

УДК 539.3

**РАСЧЕТ БЕЗМОМЕНТНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ
ПО МЕТОДУ КВАДРАТУР¹**© 2005 И.С. Ахмедьянов²

Работа посвящена применению численного метода квадратур к интегрированию дифференциальных уравнений безмоментной теории оболочек вращения. Метод состоит в том, что исходная система дифференциальных уравнений задачи сначала преобразуется в интегральную. Затем к появляющимся при этом интегралам с переменным верхним пределом и применяется квадратурная формула трапеций.

Введение

1. Предлагаемая работа посвящена применению численного метода квадратур к интегрированию дифференциальных уравнений безмоментной теории оболочек вращения. Суть этого метода состоит в том, что исходная система дифференциальных уравнений решаемой задачи сначала преобразуется в интегральную. Затем ко всем появляющимся при этом интегралам с переменными верхними пределами применяется квадратурная формула трапеций, что позволяет составить систему линейных алгебраических уравнений для определения значений искомых функций с заданным постоянным шагом t . В результате таким способом удастся получить численные значения всех частных решений рассматриваемой системы дифференциальных уравнений, а затем формально построить и ее общее решение, содержащее произвольные постоянные. Последние определяются обычным образом из граничных условий по краям заданной оболочки вращения.

В настоящей работе дается изложение способа интегрирования дифференциальных уравнений безмоментной теории гладких оболочек вращения постоянной толщины по методу квадратур. Предполагается, что заданная

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

²Ахмедьянов Исхак Саидович, кафедра прочности летательных аппаратов Самарского государственного аэрокосмического университета, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34а.

оболочка вращения находится под воздействием произвольной поверхностной или краевой нагрузки, симметричной относительно плоскости некоторого меридиана срединной поверхности.

2. В работе приняты следующие основные обозначения:

OX, OY, OZ — оси декартовой прямоугольной системы координат;

θ, φ — угловые (географические) координаты точки срединной поверхности оболочки вращения;

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — единичные векторы касательной к меридиану, касательной к параллели и нормали к срединной поверхности;

R_1, R_2 — главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки вращения;

r — радиус параллели срединной поверхности оболочки вращения;

h — толщина оболочки;

u, v, w — проекции вектора полного перемещения точки срединной поверхности оболочки на направления ортов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma$ — деформации срединной поверхности оболочки вращения;

ϑ_1 — угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки вокруг орта \vec{e}_2 ;

q_1, q_2, q_3 — проекции удельной поверхностной нагрузки на оси $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$;

N_1, N_2 — погонные нормальные силы в сечениях оболочки;

S — погонная сдвигающая сила;

E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки.

Принятые системы координат и положительные направления сил и перемещений показаны на рис. 1 и 2.

1. Основные зависимости безмоментной теории оболочек вращения при симметричном нагружении

1.1. Если оболочка вращения с произвольной формой меридиана находится под действием краевой или поверхностной нагрузки, симметричной относительно плоскости меридиана $\varphi = 0$ (рис. 1), то выражения для внешних нагрузок q_1, q_2, q_3 , внутренних усилий N_1, N_2, S и перемещений u, v, w, ϑ_1 можно представить в виде следующих тригонометрических рядов [1]:

$$\begin{aligned} & (q_1, q_3, N_1, N_2, u, w, \vartheta_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} (q_{1n}, q_{3n}, N_{1n}, N_{2n}, u_n, w_n, \vartheta_{1n}, \varepsilon_{1n}, \varepsilon_{2n}) \cos n\varphi, \\ & (q_2, S, v, \gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} (q_{2n}, S_n, v_n, \gamma_n) \sin n\varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь N_{1n}, \dots, γ_n — некоторые функции координаты x , определяемые общим

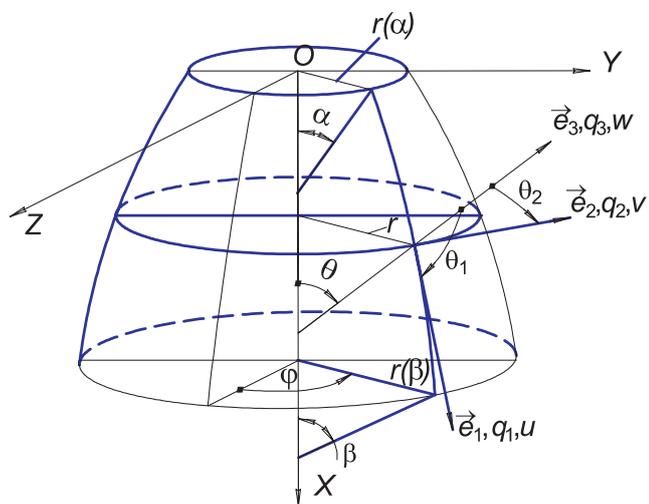


Рис. 1.

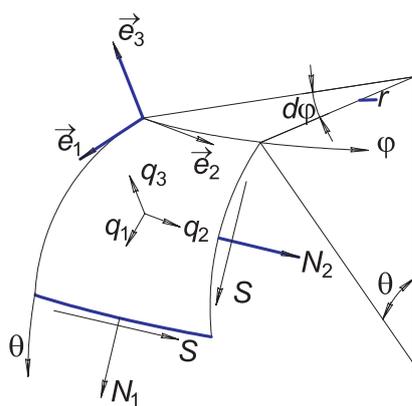


Рис. 2.

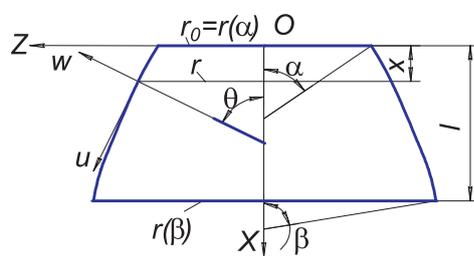


Рис. 3.

решением системы дифференциальных уравнений безмоментной теории оболочек вращения (x — расстояние плоскости произвольной параллели срединной поверхности оболочки от верхнего края $\theta = \alpha$ с радиусом параллели r_0 , рис. 3).

1.2. Усилия N_{1n} , N_{2n} и S_n удовлетворяют следующим уравнениям равновесия [1]:

$$\frac{d}{ds}(N_{1n}r) + nS_n - N_{2n} \cos \theta = -rq_{1n}, \quad (2)$$

$$-nN_{2n} + \frac{1}{r} \frac{d}{ds}(S_n r^2) = -rq_{2n}, \quad (3)$$

$$\frac{N_{1n}}{R_1} + \frac{\sin \theta}{r} N_{2n} = q_{3n}. \quad (4)$$

Здесь ds — элемент дуги меридиана оболочки вращения:

$$ds = R_1 d\theta.$$

Связь между деформациями и перемещениями [1]:

$$\varepsilon_{1n} = \frac{du_n}{ds} + \frac{w_n}{R_1}, \quad (5)$$

$$\varepsilon_{2n} = \frac{\cos \theta}{r} u_n + \frac{nv_n}{r} + \frac{\sin \theta}{r} w_n, \quad (6)$$

$$\gamma_n = -\frac{n}{r} u_n + r \frac{d}{ds} \left(\frac{v_n}{r} \right). \quad (7)$$

С другой стороны

$$\varepsilon_{1n} = \frac{1}{Eh} (N_{1n} - \mu N_{2n}), \quad (8)$$

$$\varepsilon_{2n} = \frac{1}{Eh} (N_{2n} - \mu N_{1n}), \quad (9)$$

$$\gamma_n = \frac{2(1 + \mu)}{Eh} S_n. \quad (10)$$

Для угла поворота нормали ϑ_{1n} имеем [1]:

$$\vartheta_{1n} = \frac{u_n}{R_1} - \frac{dw_n}{ds}, \quad (11)$$

где, согласно (6), будет:

$$w_n = -u_n \operatorname{ctg} \theta - \frac{n}{\sin \theta} v_n + R_2 \varepsilon_{2n}. \quad (12)$$

1.3. В качестве основных неизвестных примем произведения $(N_{1n}r)$, $(S_n r)$ и соответствующие им перемещения u_n и v_n . Остальные неизвестные (N_{2n} , w_n и ϑ_{1n}) удастся выразить через основные искомые функции.

Для определения основных неизвестных необходимо располагать соответствующей системой дифференциальных уравнений. Обратимся к выводу этих уравнений.

Перепишем уравнения (2) и (3) в следующем виде:

$$\frac{d}{ds}(N_{1n}r) = -nS_n + N_{2n} \cos \theta - rq_{1n}, \quad (13)$$

$$\frac{d}{ds}(S_n r) = -S_n \cos \theta + nN_{2n} - r q_{2n}. \quad (14)$$

Из (4) выводим:

$$N_{2n} = -\frac{r}{\sin \theta} \frac{N_{1n}}{R_1} + \frac{r}{\sin \theta} q_{3n}. \quad (15)$$

Подставив в (13) и (14) выражение (15), получаем первые два из иско-
мых дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{ds}(N_{1n} r) = -\frac{\text{ctg } \theta}{R_1} (N_{1n} r) - \frac{n}{r} (S_n r) + r(-q_{1n} + q_{3n} \text{ctg } \theta), \quad (16)$$

$$\frac{d}{ds}(S_n r) = -\frac{n}{R_1 \sin \theta} (N_{1n} r) - \frac{\cos \theta}{r} (S_n r) + r\left(-q_{2n} + \frac{n}{\sin \theta} q_{3n}\right). \quad (17)$$

Соотношения (16) и (17) справедливы для всех $n \geq 0$.

1.4. Для получения третьего дифференциального уравнения обратимся к равенству (5), из которого следует:

$$\frac{du_n}{ds} = \varepsilon_{1n} - \frac{w_n}{R_1}. \quad (18)$$

Здесь перемещение w_n выражается формулой (12).

Найдем последовательно деформации ε_{1n} и ε_{2n} . Имеем по (15):

$$Eh\varepsilon_{1n} = N_{1n} - \mu N_{2n} = \frac{N_{1n} r}{\sin \theta} \left(\frac{\sin \theta}{r} + \frac{\mu}{R_1} \right) - \frac{\mu r}{\sin \theta} q_{3n}. \quad (19)$$

Далее выводим:

$$Eh\varepsilon_{2n} = N_{2n} - \mu N_{1n} = -\frac{N_{1n} r}{\sin \theta} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\mu \sin \theta}{r} \right) + \frac{r}{\sin \theta} q_{3n}. \quad (20)$$

Внося в (18) выражения (19) и (12), с учетом (20), получаем третье
дифференциальное уравнение задачи:

$$\frac{du_n}{ds} = \frac{(N_{1n} r)}{Ehr} \left(1 + 2\mu \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) + \frac{\text{ctg } \theta}{R_1} u_n + \frac{n}{R_1 \sin \theta} v_n - \frac{R_2 q_{3n}}{Eh} \left(\mu + \frac{R_2}{R_1} \right). \quad (21)$$

Здесь

$$R_2 = \frac{r}{\sin \theta}. \quad (22)$$

1.5. Для вывода последнего четвертого уравнения обратимся к равен-
ству (7). Из него можно получить, используя (10):

$$\frac{dv_n}{ds} = \frac{2(1 + \mu)}{Ehr} (S_n r) + \frac{n}{r} u_n + \frac{\cos \theta}{r} v_n. \quad (23)$$

1.6. Соотношения (16), (17), (21) и (23) образуют систему четырех диф-
ференциальных уравнений, из которой могут быть определены все четыре
основные искомые функции $(N_{1n} r)$, $(S_n r)$, u_n и v_n .

1.7. Уравнения (16), (17), (21) и (23) целесообразно преобразовать к
безразмерному виду, приняв

$$y_1 = \frac{N_{1n} r}{Ehr_0}, \quad y_2 = \frac{S_n r}{Ehr_0}, \quad y_3 = \frac{u_n}{h}, \quad y_4 = \frac{v_n}{h} \quad (24)$$

и одновременно перейдя к новому безразмерному аргументу ξ (рис. 3):

$$\xi = \frac{x}{l}. \quad (25)$$

Здесь l — длина (высота) оболочки, измеряемая вдоль ее оси вращения. Так как $dx = ds \sin \theta$,

то

$$\frac{d}{ds} (*) = \sin \theta \frac{d}{dx} (*) = \frac{\sin \theta}{l} \frac{d}{d\xi} (*). \quad (26)$$

Используя зависимости (24) и (25), систему уравнений (16), (17), (21) и (23) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} y'_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + f_{1q}, \\ y'_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + f_{2q}, \\ y'_3 &= a_{31}y_1 + a_{33}y_3 + a_{34}y_4 + f_{3q}, \\ y'_4 &= a_{42}y_2 + a_{43}y_3 + a_{44}y_4. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{l \cos \theta}{R_1 \sin^2 \theta}, \quad a_{12} = -\frac{nl}{r \sin \theta}, \quad a_{21} = -\frac{nl}{R_1 \sin^2 \theta}, \quad a_{22} = -\frac{l \operatorname{ctg} \theta}{r}, \\ a_{31} &= \frac{lr_0}{hr \sin \theta} \left(1 + 2\mu \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2^2}{R_1^2} \right), \quad a_{33} = \frac{l \cos \theta}{R_1 \sin^2 \theta}, \quad a_{34} = \frac{nl}{R_1 \sin^2 \theta}, \\ a_{42} &= \frac{2lr_0(1 + \mu)}{hr \sin \theta}, \quad a_{43} = \frac{nl}{r \sin \theta}, \quad a_{44} = \frac{l \operatorname{ctg} \theta}{r}; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} f_{1q} &= \frac{lR_2}{Ehr_0} (-q_{1n} + q_{3n} \operatorname{ctg} \theta), \quad f_{2q} = \frac{lR_2}{Ehr_0} \left(-q_{2n} + \frac{n}{\sin \theta} q_{3n} \right), \\ f_{3q} &= -\frac{lR_2 q_{3n}}{Eh^2 \sin \theta} \left(\mu + \frac{R_2}{R_1} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

В уравнениях (27) штрих означает производную по аргументу ξ :

$$(*)' = \frac{d}{d\xi} (*).$$

Коэффициенты a_{11}, \dots, a_{44} и величины f_{1q}, f_{2q}, f_{3q} являются функциями аргумента ξ .

В дальнейшем систему уравнений (27) будем называть основной системой.

1.8. Общее решение основной системы (27) для $n \geq 1$ может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1y_{11} + C_2y_{12} + C_3y_{13} + C_4y_{14} + y_{1q}, \\ y_2 &= C_1y_{21} + C_2y_{22} + C_3y_{23} + C_4y_{24} + y_{2q}, \\ y_3 &= C_1y_{31} + C_2y_{32} + C_3y_{33} + C_4y_{34} + y_{3q}, \\ y_4 &= C_1y_{41} + C_2y_{42} + C_3y_{43} + C_4y_{44} + y_{4q}. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь $(y_{11}, y_{21}, y_{31}, y_{41}), \dots, (y_{14}, y_{24}, y_{34}, y_{44})$ — частные линейно независимые решения однородной системы уравнений, соответствующей (27):

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \\ y_3' &= a_{31}y_1 + a_{33}y_3 + a_{34}y_4, \\ y_4' &= a_{42}y_2 + a_{43}y_3 + a_{44}y_4. \end{aligned} \quad (31)$$

Функции $y_{1q}, y_{2q}, y_{3q}, y_{4q}$ составляют частное решение неоднородной системы (27), зависящее от вида правых частей f_{1q}, f_{2q}, f_{3q} , т.е. от характера нагружения оболочки вращения.

Вопрос об интегрировании системы (27) методом квадратур для $n \geq 1$ будет рассмотрен ниже.

1.9. В силу особенностей системы (27), очевидно, будет:

$$y_{13} \equiv 0, \quad y_{14} \equiv 0, \quad y_{23} \equiv 0, \quad y_{24} \equiv 0. \quad (32)$$

1.10. Условием линейной независимости совокупности частных решений $(y_{11}, y_{21}, y_{31}, y_{41}), \dots, (y_{14}, y_{24}, y_{34}, y_{44})$ однородной системы уравнений (31) является неравенство нулю определителя

$$D(\xi) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{vmatrix}. \quad (33)$$

В [2] показано, что

$$D(\xi) = D_0 \exp \int_0^\xi (a_{11} + \dots + a_{44}) d\xi.$$

В нашем случае, согласно (28),

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = 0.$$

Поэтому

$$D(\xi) = D_0 = \text{const}. \quad (34)$$

Условие (34) постоянства определителя (33) может быть использовано для контроля правильности вычисления значений функций y_{11}, \dots, y_{44} .

1.11. Для $n = 0$ (осесимметричный случай нагружения оболочки вращения) вместо уравнений (27) будем иметь следующую систему:

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + f_{1q}, \\ y_3' &= a_{31}y_1 + a_{33}y_3 + f_{3q}. \end{aligned} \quad (35)$$

1.12. После определения из уравнений (27) функций y_1, y_2, y_3, y_4 можно найти перемещение w_n и угол поворота нормали ϑ_{1n} .

Для перемещения w_n можно получить следующую формулу, используя (12), (9) и (15):

$$w_n = -u_n \operatorname{ctg} \theta - \frac{n}{\sin \theta} v_n - \frac{R_2 N_{1n}}{Eh} \left(\mu + \frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{R_2^2 q_{3n}}{Eh}. \quad (36)$$

1.13. Угол поворота нормали ϑ_{1n} определяется зависимостью (11). Имеем по (36):

$$\begin{aligned} \frac{dw_n}{ds} &= \frac{u_n}{R_1 \sin^2 \theta} - \frac{du_n}{ds} \operatorname{ctg} \theta + \frac{n \cos \theta}{R_1 \sin^2 \theta} v_n - \frac{n}{\sin \theta} \frac{dv_n}{ds} - \\ &\quad - \frac{N_{1n}}{Eh} \left[\left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) \left(\mu + 2 \frac{R_2}{R_1} \right) \operatorname{ctg} \theta - \frac{R_2^2}{R_1^2} \frac{dR_1}{ds} \right] - \\ &\quad - \frac{R_2}{Eh} \left(\mu + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{dN_{1n}}{ds} + \frac{d}{ds} \left(\frac{R_2^2 q_{3n}}{Eh} \right). \end{aligned} \quad (37)$$

При выводе этого выражения были использованы соотношения:

$$\frac{dR_2}{ds} = \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) \operatorname{ctg} \theta, \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{R_2}{R_1} \right) = \frac{1}{R_1} \left[\left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) \operatorname{ctg} \theta - \frac{R_2}{R_1} \frac{dR_1}{ds} \right],$$

вытекающие из известного равенства [1]

$$\frac{dr}{ds} = \cos \theta.$$

Далее, подставляя в (11) соотношение (37) с учетом (16), (21) и (23), приходим к следующему окончательному выражению для угла поворота нормали ϑ_{1n} :

$$\begin{aligned} \vartheta_{1n} &= \frac{n}{r \sin \theta} (nu_n + v_n \cos \theta) + \frac{N_{1n}}{Eh} \left[\left(1 + \frac{R_2}{R_1} - 2 \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) \operatorname{ctg} \theta - \frac{R_2^2}{R_1^2} \frac{dR_1}{ds} \right] + \\ &\quad + \frac{nS_n}{Eh \sin \theta} \left(2 + \mu - \frac{R_2}{R_1} \right) - \frac{R_2 q_{1n}}{Eh} \left(\mu + \frac{R_2}{R_1} \right) - \\ &\quad - \frac{2R_2 q_{3n}}{Eh} \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) \operatorname{ctg} \theta - \frac{R_2^2}{Eh} \frac{dq_{3n}}{ds}. \end{aligned} \quad (38)$$

Формулы (36) и (38) справедливы для всех $n \geq 0$.

1.14. Будем принимать, что форма меридиана срединной поверхности оболочки вращения задается уравнением (рис. 4):

$$r = r(\xi).$$

Исходя из зависимости

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{dr}{dx} = \frac{1}{l} \frac{dr}{d\xi}$$

и формулы

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta},$$

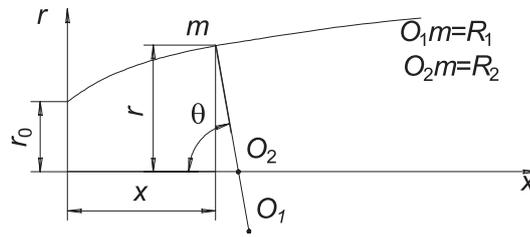


Рис. 4.

получаем:

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2}}. \quad (39)$$

Первый главный радиус кривизны R_1 срединной поверхности оболочки (радиус кривизны меридиана) определяется известной из дифференциальной геометрии формулой:

$$R_1 = -\frac{\left[1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2r}{dx^2}}. \quad (40)$$

Второй главный радиус кривизны R_2 выражается формулой (22).

2. Интегрирование основной системы дифференциальных уравнений методом квадратур

2.1. Рассмотрим сначала однородную систему дифференциальных уравнений (31), соответствующую исходной неоднородной системе (27).

Интегрирование обеих частей каждого из уравнений (31) от некоторого начального значения ξ_0 до произвольного значения

$$\xi_i = \xi_0 + it$$

($i = 1, 2, 3, \dots$; t — постоянный шаг интегрирования) дает:

$$\begin{aligned} y_{1,i} &= y_{1,0} + V_i^{11} + V_i^{12}, \\ y_{2,i} &= y_{2,0} + V_i^{21} + V_i^{22}, \\ y_{3,i} &= y_{3,0} + V_i^{31} + V_i^{33} + V_i^{34}, \\ y_{4,i} &= y_{4,0} + V_i^{42} + V_i^{43} + V_i^{44}. \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь

$$V_i^{jk} = V^{jk}(\xi_i) = \int_{\xi_0}^{\xi_i} a_{jk} y_k d\xi. \quad (42)$$

$$y_{j,0} = y_j(\xi_0), \quad y_{j,i} = y_j(\xi_i), \quad j, k = 1, 2, 3, 4.$$

Для вычисления интеграла (42) воспользуемся квадратурной формулой трапеций. Будем иметь для $i = 1$:

$$V_1^{jk} = \frac{t}{2}(a_{jk,0}y_{k,0} + a_{jk,1}y_{k,1}), \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} a_{jk,0} &= a_{jk}(\xi_0), & a_{jk,1} &= a_{jk}(\xi_1), \\ y_{k,0} &= y_k(\xi_0), & y_{k,1} &= y_k(\xi_1). \end{aligned}$$

Для $i \geq 2$ формула трапеций дает:

$$V_i^{jk} = V_{i-1}^{jk} + \frac{t}{2}(a_{jk,i-1}y_{k,i-1} + a_{jk,i}y_{k,i}). \quad (44)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{jk,i-1} &= a_{jk}(\xi_{i-1}), & a_{jk,i} &= a_{jk}(\xi_i), \\ y_{k,i-1} &= y_k(\xi_{i-1}), & y_{k,i} &= y_k(\xi_i). \end{aligned}$$

Выражения (43) и (44) можно представить в таком виде ($i \geq 1$):

$$V_i^{jk} = F_i^{jk} + \frac{t}{2}a_{jk,i}y_{k,i}, \quad (45)$$

где будет

$$F_i^{jk} = F_{i-1}^{jk} + ta_{jk,i-1}y_{k,i-1} \quad (46)$$

для $i \geq 2$ и

$$F_1^{jk} = \frac{t}{2}a_{jk,0}y_{k,0} \quad (47)$$

для $i = 1$.

Внося (45) в (41), можно после простых преобразований прийти к следующей системе линейных алгебраических уравнений для определения значений функций $y_{j,i}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) при $\xi = \xi_i$ по их предшествующим значениям $y_{j,0}, y_{j,1}, \dots, y_{j,i-1}$:

$$\begin{aligned} A_{11,i}y_{1,i} + A_{12,i}y_{2,i} &= B_{1,i}, \\ A_{21,i}y_{1,i} + A_{22,i}y_{2,i} &= B_{2,i}, \\ A_{33,i}y_{3,i} + A_{34,i}y_{4,i} &= B_{3,i}, \\ A_{43,i}y_{3,i} + A_{44,i}y_{4,i} &= B_{4,i}. \end{aligned} \quad (48)$$

Здесь ($j, k = 1, 2, 3, 4$)

$$\begin{aligned} A_{jk,i} &= -\frac{t}{2}a_{jk,i}, \quad j \neq k; & A_{jj,i} &= 1 - \frac{t}{2}a_{jj,i}; \\ B_{1,i} &= y_{1,0} + F_i^{11} + F_i^{12}, & B_{2,i} &= y_{2,0} + F_i^{21} + F_i^{22}, \\ B_{3,i} &= y_{3,0} + \frac{t}{2}a_{31,i}y_{1,i} + F_i^{31} + F_i^{33} + F_i^{34}, \\ B_{4,i} &= y_{4,0} + \frac{t}{2}a_{42,i}y_{2,i} + F_i^{42} + F_i^{43} + F_i^{44}. \end{aligned} \quad (49)$$

$$B_{4,i} = y_{4,0} + \frac{t}{2}a_{42,i}y_{2,i} + F_i^{42} + F_i^{43} + F_i^{44}. \quad (50)$$

2.2. Задаваясь различными совокупностями значений $y_{j,0}$ ($j = 1, 2, 3, 4$), можно, используя соотношения (48), построить все частные решения однородной системы уравнений (31). Первое частное решение ($y_{11}, y_{21}, y_{31}, y_{41}$) получим, приняв, например, следующие начальные условия по верхнему краю оболочки $\theta = \alpha$ ($\xi_0 = 0$):

$$y_{11,0} = 1, \quad y_{21,0} = 0, \quad y_{31,0} = 1, \quad y_{41,0} = 0.$$

Третье частное решение ($y_{13}, y_{23}, y_{33}, y_{43}$) можно получить при таких начальных условиях ($\xi_0 = 0$):

$$y_{13,0} = 0, \quad y_{23,0} = 0, \quad y_{33,0} = 1, \quad y_{43,0} = 0.$$

При построении первого и третьего частных решений системы (31) интегрирование выполняется от значения $\xi_0 = 0$ до текущего значения ξ_i ($\xi_i \leq 1$) с заданным шагом t . Найденные таким образом решения получают "возрастающими" при движении от верхнего края оболочки вниз.

2.3. Второе ($y_{12}, y_{22}, y_{32}, y_{42}$) и четвертое ($y_{14}, y_{24}, y_{34}, y_{44}$) частные решения найдутся при начальных условиях ($\xi_0 = 1$):

$$\begin{aligned} y_{12,0} = 0, \quad y_{22,0} = 1, \quad y_{32,0} = 0, \quad y_{42,0} = 1, \\ y_{14,0} = 0, \quad y_{24,0} = 0, \quad y_{34,0} = 0, \quad y_{44,0} = 1. \end{aligned}$$

Для получения второго и четвертого частных решений уравнений (31) интегрирование ведется от $\xi_0 = 1$ до текущего значения ξ_i ($\xi_i \geq 0$) с отрицательным шагом t . При этом решения будут "возрастающими" при движении от нижнего края оболочки $\theta = \beta$ вверх.

2.4. Контролем правильности вычисления значений всех четырех частных решений может служить условие постоянства определителя (33).

2.5. Обратимся теперь к нахождению частного решения неоднородной системы (27), соответствующего заданной поверхностной нагрузке. Обозначив искомое частное решение через $y_{1q}, y_{2q}, y_{3q}, y_{4q}$, будем иметь для его определения систему:

$$\begin{aligned} y'_{1q} &= a_{11}y_{1q} + a_{12}y_{2q} + f_{1q}, \\ y'_{2q} &= a_{21}y_{1q} + a_{22}y_{2q} + f_{2q}, \\ y'_{3q} &= a_{31}y_{1q} + a_{33}y_{3q} + a_{34}y_{4q} + f_{3q}, \\ y'_{4q} &= a_{42}y_{2q} + a_{43}y_{3q} + a_{44}y_{4q}. \end{aligned} \tag{51}$$

Функции f_{1q}, f_{2q}, f_{3q} выражаются формулами (29).

По аналогии с тем, что было сделано в п. 2.1, выполним интегрирование правых и левых частей уравнений (51) от $\xi_0 = 0$ до произвольного значения $\xi_i = it$ ($i = 1, 2, 3, \dots$; t — шаг интегрирования):

$$\begin{aligned} y_{1q,i} &= y_{1q,0} + V_i^{11} + V_i^{12} + F_i^{1q}, \\ y_{2q,i} &= y_{2q,0} + V_i^{21} + V_i^{22} + F_i^{2q}, \\ y_{3q,i} &= y_{3q,0} + V_i^{31} + V_i^{33} + V_i^{34} + F_i^{3q}, \end{aligned}$$

$$y_{4q,i} = y_{4q,0} + V_i^{42} + V_i^{43} + V_i^{44}. \quad (52)$$

В этих соотношениях ($j, k = 1, 2, 3, 4$):

$$V_i^{jk} = V^{jk}(\xi_i) = \int_{\xi_0}^{\xi_i} a_{jk} y_{kq} d\xi, \quad (53)$$

$$y_{jq,0} = y_{jq}(0), \quad y_{jq,i} = y_{jq}(\xi_i).$$

Применение квадратурной формулы трапеций к интегралу (53) дает для $i = 1$:

$$V_1^{jk} = \frac{t}{2}(a_{jk,0} y_{kq,0} + a_{jk,1} y_{kq,1}), \quad (54)$$

где

$$\begin{aligned} a_{jk,0} &= a_{jk}(0), & a_{jk,1} &= a_{jk}(\xi_1), \\ y_{kq,0} &= y_{kq}(0), & y_{kq,1} &= y_{kq}(\xi_1). \end{aligned}$$

Для $i \geq 2$ будем иметь

$$V_i^{jk} = V_{i-1}^{jk} + \frac{t}{2}(a_{jk,i-1} y_{kq,i-1} + a_{jk,i} y_{kq,i}). \quad (55)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{jk,i-1} &= a_{jk}(\xi_{i-1}), & a_{jk,i} &= a_{jk}(\xi_i), \\ y_{kq,i-1} &= y_{kq}(\xi_{i-1}), & y_{kq,i} &= y_{kq}(\xi_i). \end{aligned}$$

Выражения (54) и (55), как и ранее, можно записать таким образом ($i \geq 1$):

$$V_i^{jk} = F_i^{jk} + \frac{t}{2} a_{jk,i} y_{kq,i}, \quad (56)$$

где

$$F_i^{jk} = F_{i-1}^{jk} + t a_{jk,i-1} y_{kq,i-1} \quad (57)$$

для $i \geq 2$ и

$$F_1^{jk} = \frac{t}{2} a_{jk,0} y_{kq,0} \quad (58)$$

для $i = 1$.

Далее, функция $F^{jq}(\xi)$ ($j = 1, 2, 3$) определяется формулой

$$F^{jq}(\xi) = \int_0^{\xi} f_{jq} d\xi.$$

Отсюда

$$F_i^{jq} = F^{jq}(\xi_i) = \int_0^{\xi_i} f_{jq} d\xi. \quad (59)$$

Численные значения $F^{jq}(\xi)$ находятся интегрированием по методу трапеций.

Подставив выражения (56) в (52), можно получить следующую систему алгебраических уравнений для вычисления значений функций y_{jq} ($j = 1, 2, 3, 4$) при $\xi = \xi_i$ через их предшествующие значения $y_{jq,0}, y_{jq,1}, \dots, y_{jq,i-1}$:

$$\begin{aligned} A_{11,i}y_{1q,i} + A_{12,i}y_{2q,i} &= B_{1,i}, \\ A_{21,i}y_{1q,i} + A_{22,i}y_{2q,i} &= B_{2,i}, \\ A_{33,i}y_{3q,i} + A_{34,i}y_{4q,i} &= B_{3,i}, \\ A_{43,i}y_{3q,i} + A_{44,i}y_{4q,i} &= B_{4,i}. \end{aligned} \quad (60)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{jk,i} &= -\frac{t}{2}a_{jk,i}, \quad j \neq k; \quad A_{jj,i} = 1 - \frac{t}{2}a_{jj,i}; \\ B_{1,i} &= y_{1q,0} + F_i^{11} + F_i^{12} + F_i^{1q}, \quad B_{2,i} = y_{2q,0} + F_i^{21} + F_i^{22} + F_i^{2q}, \\ B_{3,i} &= y_{3q,0} + \frac{t}{2}a_{31,i}y_{1q,i} + F_i^{31} + F_i^{33} + F_i^{34} + F_i^{3q}, \\ B_{4,i} &= y_{4q,0} + \frac{t}{2}a_{42,i}y_{2q,i} + F_i^{42} + F_i^{43} + F_i^{44} + F_i^{4q}. \end{aligned} \quad (61)$$

Начальные значения $y_{1q,0}, y_{2q,0}, y_{3q,0}, y_{4q,0}$ могут задаваться произвольно. В частности, можно принять:

$$y_{1q,0} = 0, \quad y_{2q,0} = 0, \quad y_{3q,0} = 0, \quad y_{4q,0} = 0.$$

2.6. Полученные результаты позволяют составить общее решение дифференциальных уравнений (27) согласно (30) и записать следующие общие выражения для основных искомых величин в соответствии с (24):

$$N_{1n} = Eh \frac{r_0}{r} (C_1 y_{11} + C_2 y_{12} + y_{1q}), \quad (63)$$

$$S_n = Eh \frac{r_0}{r} (C_1 y_{21} + C_2 y_{22} + y_{2q}), \quad (64)$$

$$u_n = h (C_1 y_{31} + C_2 y_{32} + C_3 y_{33} + C_4 y_{34} + y_{3q}), \quad (65)$$

$$v_n = h (C_1 y_{41} + C_2 y_{42} + C_3 y_{43} + C_4 y_{44} + y_{4q}). \quad (66)$$

Входящие сюда значения произвольных постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 находятся из условий закрепления заданной оболочки вращения по краям $\theta = \alpha$ ($\xi = 0$) и $\theta = \beta$ ($\xi = 1$). Для вычисления усилия N_{2n} и перемещений w_n и ϑ_{1n} можно использовать зависимости (15), (36) и (38).

2.7. Применение метода квадратур к системе уравнений (35) для $n = 0$ (при $\xi_0 = 0, \xi_i = it, i = 1, 2, \dots, t$ — шаг интегрирования) приводит к следующим соотношениям (в обозначениях п. 2.1):

$$y_{1,i} = \frac{B_{1,i}}{A_{11,i}}, \quad y_{3,i} = \frac{B_{3,i}}{A_{33,i}}. \quad (67)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{11,i} &= 1 - \frac{t}{2}a_{11,i}, \quad A_{33,i} = 1 - \frac{t}{2}a_{33,i}, \\ B_{1,i} &= y_{1,0} + F_i^{11} + F_i^{1q}, \end{aligned} \quad (68)$$

$$B_{3,i} = y_{3,0} + \frac{t}{2} a_{31,i} y_{1,i} + F_i^{31} + F_i^{33} + F_i^{3q}; \quad (69)$$

$$F_i^{jk} = F_{i-1}^{jk} + t a_{jk,i-1} y_{k,i-1} \quad (70)$$

для $i \geq 2$ и

$$F_1^{jk} = \frac{t}{2} a_{jk,0} y_{k,0} \quad (71)$$

для $i = 1$.

В выражениях (70) и (71) $j = 1, 3; k = 1, 3$. Кроме того,

$$a_{jk,0} = a_{jk}(0), \quad y_{k,0} = y_k(0), \quad a_{jk,i} = a_{jk}(\xi_i), \quad y_{k,i} = y_k(\xi_i).$$

Значения F_i^{1q} и F_i^{3q} определяются формулами:

$$F_i^{1q} = F^{1q}(\xi_i) = \int_0^{\xi_i} f_{1q} d\xi; \quad F_i^{3q} = F^{3q}(\xi_i) = \int_0^{\xi_i} f_{3q} d\xi. \quad (72)$$

Интегралы (72) вычисляются с использованием квадратурной формулы трапеций.

Применяя выражения (67), можно найти частное решение (y_{1q}, y_{3q}) уравнений (35), соответствующее заданной поверхностной нагрузке, и, далее, построить два линейно независимых частных решения однородной системы уравнений:

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11} y_1, \\ y_3' &= a_{31} y_1 + a_{33} y_3. \end{aligned} \quad (73)$$

Для получения первого частного решения (y_{11}, y_{31}) следует в выражениях (69) положить $(i = 1, 2, 3, \dots)$ $F_i^{1q} = 0, F_i^{3q} = 0$ и принять, например, следующие начальные условия:

$$y_{11,0} = 1, \quad y_{31,0} = 0.$$

Второе частное решение (y_{13}, y_{33}) получится аналогичным образом при

$$y_{13,0} = 0, \quad y_{33,0} = 1.$$

В качестве контроля правильности вычисления значений функций $y_{11}, y_{31}, y_{13}, y_{33}$ можно использовать условие постоянства определителя $D(\xi)$:

$$D(\xi) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{13} \\ y_{31} & y_{33} \end{vmatrix} = \text{const.}$$

Заметим, что по характеру системы уравнений (73):

$$y_{13} = 0.$$

Наконец, частное решение (y_{1q}, y_{3q}) , определяемое поверхностной нагрузкой (q_{10}, q_{30}) , также получается по соотношениям (67) с сохранением в (69) слагаемых F_i^{1q} и F_i^{3q} . Начальные условия могут быть произвольными, в частности, такими:

$$y_{1q,0} = 0, \quad y_{3q,0} = 0.$$

$$w_1 = R_2 \varepsilon_{21} - u_1 \operatorname{ctg} \theta - \frac{v_1}{\sin \theta}. \quad (84)$$

В этих выражениях:

$$M_y = H_y + l \int_0^{\xi} (V_z + \pi R_2 r q_{x1}) d\xi, \quad (85)$$

$$V_z = P_z + \pi l \int_0^{\xi} R_2 (q_{r1} - q_{21}) d\xi, \quad (86)$$

$$q_{r1} = q_{11} \cos \theta + q_{31} \sin \theta, \quad (87)$$

$$q_{x1} = q_{11} \sin \theta - q_{31} \cos \theta, \quad (88)$$

где P_z , H_y — сила и момент, приложенные к оболочке вращения в сечении $\theta = \alpha(\xi = 0)$.

Здесь следует отметить, что уточнение касается формулы (85) для M_y , которая отличается от соответствующей формулы в [1]. Формула (85) более точна, так как она учитывает влияние распределенной нагрузки q_{x1} (рис. 5) на величину момента M_y .

Далее, функции $F_1(\xi)$ и $F_2(\xi)$ имеют вид:

$$F_1 = \int_0^s f ds = l \int_0^{\xi} \frac{f}{\sin \theta} d\xi, \quad (89)$$

$$F_2 = \int_0^s F_1 \sin \theta ds = l \int_0^{\xi} F_1 d\xi, \quad (90)$$

где [1]:

$$f(\xi) = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\frac{\varepsilon_{11}}{R_2} - \frac{\varepsilon_{21}}{R_1} + \frac{d\gamma_1}{ds} \sin \theta + \gamma_1 \cos \theta \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right], \quad (91)$$

$$\gamma_1 = \frac{2(1+\mu)}{Eh} S_1, \quad (92)$$

$$\frac{d\gamma_1}{ds} = \frac{2(1+\mu)}{Eh} \frac{dS_1}{ds}, \quad (93)$$

$$\frac{dS_1}{ds} = \frac{1}{r} (N_{21} - 2S_1 \cos \theta) - q_{21}. \quad (94)$$

2.10. В работе [1] также получено точное решение задачи о напряженно-деформированном состоянии оболочки вращения при осесимметричном нагружении ($n = 0$). В наших обозначениях это решение можно записать следующим образом (рис. 6):

$$N_{10} = -\frac{V_x}{2\pi r \sin \theta}, \quad (95)$$

$$N_{20} = R_2 \left(q_{30} - \frac{N_{10}}{R_1} \right), \quad (96)$$

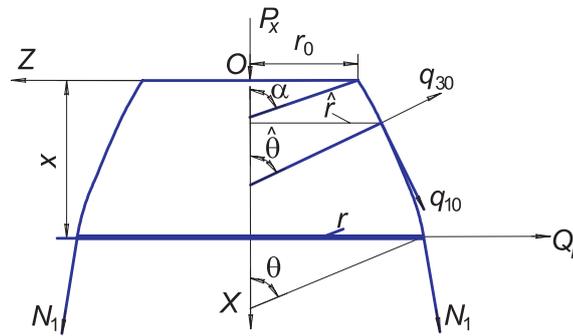


Рис. 6.

где

$$V_x = P_x + 2\pi \int_0^s r q_{x0} ds = P_x + 2\pi l \int_0^{\xi} R_2 q_{x0} d\xi, \quad (97)$$

$$q_{x0} = q_{10} \sin \theta - q_{30} \cos \theta. \quad (98)$$

P_x — осевая сила, приложенная к верхнему краю оболочки $\theta = \alpha(\xi = 0)$.

Из соотношений (5) и (6) можно вывести следующие выражения для перемещений u_0 и w_0 :

$$\begin{aligned} u_0 &= C \sin \theta + \sin \theta \int_0^s \left(\varepsilon_{10} - \frac{R_2}{R_1} \varepsilon_{20} \right) \frac{ds}{\sin \theta} = \\ &= C \sin \theta + l \sin \theta \int_0^{\xi} \left(\varepsilon_{10} - \frac{R_2}{R_1} \varepsilon_{20} \right) \frac{d\xi}{\sin^2 \theta}, \end{aligned} \quad (99)$$

$$w_0 = R_2 \varepsilon_{20} - u_0 \operatorname{ctg} \theta. \quad (100)$$

Здесь

$$\varepsilon_{10} = \frac{1}{Eh} (N_{10} - \mu N_{20}), \quad \varepsilon_{20} = \frac{1}{Eh} (N_{20} - \mu N_{10}), \quad (101)$$

C — произвольная постоянная.

3. Числовые примеры

3.1. Рассмотрим сферическую оболочку, показанную на рис. 7. Ее основные параметры:

$$R = 1000 \text{ мм}, \quad h = 3 \text{ мм}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad \beta = 90^\circ.$$

Модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки:

$$E = 7,2 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad \mu = 0,3.$$

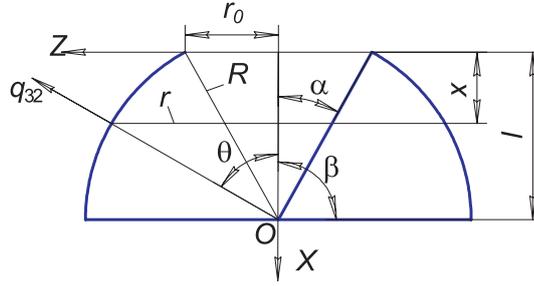


Рис. 7.

Оболочка нагружена нормальным давлением

$$q_3 = q_{32} \cos 2\varphi, \quad (102)$$

где q — некоторая константа, имеющая размерность давления,

$$q_{32} = q \sin^2 \theta. \quad (103)$$

В [2] получено точное решение задачи о распределении усилий и перемещений в сферической оболочке при действии на нее нагрузки (102) (в рамках безмоментной теории оболочек вращения):

$$N_{12} = \frac{Eh}{\sin^2 \theta} \left(C_2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + D_2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{qR}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right), \quad (104)$$

$$N_{22} = -\frac{Eh}{\sin^2 \theta} \left(C_2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + D_2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{qR}{2} \left(\frac{3}{2} \sin^2 \theta - 1 \right), \quad (105)$$

$$S_2 = -\frac{Eh}{\sin^2 \theta} \left(C_2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} - D_2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} \right) - \frac{qR}{2} \cos \theta, \quad (106)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_2}{R} = & C_2 \frac{1+\mu}{12} \left(\frac{4}{\sin \theta} P_1^2 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) - D_2 \frac{1+\mu}{12} \left(\frac{4}{\sin \theta} Q_1^2 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) + \\ & + \left(C_2^* \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + D_2^* \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} \right) \sin \theta + \frac{(1+\mu)qR}{2Eh} \sin \theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (107)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_2}{R} = & -C_2 \frac{1+\mu}{12} \left(\frac{4}{\sin \theta} P_1^2 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) - D_2 \frac{1+\mu}{12} \left(\frac{4}{\sin \theta} Q_1^2 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) + \\ & + \left(C_2^* \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} - D_2^* \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} \right) \sin \theta - \frac{(1+\mu)qR}{2Eh} \sin \theta, \end{aligned} \quad (108)$$

$$\frac{w_2}{R} = \frac{1+\mu}{12} (C_2 P_1^2 + D_2 Q_1^2) + (-C_2^* P_1^2 + D_2^* Q_1^2) + \frac{qR(5+\mu)}{4Eh} \sin^2 \theta, \quad (109)$$

$$\vartheta_{12} = \frac{1+\mu}{6 \sin \theta} (C_2 P_1^2 - D_2 Q_1^2) + \frac{2}{\sin \theta} (C_2^* P_1^2 + D_2^* Q_1^2) - \frac{2qR}{Eh} \sin \theta \cos \theta. \quad (110)$$

Здесь

$$P_1^2 = (2 + \cos \theta) \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}, \quad Q_1^2 = (2 - \cos \theta) \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2}, \quad (111)$$

где C_2, D_2, C_2^*, D_2^* — произвольные постоянные.

3.2. В табл. 1 и 2 приведены результаты расчета сферической оболочки, показанной на рис. 7, на действие давления (102). Расчеты были выполнены по методу квадратур при $q = 0,01$ МПа с шагом интегрирования $t = 1/2000$. Произвольные постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4 , входящие в соотношения (63)–(66), определялись из граничных условий, которые были приняты следующими:

$$u_2(0) = 0, \quad v_2(0) = 0, \quad u_2(1) = 0, \quad v_2(1) = 0.$$

3.3. Для сравнения помимо вычислений по методу квадратур был выполнен расчет по точному решению, представленному в п. 3.1. Результатов этого расчета мы не приводим, так как они совпали с данными табл. 1 и 2 со всеми значащими цифрами. Это говорит о надежности предлагаемого в работе метода квадратур.

Таблица 1

ξ	$N_{12}, \text{ Н/мм}$	$N_{22}, \text{ Н/мм}$	$S_2, \text{ Н/мм}$
0	4,087	-1,587	-3,664
0,10	4,608	-0,683	-2,846
0,20	4,878	0,322	-2,208
0,30	5,043	1,282	-1,594
0,40	5,129	2,171	-0,970
0,50	5,138	2,987	-0,320
0,60	5,064	3,736	0,367
0,70	4,899	4,426	1,105
0,80	4,625	5,075	1,911
0,90	4,221	5,704	2,808
1	3,654	6,346	3,831

Таблица 2

ξ	$u_2 \cdot 10^3, \text{ мм}$	$v_2 \cdot 10^3, \text{ мм}$	$w_2 \cdot 10^3, \text{ мм}$	$\vartheta_{12} \cdot 10^6$
0	0	0	-13,02	-128,3
0,10	4,064	-5,436	2,735	-80,06
0,20	5,933	-8,386	12,28	-59,82
0,30	6,630	-9,998	19,02	-46,00
0,40	6,588	-10,68	23,91	-33,87
0,50	6,047	-10,59	27,29	-21,94
0,60	5,159	-9,832	29,32	-9,671
0,70	4,036	-8,419	30,04	3,165
0,80	2,760	-6,344	29,47	16,68
0,90	1,398	-5,564	27,58	30,96
1	0	0	24,31	46,11

3.4. В качестве второго примера выполним расчет уже рассмотренной сферической оболочки на действие ветровой нагрузки (рис. 8):

$$q_3 = q_{31} \cos \varphi = q \sin \theta \cos \varphi. \tag{112}$$

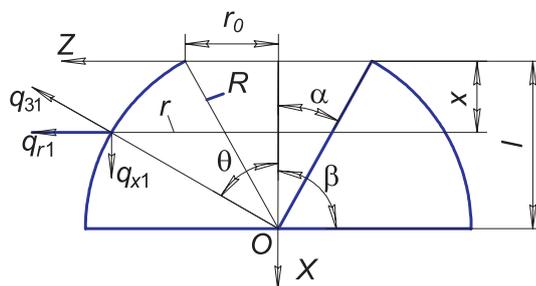


Рис. 8.

Граничные условия примем следующими:

$$N_{11}(0) = 0, \quad S_1(0) = 0, \quad u_1(1) = 0, \quad v_1(1) = 0.$$

Расчеты по методу квадратур при $q = 0,01$ МПа привели к результатам, представленным в табл. 3 и 4. Шаг интегрирования $t = 1/2000$.

Таблица 3

ξ	N_{11} , Н/мм	N_{21} , Н/мм	S_1 , Н/мм
0	0	5,000	0
0,10	0,885	5,380	1,136
0,20	1,248	5,393	1,801
0,30	1,417	6,536	2,337
0,40	1,472	7,072	2,833
0,50	1,440	7,574	3,326
0,60	1,330	8,051	3,840
0,70	1,141	8,515	4,393
0,80	0,867	8,982	5,004
0,90	0,493	9,469	5,695
1	0	10,00	6,495

Таблица 4

ξ	$u_1 \cdot 10^3$, мм	$v_1 \cdot 10^3$, мм	$w_1 \cdot 10^3$, мм	$\vartheta_{11} \cdot 10^6$
0	55.86	-53.21	32.83	-1.002
0,10	49.45	-49.25	40.77	3.007
0,20	43.50	-44.73	46.11	7.016
0,30	37.74	-39.92	49.72	11.03
0,40	32.11	-34.90	52.02	15.04
0,50	26.58	-29.69	53.24	19.04
0,60	21.13	-24.28	53.50	23.05
0,70	15.77	-18.65	52.90	27.06
0,80	10.47	-12.75	51.49	31.07
0,90	5.218	-6.561	49.29	35.08
1	0	0	46.30	39.09

Из табл. 3 видно, что по мере приближения к нижнему краю оболочки ($\xi = 1$) меридиональное усилие N_{11} падает до нулевого значения. Это объяс-

няется влиянием момента от составляющей q_{x1} ветровой нагрузки (рис. 5 и 8).

3.5. Кроме расчета по методу квадратур были выполнены вычисления по формулам точного решения, представленного в п. 2.9. Они привели к результатам, полностью совпавшим со значениями N_{11}, \dots, Φ_{11} , представленными в табл. 3 и 4. Расчеты же по формулам из [1] ($n = 1$) дают другие результаты для N_{11} и N_{21} .

Литература

- [1] Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. М.: Машиностроение, 1977. 477 с.
- [2] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. 6-е изд. М.: Гостехиздат, 1953. 483 с.
- [3] Ахмедьянов И.С. Расчет сферических оболочек с вырезами и подкреплениями. Ч. 1. Метод расчета и некоторые приложения / Куйбышев. авиац. ин-т. Куйбышев, 1987. 185 с. Деп. в ВИНТИ 3.11.87, №7716–В87.

Поступила в редакцию 9/XII/2004;
в окончательном варианте — 9/XII/2004.

APPLICATION OF THE QUADRATURE METHOD TO THE ANALYSIS OF MEMBRANE SHELLS OF REVOLUTION³

© 2005 I.S. Akhmedjanov⁴

The paper is devoted to the numerical quadrature method application to integration of differential equations of membrane shells of revolution. According to this method the initial system of differential equations first is transformed into a system of integral equations. Then the standard trapezoid formula is applied to computation of the involved integrals.

Paper received 9/XII/2004.
Paper accepted 9/XII/2004.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Y.N. Radayev.

⁴Akhmedjanov Iskhak Saidovich, Dept. of Aerospace Structures Strength, Samara State Aerospace University, Samara, 443068, Russia.