

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГЛЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН¹

© 2005 Г.Л.Горынин² Ю.В.Немировский³

Пространственная задача поперечного изгиба слоистой неоднородной плиты посредством метода асимптотического расщепления распадается на последовательность одномерных и двумерных краевых задач, решение которых позволяет построить асимптотические приближения всех компонент вектора перемещения и тензора напряжения в каждой точке плиты. В случае действия полигармонических распределенных нагрузок указанные приближения достаточно высокого порядка являются точными решениями пространственной задачи теории упругости с выполнением традиционных интегральных условий на кромке плиты. Уравнение изгиба плиты для первого асимптотического приближения совпадает с уравнением С. Жермен, для второго приближения — с уравнением Тимошенко—Доннелла.

1. Постановка задачи

Рассмотрим плиту постоянной толщины, состоящую из произвольного числа слоев, выполненных из различных упругих материалов, упругие характеристики которых может быть непрерывно меняются по глубине плиты (см. рисунок). Начало координат поместим на верхней поверхности плиты. Слои нумеруем сверху вниз, i — номер текущего слоя, s — число слоев, u , v , w — перемещения точек в направлении осей x , y , z соответственно, λ_i , μ_i — упругие постоянные Ламе для каждого слоя.

Пусть \tilde{u} — характерное значение для перемещения u , h — толщина плиты и L — ее размер вдоль оси z , $\tilde{\lambda}$ — характерное значение постоянной Ламе. Будем рассматривать только такие плиты, для которых величина $\varepsilon = h/L$ является малым параметром, а размеры вдоль осей y и z имеют одинаковый порядок. перейдем к безразмерным переменным и функциям, для простоты

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

²Горынин Глеб Леонидович (gsibadi@hmansy.wsnet.ru), кафедра строительных технологий и конструкций Югорского государственного университета, 628011, Россия, г. Ханты-Мансийск, ул.Чехова, 16.

³Немировский Юрий Владимирович, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090, Россия, г. Новосибирск, ул. Институтская, 4/1.

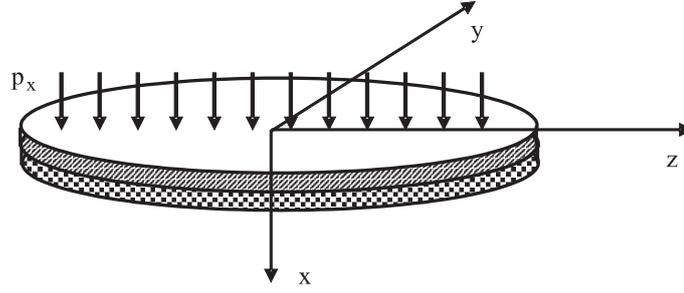


Рис. Слоистая плита под действием распределенной нагрузки

не меняя их обозначения:

$$x \leftrightarrow x/h, \quad y \leftrightarrow y/L, \quad z \leftrightarrow z/L, \quad u_\alpha \leftrightarrow u_\alpha/\tilde{u}, \quad \lambda_i \leftrightarrow \lambda_i/\tilde{\lambda}, \quad \mu_i \leftrightarrow \mu_i/\tilde{\mu},$$

$$\sigma_{\alpha\beta} \leftrightarrow \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\tilde{\sigma}}, \quad q \leftrightarrow \frac{q}{\tilde{\sigma}}, \quad \tilde{\sigma} = \frac{\tilde{\lambda}\tilde{u}}{h}; \quad \alpha, \beta \in \{x, y, z\}.$$

Потребуем выполнения линейных уравнений равновесия внутри плиты и на ее верхней и нижней поверхностях:

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha x}}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial \sigma_{\alpha y}}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial \sigma_{\alpha z}}{\partial z} = 0, \quad \alpha \in \{x, y, z\}; \quad (1)$$

$$\sigma_{xx} = -q_t, \quad \sigma_{yx} = 0, \quad \sigma_{zx} = 0 \quad \text{при } x = 0,$$

$$\sigma_{xx} = q_b, \quad \sigma_{yx} = 0, \quad \sigma_{zx} = 0 \quad \text{при } x = 1, \quad (2)$$

где $q_t(y, z)$, $q_b(y, z)$ — поперечные нагрузки на верхней (top) и нижней (bottom) поверхностях. На границе между слоями компоненты тензора напряжения σ_{xy} , σ_{zx} и σ_{xx} непрерывны:

$$(\sigma_{\alpha x})_{i-1} - (\sigma_{\alpha x})_i = 0, \quad \alpha \in \{x, y, z\}, \quad i = 2, s. \quad (3)$$

Одновременно с тем должны быть непрерывны компоненты вектора перемещения:

$$(u_\alpha)_{i-1} - (u_\alpha)_i = 0, \quad \alpha \in \{x, y, z\}, \quad i = 2, s. \quad (4)$$

Считаем, что материал каждого слоя подчиняется закону Гука:

$$(\sigma_{\alpha\beta})_i = \lambda_i \theta \delta_{\alpha\beta} + 2\mu_i e_{\alpha\beta},$$

$$\text{где } \theta = \sum_{\gamma=1}^3 e_{\gamma\gamma}, \quad \lambda_i = \frac{\nu_i E_i}{(1-2\nu_i)(1+\nu_i)}, \quad \mu_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}, \quad (5)$$

где $e_{\alpha\beta}$ — компоненты линейного тензора деформаций; E_i , ν_i — модуль Юнга и коэффициент Пуассона для i -го слоя. Задача (1)–(5) является полукраевой [2], т.к. на боковой кромке плиты краевые условия не заданы.

Примем для перемещений и напряжений следующие правила аппроксимации, выбор которых основан на исследованиях, проведенных в работе [2]:

$$(u_x)_i^{(n)} = u_0^{(n)} + \sum_{k=1}^n (U_{i,k}^x \varepsilon^{2k} \Delta^{(k)} u_0^{(n)}),$$

$$(u_\alpha)_i^{(n)} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[-(x - c_0)u_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} (U_{i,k}^\gamma \varepsilon^{2k} \Delta^{(k)} u_0^{(n)}) \right], \quad \alpha \in \{y, z\}, \quad (6)$$

$$(\sigma_{xx})_i^{(n)} = \sum_{k=2}^n (\tau_{xx})_i^{(2k)} \varepsilon^{2k} \Delta^{(k)} u_0^{(n)},$$

$$(\sigma_{yz})_i^{(n)} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left[\sum_{k=1}^n ((\tau_{mm})_i^{(2k)} - (\tau_{ss})_i^{(2k)}) \varepsilon^{2k} \Delta^{(k-1)} u_0^{(n)} \right],$$

$$(\sigma_{yy})_i^{(n)} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\sum_{k=1}^n (\tau_{mm})_i^{(2k)} \varepsilon^{2k} \Delta^{(k-1)} u_0^{(n)} \right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\sum_{k=1}^n (\tau_{ss})_i^{(2k)} \varepsilon^{2k} \Delta^{(k-1)} u_0^{(n)} \right],$$

$$(\sigma_{zz})_i^{(n)} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\sum_{k=1}^n (\tau_{ss})_i^{(2k)} \varepsilon^{2k} \Delta^{(k-1)} u_0^{(n)} \right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\sum_{k=1}^n (\tau_{mm})_i^{(2k)} \varepsilon^{2k} \Delta^{(k-1)} u_0^{(n)} \right],$$

$$(\sigma_{\alpha x})_i^{(n)} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\sum_{k=1}^n (\tau_{\gamma x})_i^{(2k+1)} \varepsilon^{2k} \Delta^{(k)} u_0^{(n)} \right], \quad \alpha \in \{y, z\}, \quad (7)$$

где c_0 — некоторая константа; n — номер асимптотического приближения; $u_0^{(n)}(y, z)$ — функция прогиба; $U_{i,k}^x, U_{i,k}^\gamma$ — характеристические функции вектора перемещения; $(\tau_{xx})_i^{(2k)}, (\tau_{mm})_i^{(2k)}, (\tau_{ss})_i^{(2k)}, (\tau_{\gamma x})_i^{(2k+1)}$ — характеристические функции тензора напряжений. Характеристические функции зависят только от переменной x . В формулах (7) использован m -кратный оператор Лапласа

$$\Delta^{(m)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^m.$$

Будем считать, что функция прогиба $u_0^{(n)}(y, z)$ равняется перемещению в поперечном направлении точек плиты, лежащих на расстоянии x_0 от ее верхней поверхности:

$$u_0^{(n)}(y, z) = u_i^{(n)} \Big|_{x=x_0}. \quad (8)$$

Из формул (6), (8) следует выполнение равенства:

$$U_{i,k}^x \Big|_{x=x_0} = 0, \quad k = 1, n. \quad (9)$$

Считаем, что нагрузки на верхней и нижней поверхностях пропорциональны между собой и представлены в виде:

$$q_t = k_t p_x, \quad q_b = k_b p_x, \quad k_t + k_b = 1; \quad (10)$$

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon^{2k} D_{k-1} \Delta^{(k)} u_0^{(n)} = p_x, \quad (11)$$

где D_{k-1} ($k = 2, n$) — некоторые константы; p_x — суммарная нагрузка, действующая на обе поверхности плиты; k_t, k_b — коэффициенты вклада нагрузки, приложенной к верхней и нижней поверхности соответственно.

2. Краевые задачи по толщине плиты

Предположим, что характеристические функции тензора напряжения связаны с характеристическими функциями вектора перемещения следующим образом:

$$\begin{aligned} (\tau_{mm})_i^{(2k)} &= (\lambda_i + 2\mu_i) U_{i,k-1}^\gamma + \lambda_i \frac{dU_{i,k}^x}{dx}, & (\tau_{ss})_i^{(2k)} &= \lambda_i \left(U_{i,k-1}^\gamma + \frac{dU_{i,k}^x}{dx} \right), \\ (\tau_{xx})_i^{(2k)} &= \lambda_i U_{i,k-1}^\gamma + (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{dU_{i,k}^x}{dx}, & U_{i,0}^\gamma &= -(x - c_0), \\ (\tau_{\gamma x})_i^{(2k+1)} &= \mu_i \left(\frac{dU_{i,k}^\gamma}{dx} + U_{i,k}^x \right), & (\tau_{\gamma x})_i^{(1)} &= 0, \quad k = 1, n. \end{aligned} \quad (12)$$

Кроме того, для характеристических функций потребуем выполнения равенств:

во внутренних точках каждого слоя плиты

$$\frac{d}{dx} \left((\tau_{xx})_i^{(2k)} \right) + (\tau_{\gamma x})_i^{(2k-1)} = 0, \quad \frac{d}{dx} (\tau_{\gamma x})_i^{(2k+1)} + (\tau_{mm})_i^{(2k)} = 0, \quad i = 1, s; \quad (13)$$

на верхней и нижней поверхностях плиты

$$\begin{aligned} (\tau_{xx})_1^{(2k)} &= -k_l D_{k-1}, & (\tau_{\gamma x})_1^{(2k+1)} &= 0 \quad \text{при } x = 0, \\ (\tau_{xx})_s^{(2k)} &= k_b D_{k-1}, & (\tau_{\gamma x})_s^{(2k+1)} &= 0 \quad \text{при } x = 1; \end{aligned} \quad (14)$$

на границах между слоями плиты

$$\begin{aligned} (\tau_{\gamma x})_{i-1}^{(2k+1)} &= (\tau_{\gamma x})_i^{(2k+1)}, & (\tau_{xx})_{i-1}^{(2k)} &= (\tau_{xx})_i^{(2k)}, & U_{i-1,k}^x &= U_{i,k}^x, & U_{i-1,k}^\gamma &= U_{i,k}^\gamma, \\ x &= h_i, & i &= 2, s, & k &= 1, n, \end{aligned} \quad (15)$$

где h_i — координата по оси x границы между слоями с номерами i и $i-1$. Равенства (12)–(15) образуют краевую задачу для каждого характеристического номера k . Если проинтегрировать уравнения (13) по всей толщине плиты и учесть условия (14)–(15) и последнее равенство (10), то получим необходимые условия разрешимости этих краевых задач:

$$\sum_{i=1}^s \int_{h_i}^{h_{i+1}} (\tau_{mm})_i^{(2k)} dx = 0, \quad D_{k-1} = - \sum_{i=1}^s \int_{h_i}^{h_{i+1}} (\tau_{\gamma x})_i^{(2k-1)} dx. \quad (16)$$

Последнее равенство дает формулу для ранее неизвестного коэффициента D_{k-1} . Если второе уравнение (13) умножить на величину $(x - c_0)$ и проинтегрировать его по частям с учетом условий (14)–(15), то получим равенство

$$D_k = - \sum_{i=1}^s \int_{h_i}^{h_{i+1}} (x - c_0) (\tau_{mm})_i^{(2k)} dx, \quad (17)$$

исходя из которого величину D_k будем называть характеристической изгибной жесткостью с характеристическим номером k .

Из равенств (12) следует равенство

$$(\tau_{mm})_i^{(2k)} - (\tau_{ss})_i^{(2k)} = 2\mu_i U_{i,k-1}^\gamma. \quad (18)$$

3. Асимптотическая выполнимость 3-х мерных уравнений теории упругости

Используя формулы для перемещений (6), вычислим компоненты линейного тензора деформаций:

$$\begin{aligned} (e_{xx})_i^{(n)} &= \sum_{k=1}^n \frac{dU_{i,k}^x}{dx} \varepsilon^{2k} \Delta^{(k)} u_0^{(n)}, \\ (e_{\alpha\alpha})_i^{(n)} &= \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left[-(x - c_0) u_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} (U_{i,k}^\gamma \varepsilon^{2k} \Delta^{(k)} u_0^{(n)}) \right], \\ (e_{\alpha x})_i^{(n)} &= \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{dU_{i,k}^\gamma}{dx} + U_{i,k}^x \right) \varepsilon^{2k} \Delta^{(k)} u_0^{(n)} + U_{i,n}^x \varepsilon^{2n} \Delta^{(n)} u_0^{(n)} \right), \quad \alpha \in \{y, z\}, \\ (e_{yz})_i^{(n)} &= \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left[-(x - c_0) u_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} (U_{i,k}^\gamma \varepsilon^{2k} \Delta^{(k)} u_0^{(n)}) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставим формулы (6)–(7), (19) в равенства полукраевой задачи (1)–(5) и учтем выполнение выражений (10)–(15), тогда получим, что многие слагаемые взаимно уничтожатся, и в конечном итоге будем иметь: равенства (2)–(4) выполняются тождественно; во внутренних точках плиты второе и третье равенства (1) превращаются в тождество, а первое выполняется приближенно

$$\frac{\partial (\sigma_{xx})_i^{(n)}}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial (\sigma_{xy})_i^{(n)}}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial (\sigma_{xz})_i^{(n)}}{\partial z} = (\tau_{yx})_i^{(2n+1)} \Delta^{(n+1)} u_0^{(n)} \varepsilon^{2n+2}, \quad (20)$$

закон Гука (5) выполняется тождественно для всех нормальных компонент тензора напряжений и касательных компонент, действующих в плоскости плиты, а для поперечных касательных компонент выполняется приближенно

$$(\sigma_{\alpha x})_i^{(n)} - 2\mu_i (e_{\alpha x})_i^{(n)} = \left((\tau_{yx})_i^{(2n+1)} - \mu_i U_{i,n}^x \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \Delta^{(n)} u_0^{(n)} \varepsilon^{2n+1}, \quad \alpha \in \{y, z\}. \quad (21)$$

Из равенств (20)–(21) следует, что если \exists число K такое, что $\forall n \exists$ функция прогиба $u_0^{(n)}(y, z)$, являющаяся решением уравнения поперечного изгиба (11), для которой выполняются условия

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \Delta^{(n)} u_0^{(n)} = \frac{1}{\varepsilon^4} O(K^{2n+1}), \quad \Delta^{(n)} u_0^{(n)} = \frac{1}{\varepsilon^4} O(K^{2n}), \quad K\varepsilon < 1, \quad (22)$$

то компоненты вектора перемещений и тензора напряжений, вычисляемые по формулам (6)–(7), составляют формальное асимптотическое решение полукраевой задачи (1)–(5). Причем каждое формальное асимптотическое приближение с номером n имеет порядок аппроксимации $O((K\varepsilon)^{2n-3})$.

4. Уравнение поперечного изгиба слоистой плиты

Наименьшее значение номера асимптотического приближения, при котором уравнение (11) имеет смысл, $n = 2$:

$$\Delta^{(2)}u_0^{(2)} = \frac{P_x}{\varepsilon^4 D_1}. \quad (23)$$

Уравнение (23) — это известное уравнение Софи Жермен, которое таким образом выведено из пространственных уравнений теории упругости в качестве уравнения для первого асимптотического приближения функции прогиба плиты с произвольным числом упругих слоев. Следует особо подчеркнуть, что при выводе этого уравнения в отличие от технической теории изгиба плит гипотеза прямой нормали Кирхгофа—Лява не использовалась.

Запишем уравнение изгиба (11) для $n = 3$ и воспользуемся равенствами (33):

$$\varepsilon^2 \beta_1 \Delta^{(3)}u_0^{(3)} + \Delta^{(2)}u_0^{(3)} = \frac{q}{\varepsilon^4 D_1}, \quad D_k = \beta_{k-1} D_1, \quad (24)$$

где β_{k-1} — коэффициент связи первой и k -й характеристических жесткостей. Уравнение изгиба (24) совпадает с уравнением Тимошенко—Доннелла, которое было выведено Доннеллом для однослойной плиты путем учета действия касательных перерезывающих напряжений на основе классической теории пластин [3].

Уравнения (24) и (11) являются сингулярными возмущениями уравнения С. Жермен (23). Поэтому общие решения этих уравнений можно рассматривать как совокупность сингулярных и регулярных возмущений решений уравнения (23). Условия (22), достаточные для существования асимптотического решения, выполняются не для всех решений (24), а только для тех, которые являются регулярными возмущениями уравнения С. Жермен. Для получения этих решений дифференциальный оператор, стоящий в левой части уравнения (11), представим как последовательное выполнение двух операторов:

$$\left(1 + \sum_{k=3}^n \varepsilon^{2(k-2)} \beta_{k-2} \Delta^{(k-2)} \right) \Delta^{(2)}u_0^{(n)} = \frac{P_x}{\varepsilon^4 D_1}. \quad (25)$$

Левый оператор является регулярным возмущением тождественного оператора, если обратный к нему оператор представить в виде формального асимптотического ряда, то при его применении все сингулярные решения

пропадут, а для получения регулярных достаточно решить уравнение

$$\Delta^{(2)} u_0^{(n)} = \left(1 + \sum_{k=3}^n \varepsilon^{2(k-2)} \beta_{k-2} \Delta^{(k-2)} \right)^{-1} \frac{p_x}{\varepsilon^4 D_1}. \quad (26)$$

5. Краевые условия на кромке плиты

Используем обозначения для внутренних усилий в плите

$$Q_{\alpha x} = \int_0^1 \sigma_{\alpha x} dx, \quad M_{\alpha\beta} = \int_0^1 (x - c_0) \sigma_{\alpha\beta} dx, \quad N_{\alpha\beta} = \int_0^1 \sigma_{\alpha\beta} dx. \quad (27)$$

Формулы для асимптотических приближений внутренних усилий получаются путем подстановки равенств (7) в выражения (25). Для рассмотрения пространственной задачи изгиба слоистой плиты следует к уравнениям полукраевой задачи (1)–(5) добавить условия на кромке плиты. По краю плиты будем задавать обычные краевые условия технической теории пластин:

шарнирное опирание $M_n = 0$, $u_0^{(n)} = 0$;

жесткое защемление $\frac{du_0^{(n)}}{dn} = 0$, $u_0^{(n)} = 0$, и т.п. (28)

Таким образом, решение исходной задачи о поперечном изгибе в приближении с номером n распадается на последовательное решение двух задач. Первая задача связана с нахождением характеристических функций тензора напряжения слоистой плиты, являющихся функциями переменной x , с последующим нахождением характеристических жесткостей D_k . Во второй задаче (26), (28) определяется функция прогиба $u_0^{(n)}$, с помощью которой могут быть определены перемещения и компоненты тензора напряжения в асимптотическом приближении с номером n для любой точки рассмотренной плиты по формулам (6)–(7).

В частном случае, когда поперечная нагрузка p_x является m -гармонической функцией, обратный оператор из формулы (26) представим в виде конечной суммы, содержащей степени оператора Лапласа. В этом случае, как это очевидно следует из равенства (26), функция прогиба $u_0^{(n)}$ является $(m+2)$ -гармонической функцией. При выполнении неравенства

$$n \geq m + 2 \quad (29)$$

правые части равенств (20)–(21) обнуляются и, следовательно, формулы (6) дают точное решение пространственной задачи теории упругости (1)–(5), (28) об изгибе слоистой плиты с произвольным числом слоев. Ранее точное решение для однослойной плиты в случае m -гармонической нагрузки было получено Лурье [4] с помощью символического метода.

6. Полярная система координат

В некоторых случаях удобно использовать полярную систему координат в плоскости плиты

$$y = r \cos \varphi, \quad z = r \sin \varphi. \quad (30)$$

Оператор Лапласа в этом случае имеет вид:

$$\Delta^{(1)} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (31)$$

Формулы (6)–(7) в полярной системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} (u_x)_i^{(n)} &= u_0^{(n)} + \sum_{k=1}^n (U_{i,k}^x \varepsilon^{2k} \Delta^{(k)} u_0^{(n)}), \\ (u_r)_i^{(n)} &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial r} \left[-(x - c_0) u_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} (U_{i,k}^r \varepsilon^{2k} \Delta^{(k)} u_0^{(n)}) \right], \\ (u_\varphi)_i^{(n)} &= \varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[-(x - c_0) u_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} (U_{i,k}^\varphi \varepsilon^{2k} \Delta^{(k)} u_0^{(n)}) \right]; \\ (\sigma_{rr})_i^{(n)} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\sum_{k=1}^n (\tau_{mm})_i^{(2k)} \varepsilon^{2k} \Delta^{(k-1)} u_0^{(n)} \right] + \\ &+ \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left[\sum_{k=1}^n (\tau_{ss})_i^{(2k)} \varepsilon^{2k} \Delta^{(k-1)} u_0^{(n)} \right], \\ (\sigma_{r\varphi})_i^{(n)} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left[\sum_{k=1}^n ((\tau_{mm})_i^{(2k)} - (\tau_{ss})_i^{(2k)}) \varepsilon^{2k} \Delta^{(k-1)} u_0^{(n)} \right], \\ (\sigma_{\varphi\varphi})_i^{(n)} &= \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left[\sum_{k=1}^n (\tau_{mm})_i^{(2k)} \varepsilon^{2k} \Delta^{(k-1)} u_0^{(n)} \right] + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\sum_{k=1}^n (\tau_{ss})_i^{(2k)} \varepsilon^{2k} \Delta^{(k-1)} u_0^{(n)} \right], \\ (\sigma_{xx})_i^{(n)} &= \sum_{k=2}^n (\tau_{xx})_i^{(2k)} \varepsilon^{2k} \Delta^{(k)} u_0^{(n)}, \\ (\sigma_{rx})_i^{(n)} &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial r} \left[\sum_{k=1}^n (\tau_{\gamma x})_i^{(2k+1)} \varepsilon^{2k} \Delta^{(k)} u_0^{(n)} \right], \\ (\sigma_{\varphi x})_i^{(n)} &= \varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\sum_{k=1}^n (\tau_{\gamma x})_i^{(2k+1)} \varepsilon^{2k} \Delta^{(k)} u_0^{(n)} \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Из равенств (27) и выражений (33) легко получаются формулы для внутренних усилий в цилиндрической системе отсчета

$$(M_{rr})^n = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\sum_{k=1}^n D_k \varepsilon^{2k} \Delta^{(k-1)} u_0^{(n)} \right] -$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left[\sum_{k=1}^n (I_{ss})^{(2k)} \varepsilon^{2k} \Delta^{(k-1)} u_0^{(n)} \right], \\
(M_{r\varphi})^{(n)} &= - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left[\sum_{k=1}^n (D_k - (I_{ss})^{(2k)}) \varepsilon^{2k} \Delta^{(k-1)} u_0^{(n)} \right], \\
(M_{\varphi\varphi})^{(n)} &= - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left[\sum_{k=1}^n D_k \varepsilon^{2k} \Delta^{(k-1)} u_0^{(n)} \right] - \\
& - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\sum_{k=1}^n (I_{ss})^{(2k)} \varepsilon^{2k} \Delta^{(k-1)} u_0^{(n)} \right], \\
(Q_{rx})_i^{(n)} &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial r} \left[\sum_{k=1}^n (G_{\gamma x})^{(2k+1)} \varepsilon^{2k} \Delta^{(k)} u_0^{(n)} \right], \\
(Q_{\varphi x})^{(n)} &= \varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\sum_{k=1}^n (G_{\gamma x})^{(2k+1)} \varepsilon^{2k} \Delta^{(k)} u_0^{(n)} \right], \\
(N_{r\varphi})^{(n)} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left[\sum_{k=1}^n (G_{ss})^{(2k)} \varepsilon^{2k} \Delta^{(k-1)} u_0^{(n)} \right], \\
(N_{\varphi\varphi})^{(n)} &= - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\sum_{k=1}^n (G_{ss})^{(2k)} \varepsilon^{2k} \Delta^{(k-1)} u_0^{(n)} \right], \\
(N_{rr})^{(n)} &= - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left[\sum_{k=1}^n (G_{ss})^{(2k)} \varepsilon^{2k} \Delta^{(k-1)} u_0^{(n)} \right]. \tag{34}
\end{aligned}$$

В формулах (34) использованы интегральные характеристики характеристических функций

$$(I_{ss})^{(2k)} = - \sum_{i=1}^s \int_{h_i}^{h_{i+1}} (x - c_0) (\tau_{ss})_i^{(2k)} dx, \quad (G_{ss})^{(2k)} = - \sum_{i=1}^s \int_{h_i}^{h_{i+1}} (\tau_{ss})_i^{(2k)} dx. \tag{35}$$

Рассмотрим осесимметричную задачу, в этом случае функция прогиба и поперечная нагрузка зависят только от радиуса r . Известно свойство оператора Лапласа

$$\Delta^{(1)} r^m = m^2 r^{m-2}. \tag{36}$$

Предположим, что поперечная нагрузка p_x является многочленом четной степени $2m$ и содержит только четные степени переменной r , тогда

$$\Delta^{(k)} p_x = 0, \quad k \geq m + 1, \tag{37}$$

т.е. поперечная нагрузка является $(m + 1)$ -гармонической функцией. Тогда в соответствии со сказанным выше формулы для перемещений

$$(u_x)_i^{(n)} = u_0^{(n)} + \sum_{k=1}^n (U_{i,k}^x \varepsilon^{2k} \Delta^{(k)} u_0^{(n)}),$$

$$(u_r)_i^{(n)} = \varepsilon \frac{d}{dr} \left[-(x - c_0)u_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} (U_{i,k}^Y \varepsilon^{2k} \Delta^{(k)} u_0^{(n)}) \right],$$

$$(u_\varphi)_i^{(n)} = 0, \quad n \geq m + 3, \quad (38)$$

основанные на решениях уравнения (26) для функции прогиба, образуют точное решение пространственной полукраевой задачи (1)–(5).

Парадокс параболического штампа. Известен парадокс, широко освещенный в литературе (Н.А. Алфутов [5], В.В. Васильев [6] и др.), когда штамп параболической формы $(1 - r^2)$ давит на пластину. Считается, что верхняя поверхность пластины копирует поверхность штампа. В соответствии с классической теорией изгиба функция прогиба u_0 совпадает с профилем штампа

$$u_0 = u_M (1 - r^2).$$

При ее подстановке в уравнение Софи Жермен (23) получается, что поперечная нагрузка, действующая со стороны штампа на пластину, равна нулю. А этого не может быть.

Воспользуемся формулами (6) и (1) для изучения данного парадокса, пусть штамп является параболоидом степени $2m$. Предположим, что верхняя поверхность пластины в точках взаимодействия копирует его форму и выполняются равенства

$$u_0^{(n)} + \sum_{k=1}^n (U_{i,k}^x \varepsilon^{2k} \Delta^{(k)} u_0^{(n)}) \Big|_{x=0} = u_M (1 - r^{2m}), \quad (39)$$

$$\sum_{k=2}^n \varepsilon^{2(k-2)} \beta_{k-2} \Delta^{(k)} u_0^{(n)} = \frac{p_x}{\varepsilon^4 D_1}. \quad (40)$$

В рамках изложенной теории нас интересуют функции прогиба, регулярно зависящие от малого параметра, поэтому из равенства (39) следует, что функция прогиба является многочленом степени $2m$. Тогда из равенства (40) следует, что при $m \geq 2$ поперечная нагрузка является многочленом степени $(2m - 4)$, и, следовательно, в соответствии со сказанным выше формулы (38) при $n \geq m + 1$ являются точным решением полукраевой задачи (1)–(5). Если же $m = 1$, то получается тот же парадокс, что и при использовании классической теории. Обратим внимание на то обстоятельство, что при $m \geq 2$ поперечная распределенная нагрузка p_x является отрицательной, например, при $m = 2$ отрицательной постоянной нагрузкой. Отрицательная нагрузка действует не со стороны штампа, т.е. ее причиной является не штамп, а другое тело. Следовательно, смысл этой нагрузки заключается в том, что она необходимо должна быть приложена к пластине одновременно с воздействием на нее штампа с целью придания пластине его формы. Это возможно только в том случае, если воздействие штампа на пластину имеет сосредоточенный характер в начале координат. Сосредоточенная нагрузка является нагрузкой, которая на малой площадке меняется от нуля до своего максимума. Для столь быстро меняющихся нагрузок условия

(22) заведомо не выполняются, и формулы (38) не являются решением даже в асимптотическом смысле. Отсутствие решения с особой наглядностью проявляется для параболического штампа при $m = 1$, однако и в остальных случаях имеет место тот же парадокс. Естественно, что на практике при действительном нагружении в месте сосредоточенного воздействия достаточно быстро начинают развиваться пластические деформации, благодаря которым собственно и происходят копирование пластиной формы штампа и перераспределение нагрузки, действующей на пластину.

Окончательно сделаем вывод: парадокс заключался в необоснованном предположении о копировании упругой пластиной формы параболического штампа.

Круглые и кольцевые пластины. Рассмотрим кольцевую пластину под действием равномерно распределенной нагрузки, приложенной к ее верхней и нижней поверхностям. Для получения точного решения полукраевой задачи (1)–(5) достаточно взять $n = 2$. Уравнение изгиба (23) имеет общее решение

$$u_0^{(2)} = \frac{P_x}{\varepsilon^4 D_1} \left(c_1 + c_2 r^2 + c_3 \ln r + c_4 r^2 \ln r + \frac{r^4}{64} \right), \quad (41)$$

где c_i — константы интегрирования.

Для получения компонент тензора напряжений для круглой слоистой плиты под действием равномерной нагрузки воспользуемся формулами (4.1.127), для этого подставим в них функцию прогиба (4.1.145):

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr})_i^{(2)} &= \frac{P_x}{\varepsilon^2 D_1} \left((\tau_{mm})_i^{(2)} \left(2c_2 + \frac{3}{16} r^2 \right) + (\tau_{mm})_i^{(4)} \frac{\varepsilon^2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + (\tau_{ss})_i^{(2)} \left(2c_2 + \frac{r^2}{16} \right) + (\tau_{ss})_i^{(4)} \frac{\varepsilon^2}{2} \right), \\ (\sigma_{\varphi\varphi})_i^{(2)} &= \frac{P_x}{\varepsilon^2 D_1} \left((\tau_{mm})_i^{(2)} \left(2c_2 + \frac{r^2}{16} \right) + (\tau_{mm})_i^{(4)} \frac{\varepsilon^2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + (\tau_{ss})_i^{(2)} \left(2c_2 + \frac{3}{16} r^2 \right) + (\tau_{ss})_i^{(4)} \frac{\varepsilon^2}{2} \right), \\ (\sigma_{xx})_i^{(2)} &= (\tau_{xx})_i^{(4)} \frac{P_x}{D_1}, \quad (\sigma_{rx})_i^{(n)} = \frac{P_x}{\varepsilon D_1} \frac{E_i}{1 - \nu_i^2} \left((x - 0.5)^2 - 0.25 \right) \frac{r}{4}, \quad (\sigma_{r\varphi})_i^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Для круглой пластины, шарнирно опертой по контуру, справедливы равенства

$$c_3 = c_4 = 0, \quad u_0^{(2)}|_{r=1} = 0, \quad (M_{rr})^{(2)}|_{r=1} = 0. \quad (43)$$

Подставим формулу (4.1.145) в два последних равенства (4.1.147) и воспользуемся формулами (4.1.133), тогда коэффициенты принимают значения

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{64} + \left(\frac{1}{16} \left(3 + \frac{(I_{ss})^{(2)}}{D_1} \right) + \left(\frac{D_2}{D_1} + \frac{(I_{ss})^{(4)}}{D_1} \right) \frac{\varepsilon^2}{2} \right) / 2 \left(1 + \frac{(I_{ss})^{(2)}}{D_1} \right), \\ c_2 &= -\left(\frac{1}{16} \left(3 + \frac{(I_{ss})^{(2)}}{D_1} \right) + \left(\frac{D_2}{D_1} + \frac{(I_{ss})^{(4)}}{D_1} \right) \frac{\varepsilon^2}{2} \right) / 2 \left(1 + \frac{(I_{ss})^{(2)}}{D_1} \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Формулы (41)–(44) дают точное решение пространственной задачи теории упругости об изгибе шарнирно опертой пластины с произвольным числом слоев под действием равномерно распределенной нагрузки.

Однородная однослойная плита. Пусть нагрузка равномерно распределена на верхней и нижней поверхностях плиты. Краевые задачи (12)–(15) для однородной однослойной плиты при $k = 1, 2$ имеют очевидные решения (номер слоя опускаем):

$$\begin{aligned}
 U_1^x &= \frac{\nu}{(1-\nu)} \frac{(x-0.5)^2}{2}, \quad (\tau_{xx})^{(2)} = 0, \quad (\tau_{mm}) = -\frac{E}{1-\nu^2}(x-0.5), \\
 (\tau_{ss})^{(2)} &= -\frac{\nu E}{1-\nu^2}(x-0.5), \quad (\tau_{yx})^{(3)} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{(x-0.5)^2}{2} - \frac{1}{8} \right), \quad k_t^q = k_b^q = 0.5, \\
 (\tau_{xx})^{(4)} &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{(x-0.5)^3}{6} - \frac{1}{8}(x-0.5) \right), \\
 (\tau_{ss})^{(4)} &= \frac{\nu E}{1-\nu^2} \left(\frac{(x-0.5)^3}{6} - \frac{1}{8} \frac{1}{1-\nu}(x-0.5) \right), \\
 (\tau_{mm})^{(4)} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{(x-0.5)^3}{3} - \frac{1}{8} \frac{2-\nu}{1-\nu}(x-0.5) \right), \\
 U_1^\gamma &= \frac{2-\nu}{1-\nu} \frac{(x-0.5)^3}{6} - \frac{0.25}{1-\nu}(x-0.5), \\
 D_2 &= \beta_1 D_1, \quad \beta_1 = \frac{1.2-0.45\nu}{6(1-\nu)}, \quad (I_{ss})^{(4)} = \frac{\nu(0.4+0.1\nu)}{4(1-\nu)} D_1. \quad (45)
 \end{aligned}$$

Подставим формулы (45) в выражения для коэффициентов (44) и далее в равенство (41), тогда функция прогиба принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 u_0^{(2)} &= \frac{1}{64 \varepsilon^4 D_1} \left(\left(\frac{(5+\nu)}{(1+\nu)} + 4 \frac{0.8+0.1\nu+0.1\nu^2}{(1-\nu^2)} \varepsilon^2 \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{2(3+\nu)}{(1+\nu)} + 4 \frac{0.8+0.1\nu+0.1\nu^2}{(1-\nu^2)} \varepsilon^2 \right) r^2 + r^4 \right). \quad (46)
 \end{aligned}$$

Формула (46) совпадает с прогибом средней поверхности круглой плиты при той же нагрузке, полученным с помощью символического метода [4]. Если в формуле (46) пренебречь слагаемыми, содержащими вторую степень параметра ε , то функция прогиба совпадет с функцией прогиба, получаемой на основе гипотезы Кирхгофа–Лява.

Формулы (42) с помощью характеристических функций (45) принимают вид

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{\varphi\varphi})^{(2)} &= \frac{3p_x}{\varepsilon^2} \left(\left(\frac{(3+\nu)}{4} - \frac{(1+3\nu)}{4} r^2 \right) (x-0.5) + \right. \\
 &\quad \left. + \left((2+\nu) \frac{(x-0.5)^3}{3} - \frac{1}{20} (2+\nu)(x-0.5) \right) \varepsilon^2 \right), \\
 (\sigma_{rr})^{(2)} &= \frac{3p_x}{\varepsilon^2} \left((x-0.5) \frac{(3+\nu)}{4} (1-r^2) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left((2 + \nu) \frac{(x - 0.5)^3}{3} - \frac{1}{20} (2 + \nu) (x - 0.5) \right) \varepsilon^2, \\
(\sigma_{rx})^{(2)} &= \frac{3p_x}{\varepsilon} \left((x - 0.5)^2 - 0.25 \right) r, \\
(\sigma_{xx})^{(2)} &= - \left(2(x - 0.5)^3 - 1.5(x - 0.5) \right) p_x. \tag{47}
\end{aligned}$$

Формула (47) для компоненты $(\sigma_{rr})^{(2)}$ полностью совпадает с решением, полученным с помощью подбора функции напряжения в виде полинома [7], и с решением, полученным символическим методом [4]. Продольные усилия, действующие в плоскости плиты, тождественно равны нулю

$$(N_{rr})^{(2)} = 0, \quad (N_{r\varphi})^{(2)} = 0.$$

Таким образом, предложенный метод позволяет не только строить асимптотические решения пространственной задачи изгиба слоистых неоднородных плит, но и точные решения в случае полигармонических нагрузок. При этом для однородных однослойных плит полученные решения совпадают с результатами, полученными другими известными методами.

Литература

- [1] Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 2001. 288 с.
- [2] Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. Поперечный изгиб многослойных плит в трехмерной постановке // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Труды XVIII Межреспубликанской конференции, ИТПМ СО РАН, Кемерово, 1–3 июля 2003 г. / Под ред. В.М. Фомина. Новосибирск: Нонпарель, 2003. С. 230–244.
- [3] Доннелл Л.Г. Балки, пластины, оболочки. М.: Наука, 1982. 567 с.
- [4] Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 540 с.
- [5] Алфутов Н.А. О некоторых парадоксах теории тонких упругих пластин // Изв. РАН. МТТ. 1992. №3. С. 65–72.
- [6] Васильев В.В. О теории тонких пластин // Изв. РАН. МТТ. 1992. №3. С. 26–47.
- [7] Тимошенко С.П. Теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, ГТТИ. 1934. 452 с.

Поступила в редакцию 20/I/2005;
в окончательном варианте — 16/V/2005.

**ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL
ELASTICITY PROBLEM FOR CIRCULAR AND
RING-SHAPED PLATES⁴**© 2005 G.L. Gorynin,⁵ Y.V. Nemirovskiy⁶

In the present paper the three-dimensional elasticity bending problem of layered plates is reduced to one-dimensional and two-dimensional boundary-value problems by the asymptotic splitting method. The obtained solutions permit to obtain the asymptotic approximations for all components of displacement vector and stress tensor. Under polyharmonic distributed external load the given high order approximations are the exact solutions of the corresponding three-dimensional elasticity problem with traditional integral conditions on a plate edge. The resolving equation for the first order approximation is the same due to S. Germen and for the second due to Timoshenko—Donnell.

Paper received 20/I/2005.

Paper accepted 16/V/2005.

⁴Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Y.N. Radayev.⁵Gorynin Gleb Leonidovich, Dept. of Structural Technology and Design, Ugra State University, Khanty—Mansiysk, 628012, Russia.⁶Nemirovsky Yuri Vladimirovich, Institute of Theoretical and Applied Mechanics of Siberian Branch of Russian Academy of Science, Novosibirsk, 630090, Russia.