УДК 531.36

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИПШИЦЕВЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С УПРАВЛЕНИЕМ[1]

© 2005 Н.П. Балабаева[2]

Доказана теорема о равномерной экспоненциальной устойчивости нелипшицевого дифференциального уравнения с управлением. В качестве достаточного условия используется свойство равномерной экспоненциальной устойчивости усредненной системы.

1. Постановка задачи и определения

Рассмотрим дифференциальное уравнение в $\mathbb{R}^n$ вида

$$\dot{x}_\mu(t) = \mu f(t, x_\mu(t), y(t)), \quad x_\mu(t_0) = x_0. \tag{1.1}$$

Здесь векторнозначная функция $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$, $y(\cdot) \in Y$, где Y — подмножество множества всех измеримых функций, μ — малый параметр, $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_*$, $\mu_* > 0$.

Определение 1. (равномерная экспоненциальная устойчивость).

Положение равновесия $0 \in \mathbb{R}^n$ системы (1.1) будем называть равномерно экспоненциально устойчивым, если существуют постоянные $A > 0$, $\alpha > 0$ и $\mu_0 > 0$ такие, что для всех параметров возмущения $\mu \in (0, \mu_0]$, начальных условий $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, времени $t \geqslant t_0$ и всех функций $y(\cdot) \in Y$ соответствующие траектории (1.1) удовлетворяют оценке

$$\|x_\mu(t)\| \leqslant Ae^{-\alpha\mu(t-t_0)}\|x_0\|.$$

Наряду с этой задачей рассмотрим усредненную задачу Коши, которая, в общем случае, описывается дифференциальным включением

$$\dot{\xi}_\mu(t) \in \mu F(\xi_\mu(t)), \quad \xi_\mu(t_0) = x_0. \tag{1.2}$$

Здесь отображение $F : \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет определенным условиям (см. предположения *e–g* пункта 2), $K(\mathbb{R}^n)$ — совокупность всех непустых компактов в $\mathbb{R}^n$.

---

[1]Представлена доктором физико-математических наук профессором О.П. Филатовым.

[2]Балабаева Наталья Петровна (vao@samara.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Тривиальное решение задачи (1.2) будем называть равномерно экспоненциально устойчивым, если существуют постоянные $B > 0$, $\beta > 0$ и $\mu_1 > 0$ такие, что $\forall \mu < \mu_1$, любых начальных данных $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ и любого решения задачи (1.2) справедливо неравенство

$$\|\xi_\mu(t)\| \leqslant Be^{-\beta\mu(t-t_0)}\|x_0\| \quad \forall t \in [t_0, +\infty)\,. \tag{1.3}$$

Найдем условия, при которых возможен перенос экспоненциальной устойчивости усредненной системы (1.2) на возмущенную систему (1.1), по крайней мере, при малых параметрах возмущения $\mu > 0$.

Вопрос о связи равномерной экспоненциальной устойчивости системы дифференциальных уравнений с управлением и равномерной экспоненциальной устойчивости усредненной задачи рассматривался в статье [1]. В этой работе доказано, что в предположении липшицевости правых частей возмущенной и усредненной систем при некоторых дополнительных условиях из равномерной экспоненциальной устойчивости усредненной задачи следует равномерная экспоненциальная устойчивость исходной задачи.

В [2] этот же вопрос рассматривается для дифференциальных включений. В этой работе было показано, что доказательство теоремы о равномерной экспоненциальной устойчивости данного дифференциального включения сводится к теоремам усреднения дифференциальных включений [3, 4, 5] и критерию равномерной экспоненциальной устойчивости.

В настоящей работе используется схема доказательства из [2] для систем дифференциальных уравнений с управлением. Причем, в отличие от [1], условие липшицевости правой части дифференциального включения (1.2) заменяется на более слабое условие односторонней липшицевости, а от функции f из задачи (1.1) не требуется даже этого условия, но предполагается существование решения.

Определение 2. [6, односторонняя липшицевость].

Многозначное отображение $F : \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ будем называть односторонне липшицевым (OSL), если найдется локально интегрируемая в $[0, +\infty)$ (по Лебегу) функция $L : [0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ такая, что $\forall \xi, \psi \in \mathbb{R}^n$, $\forall v \in F(\xi)$ существует такой вектор $w \in F(\psi)$, что $\forall t \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство

$$\langle \xi - \psi, v - w\rangle \leqslant L(t)\|\xi - \psi\|^2,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n, (\|\cdot\|)^2 = \langle\cdot,\cdot\rangle$.

Для ограниченных множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ полуотклонение первого множества от второго обозначим

$$h_0(A, B) = \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} \|a - b\|.$$

При доказательстве основного результата настоящей работы существенно используется критерий равномерной экспоненциальной устойчивости [2, теорема 1]. Приведем эту теорему.

Предположим, что существует неубывающая функция $\Gamma : [0, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ такая, что для произвольных начальных данных $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ и любого решения задачи (1.1) справедлива оценка

$$\|x_\mu(t)\| \leqslant \|x_0\|\Gamma(H) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + H/\mu]. \tag{1.4}$$

Постоянная $H > 0$ выбирается так, чтобы выполнялось неравенство

$$p < 1, \quad p = Be^{-\beta H}, \tag{1.5}$$

где B и β — постоянные из определения равномерной экспоненциальной устойчивости усредненной системы.

Основное условие критерия равномерной экспоненциальной устойчивости формулируется следующим образом:

A) для некоторых постоянных H и p, удовлетворяющих неравенству (1.5), существуют постоянные $q \in [0, 1)$, $\mu_2 > 0$ такие, что $p + q < 1$ и для любых начальных условий $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ и любого решения $x_\mu(t)$ задачи (1.1) найдется такое решение усредненной задачи (1.2), для которого

$$\|x_\mu(t_0 + H/\mu) - \xi_\mu(t_0 + H/\mu)\| \leqslant \|x_0\|q \quad \forall \mu \in (0, \mu_2]\,.$$

Теорема 1. [2, критерий равномерной экспоненциальной устойчивости]. Пусть для любого решения задачи (1.1) имеет место неравенство (1.4), и усредненная система (1.2) является равномерно экспоненциально устойчивой. Тогда для равномерной экспоненциальной устойчивости дифференциального уравнения (1.1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие A).

2. Основной результат

Пусть система (1.1) имеет хотя бы одно решение на $\mathbb{R}_+$.

Возьмем произвольное начальное условие $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ и с помощью замены переменных $x = \|x_0\|z$ и $\xi = \|x_0\|\zeta$ в системах (1.1) и (1.2) соответственно получим систему

$$\dot z_\mu(t) = \mu f_{x_0}(t, z_\mu(t), y(t)), \quad z_\mu(t_0) = z_0, \tag{2.1}$$

где $f_{x_0}(t, z, y(t)) = \dfrac{1}{\|x_0\|} f(t, \|x_0\|z, y(t)), \quad z_0 = \dfrac{x_0}{\|x_0\|}$,
и систему

$$\dot\zeta_\mu(t) \in \mu F_{x_0}(\zeta_\mu(t)), \quad \zeta_\mu(t_0) = z_0, \tag{2.2}$$

где $F_{x_0}(\zeta) = \dfrac{1}{\|x_0\|} F(\|x_0\|\zeta)$.

Предположим, что выполняются условия:

a) отображение $f(t, x, y(t))$ измеримо по t на $\mathbb{R}_+$ $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y(\cdot) \in Y$;

b) существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$\|f(t, x, y(t))\| \leqslant c\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall y(\cdot) \in Y;$$

c) существует постоянная $c_1 > 0$ такая, что

$$\|F(\xi)\| \leqslant c_1\|\xi\| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n;$$

d) функция f_{x_0} равномерно непрерывна по z, т.е. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon)\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$, $\forall y(\cdot) \in Y$:

$$\|z_1 - z_2\| < \delta \quad \Rightarrow \|f_{x_0}(t, z_1, y(t)) - f(t, z_2, y(t))\| < \varepsilon \ \ \forall t \in \mathbb{R}_+;$$

e) отображение F_{x_0} равномерно полунепрерывно сверху, т.е. $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta(\varepsilon)\ \ \forall\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}^n$

$$\|\zeta_1 - \zeta_2\| < \delta \Rightarrow h_0(F(\zeta_1), F(\zeta_2)) < \varepsilon;$$

f) равномерно по начальным условиям $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ и $z \in \mathbb{B}^n(r)$, $r > 0$ — произвольное число, существует предел

$$\lim_{\Delta\to\infty} h_0\left(\bigcup_y \frac{1}{\Delta}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta} f_{x_0}(t, z, y(t))dt, F_{x_0}(z)\right) = 0,$$

где объединение проводится по всем функциям $y(\cdot) \in Y$;

g) отображение F односторонне липшицево (OSL) с локально интегрируемой на $\mathbb{R}_+$ функцией $L_F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такой, что функция $m(\Delta) = \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta} L_F(s)ds \leqslant d^*\Delta$ при всех $\Delta \geqslant t^*$ (d^*, t^* — некоторые числа).

Теорема 2. Пусть выполняются предположения *a–g*. Если усредненная система (1.2) равномерно экспоненциально устойчива, то исходная система (1.1) также равномерно экспоненциально устойчива.

Доказательство. Из предположений *a–c, g* следует, что отображения f_{x_0} и F_{x_0} измеримы по t на $\mathbb{R}_+$, удовлетворяют условию линейного роста с постоянными c и c_1 соответственно, а отображение F_{x_0} односторонне липшицево по ζ с функцией $L_{F_0}(t) = L_F(t)\,\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Для произвольного решения $z_\mu(t)$ задачи (2.1) на отрезке $[t_0, t_0 + H/\mu]$, $H > 0$ выполняется неравенство

$$\|z_\mu(t)\| \leqslant \|z_\mu(t_0)\| + \mu \int\limits_{t_0}^{t_0+H/\mu} \|f_{x_0}(t, z_\mu(t), y(t))\|dt.$$

Из условия линейного роста следует оценка

$$\|z_\mu(t)\| \leqslant \|z_\mu(t_0)\| + \mu c \int\limits_{t_0}^{t_0+H/\mu} \|z_\mu(t)\|dt,$$

откуда по лемме Гроноулла получим, что

$$\|z_\mu(t)\| \leqslant \|z_\mu(t_0)\|e^{cH} \quad \forall t \in [t_0, t_0 + H/\mu]. \tag{2.3}$$

Из условия линейного роста и оценки (2.3) следует, что для произвольного $H > 0$ на отрезке $[t_0, t_0 + H/\mu]$ выполняются неравенства

$$\|f_{x_0}(t, z_\mu(t), y(t))\| \leqslant c\|z_\mu(t)\| \leqslant c\|z_0\|e^{cH} = ce^{cH},$$
$$\|F_{x_0}(\zeta_\mu(t))\| \leqslant c_1\|\zeta_\mu(t)\| \leqslant c_1\|z_0\|e^{c_1H} = c_1e^{c_1H}.$$

Для систем (2.1), (2.2) выполнены все условия теоремы об аппроксимации сверху [7, теорема 1]. Значит, система (2.2) аппроксимирует сверху систему (2.1), т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \mu_2 > 0 : \forall \mu < \mu_2$, для любого решения $z_\mu(t)$ задачи (2.1) существует решение $\zeta_\mu(t)$ задачи (2.2) такое, что

$$\|z_\mu(t) - \zeta_\mu(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t_0 + H/\mu].$$

Возвращаясь к старым переменным x и ξ, получим, что $\forall \mu < \mu_2$, и для любого решения $x_\mu(t)$ задачи (1.1) найдется решение $\xi_\mu(t)$ задачи (1.2) такое, что $\forall t \in [t_0, t_0 + H/\mu]$

$$\|x_\mu(t) - \xi_\mu(t)\| = \|x_0\| \cdot \|z_\mu(t) - \zeta_\mu(t)\| < \|x_0\|\varepsilon. \tag{2.4}$$

Так как усредненная система (1.2) равномерно экспоненциально устойчива, то выполняется оценка (1.3).

Выберем число $H > 0$ так, чтобы для постоянных B и β из определения равномерной экспоненциальной устойчивости системы (1.2) выполнялось неравенство

$$p < 1, \quad p = Be^{-\beta H}.$$

По данному H выберем число $\varepsilon > 0$ такое, что $p + \varepsilon < 1$.

Тогда из (2.4) следует, что для любых начальных условий $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \times \mathbb{R}^n$ и любого решения $x_\mu(t)$ задачи (1.1) найдется такое решение $\xi_\mu(t)$ задачи (1.2), для которого

$$\|x_\mu(t_0 + H/\mu) - \xi_\mu(t_0 + H/\mu)\| \leqslant \|x_0\|\varepsilon \quad \forall \mu < \mu_2.$$

Таким образом, выполнены все условия критерия равномерной экспоненциальной устойчивости [2, теорема 1]. Следовательно, задача (1.1) равномерно экспоненциально устойчива.

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = -\mu g(x)\big(2 + \sin(y(t))\big), \quad x_\mu(0) = x_0, \tag{2.5}$$

где

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in (-\infty, 1) \cup [2, +\infty), \\ \sqrt{x-1} + 1, & \text{если } x \in [1, 2), \end{cases}$$

$y(t)$ — произвольная измеримая функция, $x_0 \in \mathbb{R}$.

В качестве усредненной задачи рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{\xi} \in -\mu g(\xi)[1, 3], \quad \xi_\mu(0) = x_0. \tag{2.6}$$

Для задач (2.5) и (2.6) выполняются все условия теоремы 2. Значит, система (2.5) равномерно экспоненциально устойчива.

Литература

[1] Grammel G., Maizurna I. A sufficient condition for the uniform exponential stability of time-varying systems with noise // Nonlinear Analysis. 2004. V. 56. P. 951–960.

[2] Филатов О.П. Равномерная экспоненциальная устойчивость дифференциальных включений // Вестник СамГУ. 2004. 2-й спец. вып. С. 17.

[3] Плотников В.А., Плотников А.В., Витюк А.Н. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. Одесса: Астропринт, 1999. 356 с.

[4] Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение систем дифференциальных включений. М.: Изд-во Московского университета, 1998. 160 с.

[5] Филатов О.П. Доказательство теорем усреднения для дифференциальных включений // Вестник СамГУ. 2001. №2(20). С. 20–33.

[6] Donchev T., Farkhi E. Stability and Euler approximation of one-sided Lipschitz differential inclusions // SIAM J. Control OPTIM. 1998. V. 36. No. 2. P. 780–796.

[7] Соколовская Е.В. Об аппроксимации сверху систем дифференциальных включений с медленными и быстрыми переменными и нелипшицевой правой частью // Вестник СамГУ. 2003. Спец. вып. С. 51–65.

Поступила в редакцию 24/*XII*/2004;
в окончательном варианте — 24/*XII*/2004.

STABILITY OF NON-LIPSHITZ DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONTROL[3]

© 2005 N.P. Balabayeva[4]

The uniform exponential stability of non-Lipshitz differential equation with control is proved. The averaged system is used to present a sufficient condition for the uniform exponential stability of the original system.

Paper received 24/*XII*/2004.
Paper accepted 24/*XII*/2004.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. O.P. Filatov.

[4]Balabaeva Natalia Petrovna (vao@samara.ru), Dept. of Partial Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russia.