УДК 539.374

# ГРУППЫ СИММЕТРИЙ И АЛГЕБРА СИММЕТРИЙ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

© 2005 Ю.Н. Радаев, В.А. Гудков, Ю.Н. Бахарева[1]

В работе дан групповой анализ нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных, представляющей интерес с точки зрения анализа пространственного напряженного состояния пластического тела. Предполагается, что текучесть описывается критерием Треска и соответствует ребру призмы Треска. Система уравнений сформулирована относительно изостатической координатной сетки. Вычислены группы симметрий этой системы дифференциальных уравнений и алгебра симметрий и найдены одномерные оптимальные подалгебры указанной алгебры симметрий.

## 1. Постановка задачи и основные уравнения

Настоящая работа посвящена построению непрерывных групп симметрий трехмерных уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности с критерием текучести Треска, сформулированных в изостатической системе координат, и исследованию соответствующей алгебры симметрий. Вывод уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Треска, в координатной сетке линий главных напряжений приведен в работе [1] (см. также [2, 3]; в последней из указанных работ читатель может найти сравнительно полную библиографию по рассматриваемой проблематике). Группы симметрий уравнений осесимметричной задачи, представленных в сетке линий главных нормальных напряжений, вычислены в [4]. В этой работе был получен наиболее общий вид инфинитезимального оператора группы симметрий системы дифференциальных уравнений в частных производных осесимметричной задачи. Как выяснилось, он зависит от пяти произвольных

[1]Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru), Гудков Василий Александрович (goodkov@ssu.samara.ru), Бахарева Юлия Николаевна (bahareva@ssu.samara.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

постоянных. В статье [5] исследована алгебра симметрий системы уравнений осесимметричной задачи теории пластичности. Там же построена оптимальная система одномерных подалгебр указанной алгебры симметрий и определены соответствующие инвариантно-групповые решения системы дифференциальных уравнений в частных производных осесимметричной задачи. Автомодельные решения уравнений осесимметричной задачи теории пластичности получены в [6, 7].

Общий групповой анализ пространственных уравнений теории идеальной пластичности на ребре призмы Треска, представленных в декартовых координатах, дан в [8, с. 73–77]. Там же приводятся инвариантные и частично-инвариантные решения трехмерных уравнений. Групповой анализ уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности в изостатических координатах ранее, по-видимому, не проводился.

Методы группового анализа применительно к системам дифференциальных уравнений в частных производных изложены в классических монографиях [9, 10][2].

Для ребра призмы Треска, определяемого условием $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$ ($\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ — главные нормальные напряжения; $k$ — предел текучести при сдвиге), уравнения равновесия можно представить в форме одного векторного уравнения (см. [3])

$$\mathrm{grad}\sigma_3 \mp 2k\mathrm{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0}, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{n}$ — единичное векторное поле, имеющее направление главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему (наименьшему) собственному значению $\sigma_3$ тензора напряжений. Векторное уравнение (1.1) является квазилинейным и принадлежит к гиперболическому типу.

Ключевым для анализа уравнения (1.1) выступает условие расслоенности векторного поля $\mathbf{n}$ в зоне пластического течения.

Для разрешимости уравнения (1.1) необходима расслоенность векторного поля $\mathbf{n}$, т.е. $\mathbf{n} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{n} = 0$, а с расслоенным полем естественным образом связано каноническое преобразование координат (см. [3])

$$x_i = f_i(\omega^1, \omega^2, \omega^3) \quad (i = 1, 2, 3), \tag{1.2}$$

где $x_i$ — пространственные декартовы координаты, $\omega^j$ — канонические изостатические координаты, причем поверхности $\omega^3 = \mathrm{const}$ являются слоями векторного поля $\mathbf{n}$.

Отображающие функции $f_i$ должны удовлетворять следующей нелинейной системе уравнений в частных производных:

---

[2]Весьма доступное изложение теории групп Ли читатель может найти в книге: Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. С. 139–198.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial f_1}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f_1}{\partial\omega^3}+\dfrac{\partial f_2}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f_2}{\partial\omega^3}+\dfrac{\partial f_3}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f_3}{\partial\omega^3}=0,\\
\dfrac{\partial f_1}{\partial\omega^2}\dfrac{\partial f_1}{\partial\omega^3}+\dfrac{\partial f_2}{\partial\omega^2}\dfrac{\partial f_2}{\partial\omega^3}+\dfrac{\partial f_3}{\partial\omega^2}\dfrac{\partial f_3}{\partial\omega^3}=0,\\
\left(\dfrac{\partial f_2}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f_3}{\partial\omega^2}-\dfrac{\partial f_3}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f_2}{\partial\omega^2}\right)\dfrac{\partial f_1}{\partial\omega^3}+\left(\dfrac{\partial f_3}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f_1}{\partial\omega^2}-\dfrac{\partial f_1}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f_3}{\partial\omega^2}\right)\dfrac{\partial f_2}{\partial\omega^3}+\\
\qquad\qquad+\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f_2}{\partial\omega^2}-\dfrac{\partial f_2}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f_1}{\partial\omega^2}\right)\dfrac{\partial f_3}{\partial\omega^3}=\pm 1.
\end{cases}
\tag{1.3}
$$

Поставим задачу об отыскании непрерывных групп преобразований, относительно которых система дифференциальных уравнений в частных производных (1.3) будет инвариантной. Такие группы будут являться также группами симметрий этой системы. Полная группа симметрий данной системы дифференциальных уравнений — наибольшая группа преобразований, действующая на зависимые и независимые переменные и обладающая свойством переводить решения системы в другие ее решения.

Левые части системы дифференциальных уравнений в частных производных (1.3) обозначим соответственно через $\mathrm{E}_1$, $\mathrm{E}_2$ и $\mathrm{E}_3$. При этом мы считаем, что отличное от нуля слагаемое в правой части третьего уравнения рассматриваемой системы перенесено в левую часть.

## 2. Вычисление групп симметрий системы пространственных уравнений теории пластичности

Для решения поставленной задачи (основополагающие понятия и методы приводятся в известной монографии [9]) рассмотрим непрерывную однопараметрическую группу (группу Ли) преобразования зависимых и независимых переменных:

$$
\begin{aligned}
&\tilde\omega^1=\tilde\omega^1(\omega^1,\omega^2,\omega^3,f_1,f_2,f_3,\varepsilon)=\omega^1+\varepsilon\Xi^1(\omega^1,\omega^2,\omega^3,f_1,f_2,f_3)+\dots,\\
&\tilde\omega^2=\tilde\omega^2(\omega^1,\omega^2,\omega^3,f_1,f_2,f_3,\varepsilon)=\omega^2+\varepsilon\Xi^2(\omega^1,\omega^2,\omega^3,f_1,f_2,f_3)+\dots,\\
&\tilde\omega^1=\tilde\omega^1(\omega^1,\omega^2,\omega^3,f_1,f_2,f_3,\varepsilon)=\omega^1+\varepsilon\Xi^3(\omega^1,\omega^2,\omega^3,f_1,f_2,f_3)+\dots,\\
&\tilde f_1=\tilde f_1(\omega^1,\omega^2,\omega^3,f_1,f_2,f_3,\varepsilon)=f_1+\varepsilon\mathrm{H}^1(\omega^1,\omega^2,\omega^3,f_1,f_2,f_3)+\dots,\\
&\tilde f_2=\tilde f_2(\omega^1,\omega^2,\omega^3,f_1,f_2,f_3,\varepsilon)=f_2+\varepsilon\mathrm{H}^2(\omega^1,\omega^2,\omega^3,f_1,f_2,f_3)+\dots,\\
&\tilde f_3=\tilde f_3(\omega^1,\omega^2,\omega^3,f_1,f_2,f_3,\varepsilon)=f_3+\varepsilon\mathrm{H}^3(\omega^1,\omega^2,\omega^3,f_1,f_2,f_3)+\dots,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где $\varepsilon$ — параметр группы преобразований.

Группа преобразований индуцирует касательное векторное поле, которое определяется компонентами

$$
\begin{aligned}
\varsigma=(&\Xi^1(\omega^1,\omega^2,\omega^3,f_1,f_2,f_3),\ \Xi^2(\omega^1,\omega^2,\omega^3,f_1,f_2,f_3),\\
&\Xi^3(\omega^1,\omega^2,\omega^3,f_1,f_2,f_3),\ \mathrm{H}^1(\omega^1,\omega^2,\omega^3,f_1,f_2,f_3),\\
&\mathrm{H}^2(\omega^1,\omega^2,\omega^3,f_1,f_2,f_3),\ \mathrm{H}^3(\omega^1,\omega^2,\omega^3,f_1,f_2,f_3)).
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Составим инфинитезимальный оператор группы преобразований (2.1)

$$\varsigma\cdot\partial = \Xi^1\frac{\partial}{\partial\omega^1} + \Xi^2\frac{\partial}{\partial\omega^2} + \Xi^3\frac{\partial}{\partial\omega^3} + \mathrm{H}^1\frac{\partial}{\partial f_1} + \mathrm{H}^2\frac{\partial}{\partial f_2} + \mathrm{H}^3\frac{\partial}{\partial f_3}, \tag{2.3}$$

где функции $\Xi^1$, $\Xi^2$, $\Xi^3$, $\mathrm{H}^1$, $\mathrm{H}^2$, $\mathrm{H}^3$ зависят от переменных $\omega^1$, $\omega^2$, $\omega^3$, $f_1$, $f_2$, $f_3$.

Рассмотрим далее один раз продолженную группу и ее касательное векторное поле $\underset{1}{\varsigma}$. Инфинитезимальный оператор продолженной группы имеет вид

$$\begin{aligned}\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial = \Xi^1\frac{\partial}{\partial\omega^1} + \Xi^2\frac{\partial}{\partial\omega^2} + \Xi^3\frac{\partial}{\partial\omega^3} + \mathrm{H}^1\frac{\partial}{\partial f_1} + \mathrm{H}^2\frac{\partial}{\partial f_2} + \mathrm{H}^3\frac{\partial}{\partial f_3} +\\ + \mathrm{H}^1_1\frac{\partial}{\partial p^1_1} + \mathrm{H}^1_2\frac{\partial}{\partial p^1_2} + \mathrm{H}^1_3\frac{\partial}{\partial p^1_3} + \mathrm{H}^2_1\frac{\partial}{\partial p^2_1} + \mathrm{H}^2_2\frac{\partial}{\partial p^2_2} +\\ + \mathrm{H}^2_3\frac{\partial}{\partial p^2_3} + \mathrm{H}^3_1\frac{\partial}{\partial p^3_1} + \mathrm{H}^3_2\frac{\partial}{\partial p^3_2} + \mathrm{H}^3_3\frac{\partial}{\partial p^3_3},\end{aligned} \tag{2.4}$$

где через $p^i_j$ обозначены частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial\omega^j}$, а $\mathrm{H}^l_j$ выражаются согласно формулам первого продолжения [9, с. 58]

$$\mathrm{H}^l_j = \frac{\partial\mathrm{H}^l}{\partial\omega^j} + \frac{\partial f_s}{\partial\omega^j}\frac{\partial\mathrm{H}^l}{\partial f_s} - \frac{\partial f_l}{\partial\omega^s}\left(\frac{\partial\Xi^s}{\partial\omega^j} + \frac{\partial f_r}{\partial\omega^j}\frac{\partial\Xi^s}{\partial f_r}\right) \qquad (l, j = 1, 2, 3). \tag{2.5}$$

Инфинитезимальный оператор один раз продолженной группы, относительно которой уравнения (1.3) инвариантны, обладает тем свойством, что если его применить к указанным дифференциальным уравнениям и поставить условия, что сами уравнения выполняются (т.е. $\mathrm{E}_i = 0$), то должны получаться тождественно нулевые выражения (т.е. должны тождественно выполняться равенства $(\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial)\mathrm{E}_i = 0$). Этим свойством пользуются для нахождения инфинитезимального оператора и группы инвариантности системы дифференциальных уравнений в частных производных.

Применим инфинитезимальный оператор один раз продолженной группы $\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial$ к левым частям системы дифференциальных уравнений в частных производных (1.3):

$$(\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial)\mathrm{E}_1 = \mathrm{H}^1_1 p^1_3 + \mathrm{H}^1_3 p^1_1 + \mathrm{H}^2_1 p^2_3 + \mathrm{H}^2_3 p^2_1 + \mathrm{H}^3_1 p^3_3 + \mathrm{H}^3_3 p^3_1, \tag{2.6}$$

$$(\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial)\mathrm{E}_2 = \mathrm{H}^1_2 p^1_3 + \mathrm{H}^1_3 p^1_2 + \mathrm{H}^2_2 p^2_3 + \mathrm{H}^2_3 p^2_2 + \mathrm{H}^3_2 p^3_3 + \mathrm{H}^3_3 p^3_2, \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}(\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial)\mathrm{E}_3 = {}&\mathrm{H}^2_1 p^3_2 p^1_3 - \mathrm{H}^3_1 p^2_2 p^1_3 + \mathrm{H}^3_1 p^1_2 p^2_3 - \mathrm{H}^1_1 p^3_2 p^2_3 + \mathrm{H}^1_1 p^2_2 p^3_3 - \mathrm{H}^2_1 p^1_2 p^3_3 +\\ &+ \mathrm{H}^3_2 p^2_1 p^1_3 - \mathrm{H}^2_2 p^3_1 p^1_3 + \mathrm{H}^1_2 p^3_1 p^2_3 - \mathrm{H}^3_2 p^1_1 p^2_3 + \mathrm{H}^2_2 p^1_1 p^3_3 - \mathrm{H}^1_2 p^2_1 p^3_3 +\\ &+ \mathrm{H}^1_3 p^2_1 p^3_2 - \mathrm{H}^1_3 p^3_1 p^2_2 + \mathrm{H}^2_3 p^3_1 p^1_2 - \mathrm{H}^2_3 p^1_1 p^3_2 + \mathrm{H}^3_3 p^1_1 p^2_2 - \mathrm{H}^3_3 p^2_1 p^1_2.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Преобразуем затем полученные выражения, используя формулы (2.5) для величин $\mathrm{H}^l_j$. Преобразования подобного вида по причине значительного объема вычислительной работы выполняются с помощью пакета символьных вычислений Maple V. Здесь мы также опускаем запись преобразованных форм (2.6), (2.7) и (2.8).

Найдем условия, при которых тождественно выполняются равенства

$$(\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial)\mathrm{E}_i = 0,$$

если выполнены

$$\mathrm{E}_i = 0.$$

Рассмотрим систему уравнений (1.3) (т.е. $\mathrm{E}_i = 0$) как систему линейных уравнений относительно частных производных по переменной $\omega^3$

$$\frac{\partial f_1}{\partial\omega^3},\quad \frac{\partial f_2}{\partial\omega^3},\quad \frac{\partial f_3}{\partial\omega^3},$$

разрешая которую получим следующую нормальную по переменной $\omega^3$ форму Коши:

$$\begin{aligned} p_3^1 &= \frac{\partial f_1}{\partial\omega^3} = \frac{p_1^2 p_2^3 - p_1^3 p_2^2}{\Delta},\\ p_3^2 &= \frac{\partial f_2}{\partial\omega^3} = \frac{p_1^3 p_2^1 - p_1^1 p_2^3}{\Delta},\\ p_3^3 &= \frac{\partial f_3}{\partial\omega^3} = \frac{p_1^1 p_2^2 - p_1^2 p_2^1}{\Delta}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta = (p_1^2 p_2^3)^2 + (p_1^3 p_2^2)^2 + (p_1^2 p_2^1)^2 + (p_1^3 p_2^1)^2 + (p_1^1 p_2^2)^2 + (p_1^1 p_2^3)^2 - \\ -2p_1^2 p_2^3 p_1^3 p_2^2 - 2p_1^2 p_2^1 p_1^1 p_2^2 - 2p_1^3 p_2^1 p_1^1 p_2^3. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Заметим, что система уравнений (1.3) не имеет нормальной формы ни по переменной $\omega^1$, ни по переменной $\omega^2$.

Подставляя (2.9) в (2.6), (2.7), (2.8) и приводя все слагаемые к общему знаменателю, найдем такую форму условий $(\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial)\mathrm{E}_i = 0$, в которой уже учтены условия $\mathrm{E}_i = 0$. Эта форма сводится к равенствам нулю числителей в выражениях $(\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial)\mathrm{E}_i = 0$. Указанные числители являются степенными многочленами от производных

$$p_1^1,\ p_1^2,\ p_1^3,\ p_2^1,\ p_2^2,\ p_2^3$$

а сами эти производные — свободными переменными для этих степенных многочленов.

Условия $(\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial)\mathrm{E}_i = 0$, таким образом, расщепляются на ряд уравнений, получающихся приравниванием нулю коэффициентов трех степенных многочленов от свободных частных производных, перечисленных выше. Производя вычисления с помощью пакета символьных вычислений Maple V, находим, что все существенные уравнения, обеспечивающие тождественное выполнение $(\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial)\mathrm{E}_i = 0$, если выполнены $\mathrm{E}_i = 0$, есть

$$
\begin{aligned}
&3\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f_1}-\frac{\partial \Xi^1}{\partial \omega^1}-\frac{\partial \Xi^2}{\partial \omega^2}-\frac{\partial \Xi^3}{\partial \omega^3}=0, \quad \frac{\partial \mathrm{H}^3}{\partial f_3}=\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f_1}, \quad \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f_2}=\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f_1},\\
&\frac{\partial \mathrm{H}^3}{\partial f_2}+\frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f_3}=0, \quad \frac{\partial \mathrm{H}^3}{\partial f_1}+\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f_3}=0, \quad \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f_1}+\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f_2}=0,\\
&\frac{\partial \Xi^1}{\partial \omega^3}=\frac{\partial \Xi^1}{\partial f^1}=\frac{\partial \Xi^1}{\partial f^2}=\frac{\partial \Xi^1}{\partial f^3}=0,\\
&\frac{\partial \Xi^2}{\partial \omega^3}=\frac{\partial \Xi^2}{\partial f^1}=\frac{\partial \Xi^2}{\partial f^2}=\frac{\partial \Xi^2}{\partial f^3}=0,\\
&\frac{\partial \Xi^3}{\partial \omega^1}=\frac{\partial \Xi^3}{\partial \omega^2}=\frac{\partial \Xi^3}{\partial f^1}=\frac{\partial \Xi^3}{\partial f^2}=\frac{\partial \Xi^3}{\partial f^3}=0,\\
&\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial \omega^1}=\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial \omega^2}=\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial \omega^3}=0,\\
&\frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial \omega^1}=\frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial \omega^2}=\frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial \omega^3}=0,\\
&\frac{\partial \mathrm{H}^3}{\partial \omega^1}=\frac{\partial \mathrm{H}^3}{\partial \omega^2}=\frac{\partial \mathrm{H}^3}{\partial \omega^3}=0.
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

Это, так называемые, определяющие уравнения полной группы непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений в частных производных (1.3). Ниже мы увидим, что их анализ не представляет сколько-нибудь серьезных трудностей.

Из последних шести строк в (2.11) следует, что касательное векторное поле $\varsigma$ имеет компоненты, зависимость которых от преобразуемых под действием группы переменных выражается как

$$
\begin{aligned}
&\Xi^1(\omega^1,\omega^2), \quad \Xi^2(\omega^1,\omega^2), \quad \Xi^3(\omega^3),\\
&\mathrm{H}^1(f_1,f_2,f_3), \quad \mathrm{H}^2(f_1,f_2,f_3), \quad \mathrm{H}^3(f_1,f_2,f_3).
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

Учитывая это, получим, что для координат касательного векторного поля $\varsigma$ остается только шесть не тождественно удовлетворяющихся уравнений, которые расположены в первых двух строках в (2.11).

Анализ трех уравнений в первой строке в (2.11) совместно с (2.12) позволяет заключить, что

$$
\frac{\partial \mathrm{H}^3}{\partial f_3}=\frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f_2}=\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f_1}=C_1, \quad \frac{\partial \Xi^3}{\partial \omega^3}=C_2', \tag{2.13}
$$

а также

$$
\frac{\partial \Xi^1}{\partial \omega^1}+\frac{\partial \Xi^2}{\partial \omega^2}=3C_1-C_2'. \tag{2.14}
$$

Здесь $C_1$, $C_2'$ есть произвольные постоянные.

На основании (2.13) получим равенства

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}^1&=C_1f_1+F_1(f_2,f_3),\\
\mathrm{H}^2&=C_1f_2+F_2(f_1,f_3),\\
\mathrm{H}^3&=C_1f_3+F_3(f_1,f_2),
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

подставляя которые в уравнения второй строки в (2.11) находим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_3(f_1,f_2)}{\partial f_2} &= -\frac{\partial F_2(f_1,f_3)}{\partial f_3} = G_1(f_1),\\
\frac{\partial F_3(f_1,f_2)}{\partial f_1} &= -\frac{\partial F_1(f_2,f_3)}{\partial f_3} = G_2(f_2),\\
\frac{\partial F_1(f_2,f_3)}{\partial f_2} &= -\frac{\partial F_2(f_1,f_3)}{\partial f_1} = G_3(f_3),
\end{aligned} \tag{2.16}$$

где вводятся функции $G_i$, зависящие только от соответствующей переменной $f_i$.

Из уравнений (2.16) сразу же можно заключить, что $F_j$ зависит от соответствующей пары переменных максимум квадратично. Например, для $F_1$ из второго уравнения системы (2.16) получим равенство

$$F_1(f_2,f_3) = G_2(f_2)f_3 + G_4(f_2), \tag{2.17}$$

подставляя которое в третье уравнение системы (2.16) приходим к

$$\frac{\partial F_1(f_2,f_3)}{\partial f_2} = \frac{\partial(G_2(f_2)f_3 + G_4(f_2))}{\partial f_2} = G_2'(f_2)f_3 + G_4'(f_2) = G_3(f_3). \tag{2.18}$$

Отсюда без труда получаем, что

$$G_2'(f_2) = C, \quad G_4'(f_2) = A_3, \tag{2.19}$$

и, следовательно,

$$G_2(f_2) = Cf_2 + A_2', \quad G_4(f_2) = A_3f_2 + B_1. \tag{2.20}$$

Таким образом, имеем следующие выражения для функций $F_i$:

$$\begin{aligned}
F_1(f_2,f_3) &= Cf_2f_3 + A_3f_2 + A_2'f_3 + B_1,\\
F_2(f_1,f_3) &= C'f_1f_3 + A_3'f_1 + A_1f_3 + B_2,\\
F_3(f_1,f_2) &= C''f_1f_2 + A_2f_1 + A_1'f_2 + B_3.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Подставляя (2.21) в (2.16), получим

$$C' = -C' = C'' = -C = 0, \quad A_1 = -A_1', \quad A_2 = -A_2', \quad A_3 = -A_3'. \tag{2.22}$$

В итоге, подставив полученные выше выражения для $F_i$ в (2.15), имеем:

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^1 &= C_1f_1 + A_3f_2 - A_2f_3 + B_1,\\
\mathrm{H}^2 &= -A_3f_1 + C_1f_2 + A_1f_3 + B_2,\\
\mathrm{H}^3 &= A_2f_1 - A_1f_2 + C_1f_3 + B_3.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Кроме того, из (2.13) находим также, что

$$\Xi^3 = C_2'\omega^3 + C_3. \tag{2.24}$$

Введем новую функцию $K$ согласно[3]

$$\Xi^1 = (3C_1 - C_2')\omega^1 + K(\omega^1,\omega^2). \tag{2.25}$$

[3]При этом мы нарушаем симметрию в отношении пары переменных $\omega^1$ и $\omega^2$, которые до этого момента входили во все соотношения симметрично. Этого можно избежать, вводя соответствующие замены не только для $\Xi^1$, но и для $\Xi^2$.

Тогда уравнение (2.14) приводится к виду

$$\frac{\partial K}{\partial \omega^1} + \frac{\partial \Xi^2}{\partial \omega^2} = 0, \tag{2.26}$$

и, следовательно, функции $\Xi^2$ и $K$ можно выразить через новую потенциальную функцию $L = L(\omega^1, \omega^2)$:

$$K = \frac{\partial L(\omega^1, \omega^2)}{\partial \omega^2}, \quad \Xi^2 = -\frac{\partial L(\omega^1, \omega^2)}{\partial \omega^1}. \tag{2.27}$$

Вводя произвольную постоянную согласно

$$C_2 = 3C_1 - C_2', \tag{2.28}$$

получим, что инфинитезимальный оператор полной группы непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (1.3) может иметь только следующую форму:

$$\begin{aligned}(\varsigma \cdot \partial) = &\left(C_2\omega^1 + \frac{\partial L(\omega^1, \omega^2)}{\partial \omega^2}\right)\frac{\partial}{\partial \omega^1} - \frac{\partial L(\omega^1, \omega^2)}{\partial \omega^1}\frac{\partial}{\partial \omega^2} + \\ &+((3C_1 - C_2)\omega^3 + C_3)\frac{\partial}{\partial \omega^3} + (C_1 f_1 + A_3 f_2 - A_2 f_3 + B_1)\frac{\partial}{\partial f_1} + \\ &+(-A_3 f_1 + C_1 f_2 + A_1 f_3 + B_2)\frac{\partial}{\partial f_2} + (A_2 f_1 - A_1 f_2 + C_1 f_3 + B_3)\frac{\partial}{\partial f_3}\end{aligned} \tag{2.29}$$

или в более удобном виде

$$\begin{aligned}(\varsigma \cdot \partial) = &C_1(3\omega^3\frac{\partial}{\partial \omega^3} + f_1\frac{\partial}{\partial f_1} + f_2\frac{\partial}{\partial f_2} + f_3\frac{\partial}{\partial f_3}) + C_2(\omega^1\frac{\partial}{\partial \omega^1} - \omega^3\frac{\partial}{\partial \omega^3}) + \\ &+C_3\frac{\partial}{\partial \omega^3} + B_1\frac{\partial}{\partial f_1} + B_2\frac{\partial}{\partial f_2} + B_3\frac{\partial}{\partial f_3} + A_1(f_3\frac{\partial}{\partial f_2} - f_2\frac{\partial}{\partial f_3}) + \\ &+A_2(f_1\frac{\partial}{\partial f_3} - f_3\frac{\partial}{\partial f_1}) + A_3(f_2\frac{\partial}{\partial f_1} - f_1\frac{\partial}{\partial f_2}) + \\ &+\frac{\partial L(\omega^1, \omega^2)}{\partial \omega^2}\frac{\partial}{\partial \omega^1} - \frac{\partial L(\omega^1, \omega^2)}{\partial \omega^1}\frac{\partial}{\partial \omega^2}.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Таким образом, инфинитезимальный оператор полной группы непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (1.3) зависит от девяти произвольных постоянных и одной произвольной функции $L = L(\omega^1, \omega^2)$.

## 3. Оптимальные подалгебры, соответствующие конечномерной подалгебре симметрий

Структура инфинитезимального оператора полной группы непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (1.3) такова, что допускает одну конечномерную подалгебру алгебры симметрий. Мы называем ее естественной конечномерной подалгеброй алгебры непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (1.3)[4].

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&(\varsigma_1\cdot\partial)=3\omega^3\frac{\partial}{\partial\omega^3}+f_1\frac{\partial}{\partial f_1}+f_2\frac{\partial}{\partial f_2}+f_3\frac{\partial}{\partial f_3},\\
&(\varsigma_2\cdot\partial)=\omega^1\frac{\partial}{\partial\omega^1}-\omega^3\frac{\partial}{\partial\omega^3},\\
&(\varsigma_3\cdot\partial)=\frac{\partial}{\partial\omega^3},\\
&(\varsigma_4\cdot\partial)=\frac{\partial}{\partial f_1},\quad(\varsigma_5\cdot\partial)=\frac{\partial}{\partial f_2},\quad(\varsigma_6\cdot\partial)=\frac{\partial}{\partial f_3},\\
&(\varsigma_7\cdot\partial)=f_3\frac{\partial}{\partial f_2}-f_2\frac{\partial}{\partial f_3},\\
&(\varsigma_8\cdot\partial)=f_1\frac{\partial}{\partial f_3}-f_3\frac{\partial}{\partial f_1},\\
&(\varsigma_9\cdot\partial)=f_2\frac{\partial}{\partial f_1}-f_1\frac{\partial}{\partial f_2}.
\end{aligned}\tag{3.1}$$

Можно показать, что $(\varsigma_i\cdot\partial)$ линейно независимы. Поэтому можно ввести линейное пространство, представляющее собой линейную оболочку операторов $(\varsigma_i\cdot\partial)$. Девятимерное линейное пространство с базисом из инфинитезимальных операторов (3.1) наделяется алгебраической структурой с помощью билинейной операции коммутации операторов (скобка Пуассона операторов) [9, с. 87], согласно

$$[(\varsigma_i\cdot\partial),(\varsigma_j\cdot\partial)]=[\varsigma_i,\varsigma_j]\cdot\partial,\tag{3.2}$$

где операция коммутации касательных векторных полей $[\varsigma_i,\varsigma_j]$, в свою очередь, определяется как:

$$[\varsigma_i,\varsigma_j]=(\varsigma_i\cdot\partial)\varsigma_j-(\varsigma_j\cdot\partial)\varsigma_i.\tag{3.3}$$

Линейное пространство инфинитезимальных операторов с определенной операцией коммутации операторов обладает структурой алгебры, которая носит название алгебры Ли. Чтобы доказать, что линейная оболочка операторов (3.1) образует алгебру Ли, необходимо составить таблицу коммутации базисных инфинитезимальных операторов $(\varsigma_i\cdot\partial)$. Таблица коммутации, приведенная ниже, показывает что инфинитезимальные операторы (3.1) действительно определяют подалгебру алгебры непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (1.3). На основании этой таблицы однозначно определяется подалгебра алгебры симметрий и структурный тензор подалгебры.

Ясно, что структурой алгебры Ли обладает также линейное пространство касательных векторных полей $\varsigma$, представляющее собой линейную оболочку базисных касательных векторных полей $\varsigma_i$, с операцией коммутации (3.3). Часто удобнее проводить рассуждения в терминах именно этой алгебры. Этим замечанием мы воспользуемся в дальнейшем изложении. Рассматриваемая в этой части данной работы алгебра Ли касательных векторных полей девятимерна.

[4]Естественная конечномерная подалгебра обязана своим появлением лишь формальной схеме анализа определяющих уравнений и не содержит, например, группы сдвигов координат $\omega^1$ и $\omega^2$.

Таблица

**Коммутация инфинитезимальных операторов (3.1), определяющих естественную конечномерную подалгебру алгебры непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (1.3)**

| | $(\varsigma_1\cdot\partial)$ | $(\varsigma_2\cdot\partial)$ | $(\varsigma_3\cdot\partial)$ | $(\varsigma_4\cdot\partial)$ | $(\varsigma_5\cdot\partial)$ | $(\varsigma_6\cdot\partial)$ | $(\varsigma_7\cdot\partial)$ | $(\varsigma_8\cdot\partial)$ | $(\varsigma_9\cdot\partial)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(\varsigma_1\cdot\partial)$ | 0 | 0 | $-3(\varsigma_3\cdot\partial)$ | $-(\varsigma_4\cdot\partial)$ | $-(\varsigma_5\cdot\partial)$ | $-(\varsigma_6\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 |
| $(\varsigma_2\cdot\partial)$ | 0 | 0 | $-(\varsigma_3\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $(\varsigma_3\cdot\partial)$ | $3(\varsigma_3\cdot\partial)$ | $(\varsigma_3\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $(\varsigma_4\cdot\partial)$ | $(\varsigma_4\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $(\varsigma_6\cdot\partial)$ | $-(\varsigma_5\cdot\partial)$ |
| $(\varsigma_5\cdot\partial)$ | $(\varsigma_5\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-(\varsigma_6\cdot\partial)$ | 0 | $(\varsigma_4\cdot\partial)$ |
| $(\varsigma_6\cdot\partial)$ | $(\varsigma_6\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $(\varsigma_5\cdot\partial)$ | $-(\varsigma_4\cdot\partial)$ | 0 |
| $(\varsigma_7\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $(\varsigma_6\cdot\partial)$ | $-(\varsigma_5\cdot\partial)$ | 0 | $(\varsigma_9\cdot\partial)$ | $-(\varsigma_8\cdot\partial)$ |
| $(\varsigma_8\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | $-(\varsigma_6\cdot\partial)$ | 0 | $(\varsigma_4\cdot\partial)$ | $-(\varsigma_9\cdot\partial)$ | 0 | $(\varsigma_7\cdot\partial)$ |
| $(\varsigma_9\cdot\partial)$ | 0 | 0 | 0 | $(\varsigma_5\cdot\partial)$ | $-(\varsigma_4\cdot\partial)$ | 0 | $(\varsigma_8\cdot\partial)$ | $-(\varsigma_7\cdot\partial)$ | 0 |

Чтобы изучить внутреннюю структуру алгебры Ли, обычно вводится линейное преобразование $\mathrm{ad}(\tilde{\varsigma})$ этой алгебры, заданное касательным векторным полем $\tilde{\varsigma}$, действующее на касательное векторное поле $\varsigma$ однопараметрической группы Ли по формуле (см. [9, с. 186])

$$\mathrm{ad}(\tilde{\varsigma}) < \varsigma >= [\varsigma, \tilde{\varsigma}], \tag{3.4}$$

называемое присоединенным отображением с определяющим касательным векторным полем $\tilde{\varsigma}$.

Линейные отображения $\mathrm{ad}(\tilde{\varsigma})$ с различными определяющими элементами $\tilde{\varsigma}$ образуют алгебру Ли с коммутатором, задаваемым следующим равенством:

$$[\mathrm{ad}(\varsigma_i), \mathrm{ad}(\varsigma_j)] = \mathrm{ad}([\varsigma_i, \varsigma_j]). \tag{3.5}$$

Ясно, что присоединенные отображения $\mathrm{ad}(\varsigma_i)$ $(i = \overline{1,9})$ образуют базис указанной алгебры Ли.

Понятие присоединенного отображения интересует нас лишь в связи с тем, что оно используется при конструировании однопараметрической группы внутренних автоморфизмов алгебры Ли касательных векторных полей. Техника построения однопараметрической группы внутренних автоморфизмов алгебры Ли приводится, например, в [9, с. 188–190].

Чтобы найти группу внутренних автоморфизмов алгебры Ли, необходимо решить уравнение Ли [9, с. 188]:

$$\frac{\partial \varsigma'}{\partial \tau} = \mathrm{ad}(\tilde{\varsigma}) < \varsigma' >= [\varsigma', \tilde{\varsigma}] \tag{3.6}$$

с начальным условием

$$\varsigma'(0) = \varsigma. \tag{3.7}$$

Поясним, что $\varsigma'$ — касательное векторное поле, в которое переходит касательное векторное поле $\varsigma$ под действием однопараметрической группы преобразований, заданной уравнением Ли.

Сформулированная задача Коши имеет следующее решение:

$$\varsigma' = \exp(\tau \mathrm{ad}(\tilde{\varsigma})) < \varsigma > . \tag{3.8}$$

Можно показать, что преобразования (3.8) являются автоморфизмами алгебры Ли. Они называются внутренними автоморфизмами.

Заметим, что в терминах инфинитезимальных операторов уравнение (3.6) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\varsigma' \cdot \partial) = [(\varsigma' \cdot \partial), (\tilde{\varsigma} \cdot \partial)],$$

а начальное условие (3.7) —

$$(\varsigma' \cdot \partial)\Big|_{\tau=0} = (\varsigma \cdot \partial).$$

Решение этой задачи Коши дается формулой Хаусдорфа

$$(\varsigma' \cdot \partial) = (\varsigma \cdot \partial) + \tau[(\varsigma \cdot \partial), (\tilde{\xi} \cdot \partial)] + \frac{\tau^2}{2!}[[(\varsigma \cdot \partial), (\tilde{\xi} \cdot \partial)], (\tilde{\xi} \cdot \partial)] + \dots .$$

Достаточно построить однопараметрические группы автоморфизмов, порождаемые базисными векторами $\tilde{\xi} = \varsigma_j$ $(j = \overline{1,9})$. Для каждого базисного вектора $\varsigma_j$ $(j = \overline{1,9})$ имеем соответствующую группу внутренних автоморфизмов, действующую на постоянные $C_1$, $C_2$, $C_3$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B_1$, $B_2$, $B_3$ в разложении общего инфинитезимального оператора (2.30), определяемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений [9, с. 189]:

1) $\dot{C}'_1 = 0,\quad \dot{C}'_2 = 0,\quad \dot{C}'_3 = 3C'_3,\quad \dot{B}'_1 = B'_1,$
$\dot{B}'_2 = B'_2,\quad \dot{B}'_3 = B'_3,\quad \dot{A}'_1 = 0,\quad \dot{A}'_2 = 0,\quad \dot{A}'_3 = 0;$
2) $\dot{C}'_1 = 0,\quad \dot{C}'_2 = 0,\quad \dot{C}'_3 = C'_3,\quad \dot{B}'_1 = 0,\quad \dot{B}'_2 = 0,$
$\dot{B}'_3 = 0,\quad \dot{A}'_1 = 0,\quad \dot{A}'_2 = 0,\quad \dot{A}'_3 = 0;$
3) $\dot{C}'_1 = 0,\quad \dot{C}'_2 = 0,\quad \dot{C}'_3 = -3C'_1 - C'_2,\quad \dot{B}'_1 = 0,$
$\dot{B}'_2 = 0,\quad \dot{B}'_3 = 0,\quad \dot{A}'_1 = 0,\quad \dot{A}'_2 = 0,\quad \dot{A}'_3 = 0;$
4) $\dot{C}'_1 = 0,\quad \dot{C}'_2 = 0,\quad \dot{C}'_3 = 0,\quad \dot{B}'_1 = -C'_1,$
$\dot{B}'_2 = A'_3,\quad \dot{B}'_3 = -A'_2,\quad \dot{A}'_1 = 0,\quad \dot{A}'_2 = 0,\quad \dot{A}'_3 = 0;$
5) $\dot{C}'_1 = 0,\quad \dot{C}'_2 = 0,\quad \dot{C}'_3 = 0,\quad \dot{B}'_1 = -A'_3,$
$\dot{B}'_2 = -C'_1,\quad \dot{B}'_3 = A'_1,\quad \dot{A}'_1 = 0,\quad \dot{A}'_2 = 0,\quad \dot{A}'_3 = 0;$
6) $\dot{C}'_1 = 0,\quad \dot{C}'_2 = 0,\quad \dot{C}'_3 = 0,\quad \dot{B}'_1 = A'_2,$
$\dot{B}'_2 = -A'_1,\quad \dot{B}'_3 = -C'_1,\quad \dot{A}'_1 = 0,\quad \dot{A}'_2 = 0,\quad \dot{A}'_3 = 0;$
7) $\dot{C}'_1 = 0,\quad \dot{C}'_2 = 0,\quad \dot{C}'_3 = 0,\quad \dot{B}'_1 = 0,$
$\dot{B}'_2 = B'_3,\quad \dot{B}'_3 = -B'_2,\quad \dot{A}'_1 = 0,\quad \dot{A}'_2 = A'_3,\quad \dot{A}'_3 = -A'_2;$
8) $\dot{C}'_1 = 0,\quad \dot{C}'_2 = 0,\quad \dot{C}'_3 = 0,\quad \dot{B}'_1 = -B'_3,$
$dot B'_2 = 0,\quad \dot{B}'_3 = B'_1,\quad \dot{A}'_1 = -A'_3,\quad \dot{A}'_2 = 0,\quad \dot{A}'_3 = A'_1;$
9) $\dot{C}'_1 = 0,\quad \dot{C}'_2 = 0,\quad \dot{C}'_3 = 0,\quad \dot{B}'_1 = B'_2,$
$\dot{B}'_2 = -B'_1,\quad \dot{B}'_3 = 0,\quad \dot{A}'_1 = A'_2,\quad \dot{A}'_2 = -A'_1,\quad \dot{A}'_3 = 0.$

Здесь дифференцирование (обозначаемое точкой) производится по параметру $\tau$. Решая каждую из девяти выписанных систем с начальными данными

$$\begin{aligned}
C'_1\big|_{\tau=0} &= C_1, \quad C'_2\big|_{\tau=0} = C_2, \quad C'_3\big|_{\tau=0} = C_3,\\
B'_1\big|_{\tau=0} &= B_1, \quad B'_2\big|_{\tau=0} = B_2, \quad B'_3\big|_{\tau=0} = B_3,\\
A'_1\big|_{\tau=0} &= A_1, \quad A'_2\big|_{\tau=0} = A_2, \quad A'_3\big|_{\tau=0} = A_3,
\end{aligned}$$

в результате определим, как действуют на постоянные $C_1$, $C_2$, $C_3$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B_1$, $B_2$, $B_3$ в разложении общего инфинитезимального оператора (2.30) однопараметрические группы автоморфизмов, соответствующие базисным касательным векторным полям $\tilde{\xi} = \varsigma_j$ $(j = \overline{1,9})$:

1) $C_1' = C_1,\quad C_2' = C_2,\quad C_3' = C_3 e^{3\tau},\quad B_1' = B_1 e^{\tau},$
$B_2' = B_2 e^{\tau},\quad B_3' = B_3 e^{\tau},\quad A_1' = A_1,\quad A_2' = A_2,\quad A_3' = A_3;$
2) $C_1' = C_1,\quad C_2' = C_2,\quad C_3' = C_3 e^{\tau},\quad B_1' = B_1,$
$B_2' = B_2,\quad B_3' = B_3,\quad A_1' = A_1,\quad A_2' = A_2,\quad A_3' = A_3;$
3) $C_1' = C_1,\quad C_2' = C_2,\quad C_3' = C_3 - 3\tau C_1 - \tau C_2,\quad B_1' = B_1,$
$B_2' = B_2,\quad B_3' = B_3,\quad A_1' = A_1,\quad A_2' = A_2,\quad A_3' = A_3;$
4) $C_1' = C_1,\quad C_2' = C_2,\quad C_3' = C_3,\quad B_1' = B_1 - \tau C_1,$
$B_2' = B_2 + \tau A_3,\quad B_3' = B_3 - \tau A_2,\quad A_1' = A_1,\quad A_2' = A_2,\quad A_3' = A_3;$
5) $C_1' = C_1,\quad C_2' = C_2,\quad C_3' = C_3,\quad B_1' = B_1 - \tau A_3,$
$B_2' = B_2 - \tau C_1,\quad B_3' = B_3 + \tau A_1,\quad A_1' = A_1,\quad A_2' = A_2,\quad A_3' = A_3;$
6) $C_1' = C_1,\quad C_2' = C_2,\quad C_3' = C_3,\quad B_1' = B_1 + \tau A_2,$
$B_2' = B_2 - \tau A_1,\quad B_3' = B_3 - \tau C_1,\quad A_1' = A_1,\quad A_2' = A_2,\quad A_3' = A_3;$
7) $C_1' = C_1,\quad C_2' = C_2,\quad C_3' = C_3,\quad B_1' = B_1,$
$B_2' = B_2 \cos(\tau) + B_3 \sin(\tau),\quad B_3' = B_3 \cos(\tau) - B_2 \sin(\tau),\quad A_1' = A_1,$
$A_2' = A_2 \cos(\tau) + A_3 \sin(\tau),\quad A_3' = A_3 \cos(\tau) - A_2 \sin(\tau);$
8) $C_1' = C_1,\quad C_2' = C_2,\quad C_3' = C_3,\quad B_1' = B_1 \cos(\tau) - B_3 \sin(\tau),$
$B_2' = B_2,\quad B_3' = B_3 \cos(\tau) + B_1 \sin(\tau),\quad A_1' = A_1 \cos(\tau) - A_3 \sin(\tau),$
$A_2' = A_2,\quad A_3' = A_3 \cos(\tau) + A_1 \sin(\tau);$
9) $C_1' = C_1,\quad C_2' = C_2,\quad C_3' = C_3,\quad B_1' = B_1 \cos(\tau) + B_2 \sin(\tau),$
$B_2' = B_2 \cos(\tau) - B_1 \sin(\tau),\quad B_3' = B_3,\quad A_1' = A_1 \cos(\tau) + A_2 \sin(\tau),$
$A_2' = A_2 \cos(\tau) - A_1 \sin(\tau),\quad A_3' = A_3.$

Здесь параметр $\tau$ для каждой из однопараметрических групп изменяется независимо.

Построение оптимальной системы одномерных подалгебр естественной конечномерной подалгебры алгебры непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (1.3) мы осуществим с помощью "наивного" подхода, состоящего в том, что "конечномерная" часть общего инфинитезимального оператора (2.30) (точнее коэффициенты $C_1$, $C_2$, $C_3$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B_1$, $B_2$, $B_3$) подвергается различным преобразованиям из списка (1)–(9) так, чтобы "упростить" его настолько, насколько это представляется возможным (в частности, стремясь привести к нулевому значению как можно больше из указанных девяти постоянных)[5]. Далее мы выбираем из каждого класса инфинитезимальных операторов, переводящихся друг в друга автоморфизмами (1)–(9), по одному простейшему представителю и формируем оптимальную систему одномерных подалгебр $\Theta_1$ естественной конечномерной подалгебры алгебры непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений в частных производных (1.3).

[5]Аналогичный подход использовался нами ранее при построении оптимальной системы одномерных подалгебр алгебры симметрий системы уравнений в частных производных осесимметричной задачи теории пластичности (см. [5]).

При поиске указанных простейших представителей, кроме однопараметрических групп автоморфизмов, будем применять также преобразование, заключающееся в умножении простейшего инфинитезимального оператора на некоторую постоянную (так называемое преобразование умножения).

Рассмотрим, как изменяются постоянные $C_1$, $C_2$, $C_3$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, $B_1$, $B_2$, $B_3$ в представлении "конечномерной" части общего инфинитезимального оператора (2.30) группы симметрий системы уравнений (1.3) при применении к ним однопараметрических групп автоморфизмов из приведенного выше списка (1)–(9).

Рассмотрим $A_i$ и $B_i$ как компоненты векторов **A** и **B** в трехмерном пространстве $x_1$, $x_2$, $x_3$. Тогда автоморфизмы (7), (8), (9) представляют собой повороты их как жесткого целого на различные углы $\tau$ вокруг осей $x_1$, $x_2$, $x_3$.

Если вектор **A** ненулевой (т.е. хотя бы одна из его компонент $A_i$ не равна нулю), то такими поворотами можно перевести вектор **A** в положение, когда он будет коллинеарен оси $x_1$. Ясно, что тогда $A_2 = A_3 = 0$, $A_1 \neq 0$. При этом, если вектор **B** не равен нулю (т.е. хотя бы одна из его компонент $B_i$ отлична от нуля), то поворотом вокруг оси $x_1$ вектор **B** можно преобразовать так, чтобы его проекция на ось $x_3$ (компонента $B_3$) была бы равна нулю ($B_3 = 0$). Применяя последовательно автоморфизмы (5), (6) при значениях $\tau$, равных соответственно $\dfrac{B_2C_1}{C_1^2 + A_1^2}$ и $\dfrac{B_2A_1}{C_1^2 + A_1^2}$, можно добиться того, чтобы коэффициент $B_2$ стал нулевым, не изменяя при этом нулевого значения $B_3$.

Если вектор **A** равен нулю (т.е. $A_1 = A_2 = A_3 = 0$), то поворотами (7), (8), (9) вектор **B** заведомо может быть переведен в такое положение, когда он будет коллинеарен оси $x_1$, и поэтому снова получаем $B_2 = B_3 = 0$.

Таким образом, при любых обстоятельствах можно добиться того, чтобы выполнялись равенства $A_2 = A_3 = 0$ и $B_2 = B_3 = 0$.

Если $C_1 \neq 0$, то, применяя автоморфизм (4) при $\tau$, равном $\dfrac{B_1}{C_1}$, удается привести к нулевому значению $B_1$.

Если $C_1$, $C_2$ выбираются так, что $3C_1 + C_2 \neq 0$, то, применяя автоморфизм (3) при $\tau$, равном $\dfrac{1}{3C_1 + C_2}$, можно привести к нулевому значению $C_3$; применяя затем преобразование умножения, приводим $C_1$ к единице и, таким образом, получаем множество простейших представителей вида:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) + D_1(\varsigma_2 \cdot \partial) + D_2(\varsigma_7 \cdot \partial), \tag{3.9}$$

где $D_1$, $D_2$ — произвольные постоянные.

Если $C_1 = 0$, то коэффициент $B_1$ привести к нулевому значению не удается. Если, кроме того, $C_2 \neq 0$ и $B_1 \neq 0$, то, применяя автоморфизм (1) при $\tau$, равном $\ln|C_2/B_1|$, добиваемся того, чтобы $C_2$ и $B_1$ стали равными по абсолютной величине. В результате получаем простейших представителей вида:

$$(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial). \tag{3.10}$$

Если $C_1 = 0$ и $B_1 = 0$, то получаем следующих простейших представителей:

$$(\varsigma_2 \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial). \tag{3.11}$$

Если $3C_1+C_2 = 0$, то коэффициент $C_3$ сделать нулевым не удается. Если, кроме того, $C_1 \neq 0$, то, применяя автоморфизм (2) при $\tau$, равном $\ln|C_1/C_3|$, приводим $C_1$ и $C_3$ к значениям, равным по модулю, и, следовательно, получаем множество простейших представителей вида:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) - 3(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_3 \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial)). \tag{3.12}$$

В случае, когда $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$, находим, что $C_3$ и $B_1$ могут не быть равными нулю. Если при этом $C_3 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $A_1 \neq 0$, то, применяя автоморфизм (1) при $\tau$, равном $\ln|A_1/B_1|$, убеждаемся, что $A_1$ и $B_1$ приводятся к равным по модулю значениям, и, применяя после этого автоморфизм (2) при $\tau$, равном $\ln|A_1/C_3|$, приводим к равным абсолютным значениям величины $A_1$ и $C_3$. В итоге получаем четыре простейших представителя

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial). \tag{3.13}$$

В случае, когда один из коэффициентов $C_3$, $B_1$, $A_1$ равен нулю, получаем представителей

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial), \tag{3.14}$$

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial), \tag{3.15}$$

$$(\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial). \tag{3.16}$$

Если два коэффициента из $C_3$, $C_4$, $C_5$ равны нулю, то получаем представителей

$$(\varsigma_3 \cdot \partial), \tag{3.17}$$

$$(\varsigma_4 \cdot \partial), \tag{3.18}$$

$$(\varsigma_7 \cdot \partial). \tag{3.19}$$

Перечисленные выше инфинитезимальные операторы образуют оптимальную систему $\Theta_1$ одномерных подалгебр естественной конечномерной подалгебры алгебры непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (1.3). Это подалгебры, порожденные следующими инфинитезимальными операторами ($D_1$, $D_2$, $D_3$, $D_4$, $D_5$ — произвольные постоянные):

$$
\begin{aligned}
&(\varsigma_1\cdot\partial)+D_1(\varsigma_2\cdot\partial)+D_2(\varsigma_7\cdot\partial),\\
&(\varsigma_2\cdot\partial)\pm(\varsigma_4\cdot\partial)+D_3(\varsigma_7\cdot\partial),\\
&(\varsigma_2\cdot\partial)+D_4(\varsigma_7\cdot\partial),\\
&(\varsigma_1\cdot\partial)-3(\varsigma_2\cdot\partial)\pm(\varsigma_3\cdot\partial)+D_5(\varsigma_7\cdot\partial)),\\
&(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial),\\
&(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_4\cdot\partial),\\
&(\varsigma_3\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial),\\
&(\varsigma_4\cdot\partial)\pm(\varsigma_7\cdot\partial),\\
&(\varsigma_3\cdot\partial),\\
&(\varsigma_4\cdot\partial),\\
&(\varsigma_7\cdot\partial).
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

В этом списке знаки не согласованы и могут быть выбраны независимо. В каждом элементе списка один из базисных операторов $(\varsigma_j\cdot\partial)$ может быть замещен своим коллинеарным аналогом. При построении списка не учтены дискретные симметрии системы дифференциальных уравнений (1.3). Не учтена также возможность модификации самой естественной конечномерной подалгебры алгебры непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (1.3) с целью восстановления симметрии по отношению к переменным $\omega^1$ и $\omega^2$, нарушенной заменой (2.25).

Оптимальная система $\Theta_1$ используется для редукции системы дифференциальных уравнений в частных производных (1.3) к системам, содержащим лишь две независимых переменных, которые, в свою очередь, могут быть подвергнуты групповому анализу также с целью их дальнейшей редукции к системам обыкновенных дифференциальных уравнений.

Завершая работу, приведем один специальный вариант расширения естественной конечномерной подалгебры алгебры непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (1.3).

# 4. Расширение естественной конечномерной подалгебры

Обозначим через

$$(\varsigma_{10}\cdot\partial)=\frac{\partial L(\omega^1,\omega^2)}{\partial\omega^2}\frac{\partial}{\partial\omega^1}-\frac{\partial L(\omega^1,\omega^2)}{\partial\omega^1}\frac{\partial}{\partial\omega^2} \tag{4.1}$$

инфинитезимальный оператор, входящий в выражение для общего инфинитезимального оператора полной группы непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (1.3) и исключенный ранее из рассмотрений.

Учтем его, выбрав функцию $L$ в форме степенного одночлена от изостатических координат $\omega^1$, $\omega^2$

$$L(\omega^1,\omega^2)=(\omega^1)^n(\omega^2)^k. \tag{4.2}$$

Тогда можно вести речь об инфинитезимальных операторах вида $(\varsigma_{10}\cdot\partial)_{nk}$.

В случае, когда $n \neq 0$, $k \neq 0$, имеем

$$(\varsigma_{10} \cdot \partial)_{nk} = k(\omega^1)^n(\omega^2)^{k-1}\frac{\partial}{\partial\omega^1} - n(\omega^1)^{n-1}(\omega^2)^k\frac{\partial}{\partial\omega^2}. \tag{4.3}$$

Если $n = 0$, то

$$(\varsigma_{10} \cdot \partial)_{0k} = k(\omega^2)^{k-1}\frac{\partial}{\partial\omega^1}, \tag{4.4}$$

а когда $k = 0$, то

$$(\varsigma_{10} \cdot \partial)_{n0} = -n(\omega^1)^{n-1}\frac{\partial}{\partial\omega^2}. \tag{4.5}$$

Ниже приводятся выражения для коммутаторов оператора $(\varsigma_{10} \cdot \partial)_{nk}$ с некоторыми из операторов, формирующих (2.30):

$$[(\varsigma_2 \cdot \partial), (\varsigma_{10} \cdot \partial)_{0k}] = -(\varsigma_{10} \cdot \partial)_{0k}, \tag{4.6}$$

$$[(\varsigma_2 \cdot \partial), (\varsigma_{10} \cdot \partial)_{n0}] = (n-1)(\varsigma_{10} \cdot \partial)_{n0}, \tag{4.7}$$

$$\begin{gathered}[(\varsigma_2 \cdot \partial), (\varsigma_{10} \cdot \partial)_{nk}] = kn(\omega^1)^n(\omega^2)^{k-1}\frac{\partial}{\partial\omega^1} - n(n-1)(\omega^1)^{n-1}(\omega^2)^k\frac{\partial}{\partial\omega^2} - \\ -k(\omega^1)^n(\omega^2)^{k-1}\frac{\partial}{\partial\omega^1} = (n-1)(\varsigma_{10} \cdot \partial)_{nk},\end{gathered} \tag{4.8}$$

$$\begin{gathered}[(\varsigma_{10} \cdot \partial)_{0k}, (\varsigma_{10} \cdot \partial)_{n0}] = -k(\omega^2)^{k-1}n(n-1)(\omega^1)^{n-2}\frac{\partial}{\partial\omega^2} + \\ +n(\omega^1)^{n-1}k(k-1)(\omega^2)^{k-2}\frac{\partial}{\partial\omega^1} = nk(\varsigma_{10} \cdot \partial)_{(n-1)(k-1)},\end{gathered} \tag{4.9}$$

$$\begin{gathered}[(\varsigma_{10} \cdot \partial)_{0k_1}, (\varsigma_{10} \cdot \partial)_{nk}] = k_1(\omega^2)^{k_1-1}kn(\omega^1)^{n-1}(\omega^2)^{k-1}\frac{\partial}{\partial\omega^1} - \\ -k_1(\omega^2)^{k_1-1}n(n-1)(\omega^1)^{n-2}(\omega^2)^k\frac{\partial}{\partial\omega^2} + \\ +n(\omega^1)^{n-1}(\omega^2)^k k_1(k_1-1)(\omega^2)^{k_1-2}\frac{\partial}{\partial\omega^1} = \\ = k_1 n(k+k_1-1)(\omega^1)^{n-1}(\omega^2)^{k+k_1-2}\frac{\partial}{\partial\omega^1} - \\ -k_1 n(n-1)(\omega^1)^{n-2}(\omega^2)^{k+k_1-1}\frac{\partial}{\partial\omega^2} = \\ = nk_1(\varsigma_{10} \cdot \partial)_{(n-1)(k+k_1-1)},\end{gathered} \tag{4.10}$$

$$\begin{gathered}[(\varsigma_{10} \cdot \partial)_{n_1 0}, (\varsigma_{10} \cdot \partial)_{nk}] = -n_1(\omega^1)^{n_1-1}k(k-1)(\omega^1)^n(\omega^2)^{k-2}\frac{\partial}{\partial\omega^1} + \\ +n_1(\omega^1)^{n_1-1}nk(\omega^1)^{n-1}(\omega^2)^{k-1}\frac{\partial}{\partial\omega^2} + \\ +k(\omega^1)^n(\omega^2)^{k-1}n_1(n_1-1)(\omega^1)^{n_1-2}\frac{\partial}{\partial\omega^2} = \\ = -n_1 k(k-1)(\omega^1)^{n+n_1-1}(\omega^2)^{k-2}\frac{\partial}{\partial\omega^1} + \\ +n_1 k(n+n_1-1)(\omega^1)^{n+n_1-2}(\omega^2)^{k-1}\frac{\partial}{\partial\omega^2} = \\ = -n_1 k(\varsigma_{10} \cdot \partial)_{(n+n_1-1)(k-1)},\end{gathered} \tag{4.11}$$

$$
\begin{aligned}
&[(\varsigma_{10}\cdot\partial)_{n_1k_1},(\varsigma_{10}\cdot\partial)_{n_2k_2}] =\\
&\qquad = k_1(\omega^1)^{n_1}(\omega^2)^{k_1-1}k_2n_2(\omega^1)^{n_2-1}(\omega^2)^{k_2-1}\frac{\partial}{\partial\omega^1}-\\
&\qquad -k_1(\omega^1)^{n_1}(\omega^2)^{k_1-1}n_2(n_2-1)(\omega^1)^{n_2-2}(\omega^2)^{k_2}\frac{\partial}{\partial\omega^2}-\\
&\qquad -n_1(\omega^1)^{n_1-1}(\omega^2)^{k_1}k_2(k_2-1)(\omega^1)^{n_2}(\omega^2)^{k_2-2}\frac{\partial}{\partial\omega^1}+\\
&+n_1(\omega^1)^{n_1-1}(\omega^2)^{k_1}n_2k_2(\omega^1)^{n_2-1}(\omega^2)^{k_2-1}\frac{\partial}{\partial\omega^2}-\\
&\qquad -k_2(\omega^1)^{n_2}(\omega^2)^{k_2-1}k_1n_1(\omega^1)^{n_1-1}(\omega^2)^{k_1-1}\frac{\partial}{\partial\omega^1}+\\
&\qquad +k_2(\omega^1)^{n_2}(\omega^2)^{k_2-1}n_1(n_1-1)(\omega^1)^{n_1-2}(\omega^2)^{k_1}\frac{\partial}{\partial\omega^2}+\\
&\qquad +n_2(\omega^1)^{n_2-1}(\omega^2)^{k_2}k_1(k_1-1)(\omega^1)^{n_1}(\omega^2)^{k_1-2}\frac{\partial}{\partial\omega^1}-\\
&-n_2(\omega^1)^{n_2-1}(\omega^2)^{k_2}n_1k_1(\omega^1)^{n_1-1}(\omega^2)^{k_1-1}\frac{\partial}{\partial\omega^2} =\\
&\qquad = (k_1k_2n_2-n_1k_2k_2+n_1k_2-k_2k_1n_1+n_2k_1k_1-n_2k_1)\times\\
&\qquad\qquad \times(\omega^1)^{n_1+n_2-1}(\omega^2)^{k_1+k_2-2}\frac{\partial}{\partial\omega^1}+\\
&+(-k_1n_2n_2+k_1n_2+n_1n_2k_2+k_2n_1n_1-k_2n_1-n_2n_1k_1)\times\\
&\qquad\qquad \times(\omega^1)^{n_1+n_2-2}(\omega^2)^{k_1+k_2-1}\frac{\partial}{\partial\omega^2} =\\
&= (k_2+k_1-1)(n_2k_1-n_1k_2)(\omega^1)^{n_1+n_2-1}(\omega^2)^{k_1+k_2-2}\frac{\partial}{\partial\omega^1}-\\
&\qquad -(n_1+n_2-1)(k_1n_2-k_2n_1)(\omega^1)^{n_1+n_2-2}(\omega^2)^{k_1+k_2-1}\frac{\partial}{\partial\omega^2} =\\
&\qquad\qquad = (k_1n_2-k_2n_1)(\varsigma_{10}\cdot\partial)_{(n_1+n_2-1)(k_1+k_2-1)}.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

## Литература


[1] Радаев Ю.Н. О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1990. №1. С. 86–94.

[2] Радаев Ю.Н. К теории трехмерных уравнений математической теории пластичности // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2003. №5. С. 102–120.

[3] Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2004. 147 с.

[4] Радаев Ю.Н., Гудков В.А. Группы симметрий дифференциальных уравнений осесимметричной задачи математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. №4(34). 2004. С. 99–111.

[5] Радаев Ю.Н., Гудков В.А. Инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений осесимметричной задачи математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. Второй спец. выпуск. 2004. С. 65–84.

[6] Радаев Ю.Н., Бахарева Ю.Н. К теории осесимметричной задачи математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2003. №4(30). С. 125–139.

[7] Радаев Ю.Н., Бахарева Ю.Н. Об обобщении автомодельных решений Шилда осесимметричной задачи теории пластичности // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2005. №2. С. 104–116.

[8] Аннин Б.Д., Бытев В.О., Сенашов С.И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985. 143 с.

[9] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

[10] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М: Мир, 1989. 639 с.

Поступила в редакцию 18/*VIII*/2004;
в окончательном варианте — 25/*I*/2005.

## ON THE SYMMETRY GROUPS AND LIE ALGEBRA OF THREE-DIMENSIONAL EQUATIONS OF THE MATHEMATICAL PLASTICITY

 Y.N. Radayev, V.A. Gudkov, Y.N. Bakhareva[6]

Group analysis of the system of partial differential equations of three-dimensional plastic equilibrium is given. The Tresca yielding criterion is employed to formulate the involved system. Stress state is presumed correspond to an edge of the Tresca prism thus allowing formally consider the static equations independently on the flow rule. The system of static equilibrium equations is represented in the stress principal lines co-ordinate net (isostatic net). The symmetry group of this system is obtained. The Lie algebra and a first order optimal system of subalgebras of the symmetry group of partial differential equations of the three-dimensional mathematical theory of plasticity are studied.

Paper received 18/*VIII*/2004.
Paper accepted 25/*I*/2005.

[6]Radayev Yuri Nickolaevich (radayev@ssu.samara.ru), Gudkov Vasilij Alexandrovich (goodkov@ssu.samara.ru), Bakhareva Yuliya Nickolaevna (bahareva@ssu.samara.ru), Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.