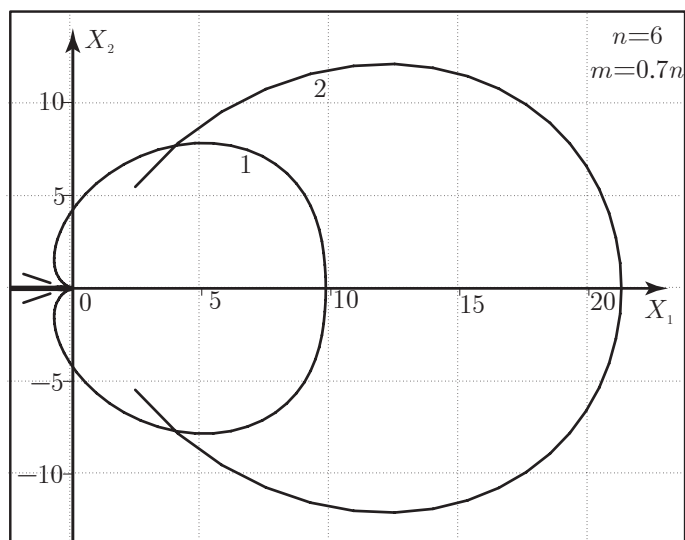


Рис. 15. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 6$ и $m = 0,7n$

Выводы

1. Приведено асимптотическое исследование дальнего поля напряжений и поля повреждений в задаче о стационарной трещине нормального отрыва в материале, определяющие соотношения которого построены на основе степенного закона установившейся ползучести, в рамках связанной постановки задачи в связке ползучесть–поврежденность.

2. Решение задачи получено с помощью автомодельной переменной, предложенной ранее Риделем. Показано, что автомодельная переменная может быть введена и для случая более общих граничных условий в бесконечно удаленной точке.

3. Установлено, что в окрестности вершины трещины существует область полностью поврежденного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности равны нулю. Найдена конфигурация данной области для различных значений констант материала и кинетического уравнения.

4. Найдена новая асимптотика дальнего поля напряжений (отличная от асимптотики Хатчинсона–Райса–Розенгрена), в действительности "управляющая" геометрией области полностью поврежденного материала.

Литература

- [1] Riedel H. Fracture at high temperature. Berlin: Springer, 1987. 418 p.
- [2] Hutchinson J.W. Singular behavior at the end of tensile crack in a hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 13–31.

- [3] Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 1–12.
- [4] Степанова Л.В., Федина М.Е. О геометрии области полностью поврежденного материала у вершины трещины антиплоского сдвига в связанной постановке задачи (связка "ползучесть–поврежденность") // Вестник СамГУ. 2001. №2(20). С. 87–113.
- [5] Степанова Л.В., Федина М.Е. Автомодельное решение задачи о трещине антиплоского сдвига в связанной (ползучесть–поврежденность) постановке // ПМТФ. 2002. Т. 43. № 5. С. 114–123.
- [6] Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. С. 26–31.
- [7] Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения / Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.
- [8] Астафьев В.И., Григорова Т.В., Пастухов В.А. Влияние поврежденности материала на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины при ползучести // ФХММ. 1992. Т. 28. №1. С. 5–11.
- [9] Астафьев В.И., Григорова Т.В. Распределение напряжений и поврежденности у вершины растущей в процессе ползучести трещины // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. №3. С. 160–166.
- [10] Murakami S., Hirano T., Liu Y. Asymptotic fields of stress and damage of a mode I creep crack in steady-state growth // Int. J. Solids Structures. 2000. V. 37. No. 43. P. 6203–6220.
- [11] Murakami S., Liu Y., Miruno M. Computational methods for creep fracture analyses by damage mechanics // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2000. V. 183. No. 1–2. P. 15–33.
- [12] Jin Z.H., Batra R.C. Crack shielding and material deterioration in damage materials: an antiplane shear fracture problem // Arch. Appl. Mech. 1998. No. 68. P. 247–258.
- [13] Zhao J., Zhang X. The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics // Engn. Fracture Mechanics. 1995. V. 50. No. 1. P. 131–141.
- [14] Zhao J., Zhang X. On the process zone of a quasi-static growing tensile crack with power-law elastic-plastic damage // Int. J. of Fracture. 2001. V. 108. P. 383–395.
- [15] Mahmoud K.M., Kassir M.K. Damage field ahead of a tensile crack in an elastic-plastic and viscoplastic material // Int. J. of Fracture. 1999. V. 96. P. 149–165.
- [16] Mou Y., Han R.P.S. Influence of damage in the vicinity of a macrocrack tip // Engn. Fracture Mechanics. 1996. V. 55. No. 4. P. 617–632.

Поступила в редакцию 22/VII/2004;
в окончательном варианте — 22/VII/2004.

SELF-SIMILAR SOLUTION FOR A MODE I CRACK PROBLEM IN CREEPING DAMAGED MATERIALS IN THE COUPLED (CREEP–DAMAGE) FORMULATION⁵

© 2005 L.V. Stepanova,⁶ M.E. Phedina,⁷ N.A. Kurnysheva⁸

To evaluate mechanical behaviour near a Mode I crack tip the governing equations are formulated within the framework of Continuum Damage Mechanics. The asymptotic stress and integrity fields near the tip of a stationary crack are derived for non-linear creeping damaged materials deforming according to the creep power constitutive law. The conventional Kachanov–Rabotnov creep-damage theory is utilized and the scalar integrity parameter is incorporated into the constitutive equations.

Stress analysis based on the similarity variable is carried out for Mode I crack under plane stress and plane strain conditions assuming the existence of a totally damaged zone near the crack tip. It is found that the Hutchinson–Rice–Rosengren solution can't be used as the remote boundary condition and the actual far field stress is obtained. The shape of the totally damaged zone is analyzed.

Paper received 22/VII/2004.

Paper accepted — 22/VII/2004.

⁵Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. V.I. Astafjev.

⁶Stepanova Larisa Valentinovna (1st@ssu.samara.ru), Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.

⁷Phedina Maria Efimovna (phedina@ssu.samara.ru), Dept. of Security of Information Systems, Samara State University, Samara, 443011, Russia.

⁸Kurnysheva Natalja Alexandrovna (kurnysheva@ssu.samara.ru), Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.