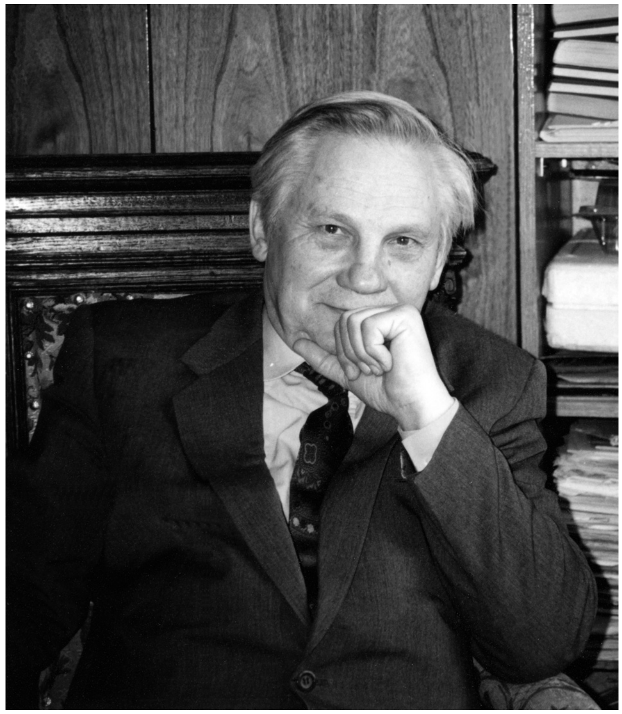
МАТЕМАТИКА



НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ[1]

© 2005 Л.М. Беркович[2]

Светлой памяти
Сергея Павловича Курдюмова
посвящается

В данной статье, посвященной памяти С.П. Курдюмова, выдающегося специалиста в области математического моделирования нелинейных процессов и синергетики, Ученого и Человека, кратко рассказывается о некоторых новых аналитических методах теории нелинейных дифференциальных уравнений, развитых автором и нацеленных на упрощение и интегрируемость уравнений. Эти методы докладывались и подробно обсуждались на различных семинарах в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, которые проходили либо под непосредственным руководством С.П. Курдюмова, либо при его активном участии.

[1]Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

[2]Беркович Лев Мейлихович (berk@ssu.samara.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Прошло совсем немного времени после опубликования статьи, посвященной юбилею С.П. Курдюмова [10]. К сожалению, его уже нет в живых.

В связи с 275-летним юбилеем Российской академии наук журнал "Вопросы истории естествознанияи техники" провел опрос некоторых известных представителей отечественной науки. Одним из вопросов был следующий: "Как, под влиянием каких причин, мотивов и жизненных обстоятельств Вы пришли в науку?" Сергей Павлович довольно подробно рассказал о себе, о родных, друзьях, учителях, школьных и университетских. Вот, в частности, что он написал, отвечая на этот вопрос.

"Жить в военное и послевоенное время было трудно, но интересно. Страна одержала Великую Победу. Большую роль в умении устанавливать контакт с людьми, вести организационную работу, демократически обсуждать проблемы нашей жизни играл комсомол. Я вступил в комсомол в начале 1943 г., когда шла Великая Отечественная война. В это время я с родителями был в эвакуации в Ульяновске. Для нас, которых в то время однорукие военруки учили в школе разбирать и собирать с закрытыми глазами затвор винтовки, вступить в комсомол значило — стать открытым врагом фашизма и следовать примеру краснодонцев ... . В 1947 г. я поступил на физфак МГУ (отделение ядерной физики) ... . Я свой диплом делал в ФИАНе у академика М.А. Маркова, он был посвящен короткодействующим ядерным силам от многих тел ... . Развороту своей научной деятельности я более всего обязан работе в Институте прикладной математики (теперь имени М.В. Келдыша). Это время совпало с "золотым веком" взлета советской и мировой науки. Я попал в школу академиков А.Н. Тихонова и А.А. Самарского. Долгие годы работы с моим непосредственным учителем А.А. Самарским, коллективом его отдела и со многими другими сотрудниками ИПМ помнятся как самые счастливые. Институт всегда был на острие проблем человечества. Первые ЭВМ, первые модели неуправляемого и управляемого термоядерного синтеза, управление траекториями полета космических аппаратов, а в дальнейшем широкое внедрение компьютеров, моделей в различные области науки и техники и, наконец, попытки новых наук — кибернетики и синергетики — осуществить синтез естественно-научного и гуманитарного знания с целью преодоления кризиса в России и надвигающихся глобальных кризисов человечества ... . Замечательной была атмосфера внутри научных школ ... . Непередаваемое удовольствие найти заинтересованных коллег и соратников в различных республиках СССР, людей различных национальностей, и через них ощутить всю прелесть и глубину культуры различных народов ... . До сих пор у меня остается твердое мнение, что объединение людей естественнее всего осуществить через устойчивые формы научных и культурных контактов. Изоляция как внутри СНГ, так и по отношению к мировому научному сообществу грозит снижением уровня как науки, так и образования."

В нелинейной динамике есть такой термин — аттрактор (притягивающее предельное множество). Таким аттрактором для многих людей был и сам

С.П. Курдюмов. Обладая немалой властью, будучи в течение многих лет парторгом, а затем и директором ИПМ, он никогда не злоупотреблял этой властью в личных целях, оставался скромным и бескорыстным человеком. Он обладал удивительной способностью находить общий язык с самыми различными людьми, некоторые из которых обладали отнюдь не легким характером. Все сотрудники ИПМ (от академиков до вахтеров) его обожали. Мягкий интеллигент, но умеющий твердо отстаивать свои научные принципы и гражданскую позицию, не позволяющий себе ни в чем отступать от правды, умеющий жить по совести.

Он создатель большой научной школы: только прямыми его учениками являются 14 докторов и около 60 кандидатов наук. Не случайно, что именно он — Мыслитель — стал в нашей стране неформальным лидером междисциплинарного научного направления, которое принято сейчас называть синергетикой (учением о взаимодействии и самоорганизации в природе и обществе [22, 23]). Оно объединило ученых самых различных специальностей от физиков, математиков, механиков, химиков, биологов, медиков, разработчиков новых технологий, в том числе информационных — до философов, социологов, психологов, экономистов, управленцев, историков, деятелей искусства. Список его трудов находится в Интернете на сайте *http://www.spkurdyumov.narod.ru*, посвященном синергетике и систематически обновляемом его сыном Владимиром Сергеевичем.

Гостеприимный хозяин, открытый человек, которому нечего скрывать, т.к. никогда не стремился сделать ничего плохого. Он был удостоен правительственных наград, но самой бесценной наградой себе считал свою преданную и заботливую жену Валентину Васильевну, которую ласково называл ”Моя декабристочка”.

Он был именно тем из праведников, на которых держится наша страна. О многих людях вспоминают — его будут помнить!

Введение

”В дифференциальных уравнениях при серьезном изучении нелинейных процессов мы сталкиваемся с целым набором новых явлений, которых не увидишь в классической области. Здесь можно отметить лишь два — солитоны и хаос — два очень разных элемента теории дифференциальных уравнений, которые стали особенно заметными и популярными в нашем столетии. Они представляют собой противоположные крайности. Солитоны представляют неожиданно организованное поведение нелинейных дифференциальных уравнений, а хаос — неожиданно дезорганизованное. Оба явления присутствуют при различных режимах процесса, и оба интересны и важны, но это принципиально нелинейные явления”[3].

[3] Атья М. Математика в XX столетии // Математическое просвещение. 2003. Вып. 7.

И хотя оба открытия были сделаны при проведении вычислительных экспериментов, их подробное описание стало возможным лишь при использовании аналитических методов. "Конечно, опыт остается единственным критерием пригодности математических конструкций физики. Но настоящее творческое мышление присуще именно математике. Поэтому я считаю в известном смысле оправданной веру древних в то, что чистое мышление в состоянии постигнуть реальность" (Альберт Эйнштейн).

К настоящему времени в нелинейной динамике разработаны две парадигмы, одну из которых можно условно назвать "порядком", а другую — "хаосом". В рамках первой из них показано, что сложные системы могут вести себя просто. А именно было установлено, что в пространственно распределенных системах, обладающих бесконечным числом степеней свободы, при определенных условиях происходит самоорганизация — выделение небольшого числа переменных (т.н. параметров порядка), определяющих динамику всей системы. В результате возникают пространственно неоднородные устойчивые состояния равновесия, которые И.Р. Пригожин предложил называть *диссипативными* структурами (от латинского слова *dissipatio* — рассеяние).

В рамках второй парадигмы было обнаружено, что даже простые динамические системы, обладающие небольшим числом степеней свободы, могут вести себя сложно. Иными словами, был открыт т.н. динамический хаос — сложное непериодическое поведение в простейших детерминированных системах, т.е. в таких, где будущее, казалось бы, однозначно определяется заданием начальных данных. Лаплас в 1776 г. писал: "Состояние системы природы в настоящем есть, очевидно, следствие того, каким оно было в предыдущий момент, и если мы представим себе разум, который в данное мгновение постиг все связи между объектами Вселенной, то он сможет установить соответствующие положения, движения и общие воздействия этих объектов в любое время в прошлом или будущем."

Таким образом, в основе взгляда классической физики на окружающий мир лежало убеждение, что будущее определяется настоящим и что, следовательно, тщательное изучение настоящего позволит приподнять завесу, скрывающую будущее. Неограниченную предсказуемость будущего можно назвать путеводным мифом классической науки.

Возросшая ограниченность детерминистских законов означает, что мы отходим от замкнутой Вселенной, в которой все задано, к новой Вселенной, открытой флуктуациям, способной рождать новое.

Основной особенностью динамического хаоса является свойство существенной зависимости от начальных условий, заключающееся в экспоненциальном разбегании двух бесконечно близких траекторий, принадлежащих к хаотическому аттрактору. Из этого свойства вытекает, в частности, существование т.н. горизонта прогноза — конечного времени, через которое динамический прогноз поведения системы становится невозможным.

Ныне в процессе становления находится следующая, третья по счету, парадигма, которую можно определить как "жизнь на кромке хаоса". Цель ее заключается в создании теории безопасности и риска для систем, потенциально склонных к катастрофам (см., например, [19, 24]).

"Описывая тот или иной природный феномен, часто стремятся построить такую математическую модель его, чтобы в него входили только линейные уравнения, решать которые умеют. Поэтому неизбежно были упрощения, и исследователи сознательно мирились с ними, уповая на то, что неучтенные моделью факторы малосущественны". Но "с каждым новым серьезным исследованием практически в любой области науки становилось все яснее, что надо менять подход к природе: если раньше считали нелинейность лишь "испорченной" линейностью, ее экзотическим частным случаем, то теперь становилось очевидным, что все явления природы нелинейны, а их линейные описания — просто от упрощения. Мы все больше сознаем, что мир — это эволюция нелинейных систем, что он многовариантен"[4].

Чтобы не влачить жалкое существование приживалки линейной теории и не быть низведенной до положения хранительницы обширной коллекции разрозненных решенных задач, нелинейная физика должна была обрести внутреннее единство. Необходимо было создать "... нелинейную культуру, включающую надежный математический аппарат и физические представления, адекватные новым задачам, выработать нелинейную интуицию, годную там, где оказывается непригодной интуиция, выработанная на линейных задачах" (А.А. Андронов) [4].

Большие отклонения от состояния равновесия описываются нелинейными уравнениями. В какой бы области естествознания ни возникла нелинейность явления, она специфична. Так, например, только сильная нелинейность позволяет биологическим системам "... услышать шорох подползающей змеи и не ослепнуть при близкой вспышке молнии. Те биологические системы, которые не смогли охватить громадный диапазон жизненно значимых воздействий среды, попросту вымерли, не выдержав борьбы за существование. На их могилах можно было бы написать: "Они были слишком линейными для этого мира" (А.М. Молчанов).

"Нелинейность всепроникающа и вездесуща, многолика и неисчерпаемо разнообразна. Она повсюду в большом и малом, в явлениях быстротечных и длящихся эпохи. Нелинейность — это рождение и аннигиляция элементарных частиц, гигантское красное пятно на Юпитере и оглушительный хлопок пастушьего кнута, биение сердца и всепроникающий луч лазера, теплый свет свечи и нескончаемая изменчивость волн, болезни и исцеление, вызов искусству аналитика и мастерству экспериментатора, надежды и бессилие создателей теорий и тех, кто подвергает их замыслы суровой экспериментальной проверке" (Ю.А. Данилов).

Нелинейность служит формальной математической характеристикой

---

[4]Приведенные во введении и заключении высказывания принадлежат члену-корр. РАН С.П. Курдюмову и взяты из его интервью, опубликованного в журнале "Знание — сила". №10, 11. 1988 г.

процессов, ведущих к образованию структур. Объяснение эффектов, ведущих к образованию структур, не требует каких-либо новых физических методов, а основывается исключительно на применении и обобшении понятий и методов теории нелинейных дифференциальных уравнений.

В работах по синергетике большое внимание уделяется качественному и численному исследованиям динамических систем, а в последнее время — также и компьютерному моделированию [1]. Значительно меньшее внимание уделяется аналитическим исследованиям, хотя имеются работы и в этом направлении (см., например, [2, 3, 20, 21, 28]). Такое отношение к нелинейной аналитике не всегда может быть оправдано принципиальной невозможностью подобного исследования, а часто объясняется лишь трудностями его проведения.

В статье кратко представлены некоторые развитые автором методы нелинейной аналитики, иллюстрированные примерами. Подход к решению научных проблем, основанный только на расчленении целого на части, всегда вызывал неудовлетворенность. Важно воссоздание целого из составных частей. Речь пойдет о методе факторизации нелинейных обыкновенных дифференциальных операторов, совместно применяемым с методом преобразования переменных. В этом случае суммарный результат исследования превосходит результаты, проведенные каждым из методов в отдельности (*синергетический* эффект) [5, 6].

Особое внимание уделяется методу точной линеаризации, связывающему факторизацию с преобразованием нелинейных автономных уравнений в линейные [7]. При этом получаются те или иные принципы нелинейной суперпозиции. Рассматривается также метод автономизации для важного класса нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений, являющийся в границах своей применимости альтернативой более общему методу группового анализа. Указанные методы применяются к некоторым замечательным уравнениям, таким, как квазилинейное уравнение теплопроводности, описывающее режим "с обострением" [2, 8, 9, 10, 25], уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова, Эмдена—Фаулера [11–14], Кортевега—де Фриза, система уравнений Лоренца и др. [3, 20, 21].

За счет исключения переменных произведена редукция некоторых динамических систем, таких как система Лотки—Вольтерра, система гидродинамического типа и др. [5, 7, 15], являющихся связанными системами обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), к несвязанным системам уравнений, вообще говоря, более высокого порядка. Полученные несвязанные системы, а также некоторые связанные системы линеаризованы. Указанные методы расширяют круг интегрируемых уравнений.

Совместное использование факторизации и преобразований позволяет создать целостную картину, объединяющую линейные и нелинейные уравнения, и оказывается возможным приступить к систематическому исследованию нелинейных и нестационарных задач (см., например, [16]).

1. Иллюстративный пример

Чтобы представить, хотя бы частично, суть предлагаемых методов, применим их к следующему примеру. Уравнению

$$y'' + 3yy' + y^3 = 0, \ \ (') = d/dx \tag{1.1}$$

соответствует факторизация

$$2\left(y'' + 3yy' + y^3\right) \equiv (D - r_2 y)\left(D + \frac{y'}{y} - r_1 y\right) y = 0, \ \ D = \frac{d}{dx}, \tag{1.2}$$

где r_1, r_2 — корни характеристического уравнения

$$r^2 + 3r + 2 = 0. \tag{1.3}$$

Следствиями факторизации (1.2) являются два уравнения 1-го порядка

$$2y' - y^2 = 0, \quad y' - y^2 = 0, \tag{1.4}$$

откуда получим следующие два семейства однопараметрических решений

$$y_1(x) = \frac{2}{x + a}, \quad y_2(x) = \frac{1}{x + b}. \tag{1.5}$$

Решения (1.5) образуют фундаментальную совокупность решений уравнения (1.1), т.к. общее решение (1.1) может быть построено через них.

Действительно,

$$y = \frac{1}{2} y_1(x) + y_2(x) = \frac{1}{x + a} + \frac{1}{x + b}.$$

С другой стороны, уравнение (1.1) преобразованием $z = y^2$, $dt = ydx$ приводится к линейному уравнению $\ddot{z} + 3\dot{z} + 2z = 0$, общее решение которого имеет вид $z = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$. Тогда общее решение (1.1) может быть представлено в параметрической форме

$$y = \sqrt{c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}}, \quad x = \int \frac{dt}{\sqrt{c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}}}. \tag{1.6}$$

Интеграл в формуле (1.6) выражается в конечном виде. Исключив параметр t, получим следующий вид решения (1.1), зависящий от двух произвольных постоянных:

$$y = \frac{2x + a}{x^2 + ax + b}. \tag{1.7}$$

Формула (1.7) вместе с формулой для $y_2(x)$ из (1.5) дает все решения уравнения (1.1). Формулы (1.6) и (1.7) представляют принципы нелинейной суперпозиции для (1.1).

2. О принципах нелинейной суперпозиции

Определение [26][5]. Будем говорить, что для ОДУ

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{2.1}$$

[5]Данное определение охватывает соответствующее определение, предложенное С. Ли.

система функций $Y_1(x), \ldots, Y_m(x)$ является фундаментальной системой решений (ФСР), если его общее решение $y(x)$ можно представить в виде функции Φ (конкретной или произвольной)

$$y(x) = \Phi(Y_1, \ldots, Y_m, c_1, \ldots, c_n), \tag{2.2}$$

где $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные. ФСР состоит либо из частных функционально независимых решений данного уравнения (2.1), либо является ФСР для присоединенного линейного уравнения

$$Y^{(m)}(X) + \sum_{k=0}^{m-1} a_k(X) Y^{(k)}(X) = 0, \tag{2.3}$$

либо состоит из функционально независимых частных решений присоединенного нелинейного уравнения

$$\Psi(X, Y, Y', \ldots, Y^{(m)}) = 0. \tag{2.4}$$

Формулы (2.2), (2.4) представляют *принципы нелинейной суперпозиции* решений для уравнения (2.1).

Принцип нелинейной суперпозиции (ПНС) может быть также представлен в виде

$$\varphi(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0, \tag{2.5}$$

т.е. является нелинейной функцией от произвольных постоянных $c_1, \ldots, c_n$.

Пример 2.1. Рассмотрим уравнение Риккати

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2. \tag{2.6}$$

Пусть имеются 4 решения y, y_1, y_2, y_3 уравнения (2.6), удовлетворяющие свойству, что их ангармоническое соотношение является постоянным:

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = c. \tag{2.7}$$

Рассматривая $y(x)$ как общее решение, а y_1, y_2, y_3 как частные решения, из (2.7) получим следующий ПНС:

$$y(x) = \frac{c(y_1 - y_3)y_2 + y_1(y_3 - y_2)}{c(y_1 - y_3) + (y_3 - y_2)},$$

где c — произвольная постоянная.

Пример 2.2. Рассмотрим уравнение Ермакова

$$y'' + a_0(x)y - b_0 y^{-3} = 0.$$

Оно имеет общее решение, которое можно представить в виде

$$y(x) = \sqrt{AY_2^2 + BY_2Y_1 + CY_1^2}, \quad B^2 - 4AC = -4b_0,$$

где $Y_1, Y_2 = Y_1 \int Y_1^{-2} dx$ являются линейно независимыми решениями присоединенного линейного уравнения

$$Y'' + a_0(x)Y = 0. \tag{2.8}$$

В отличие от линейных ОДУ, когда знание ФСР достаточно для построения соответствующего уравнения, в случае нелинейных ОДУ требуется дополнительно знать ПНС.

Пример 2.3. Уравнение Куммера—Шварца

$$\frac{1}{2}\frac{y''}{y} - \frac{3}{4}\frac{y'^2}{y^2} + b_0 y^2 = a_0(x)$$

имеет общее решение

$$y(x) = (AY_2^2 + BY_2Y_1 + CY_1^2)^{-1}, \quad B^2 - 4AC = -4b_0,$$

где Y_1, Y_2 удовлетворяют (2.8).

Заметим, что ПНС распространяется и на соответствующие нелинейные уравнения в частных производных.

Пример 2.4. Интегрированный вариант уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{h}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \tag{2.9}$$

подстановкой $v = \exp(-u/h)$ приводится к виду

$$v_t = -hv_{xx}. \tag{2.10}$$

Пусть $v_1(t,x), v_2(t,x)$ — линейно независимые решения (2.10). Тогда полный интеграл $v = c_1v_1 + c_2v_2$, где c_1, c_2 — произвольные постоянные, есть *линейный принцип суперпозиции* (ЛПС) для (2.10), а формула

$$u(t,x) = -h\ln\left[\exp\left(-\frac{1}{h}u_1 - \frac{\lambda_1}{h}\right) + \exp\left(-\frac{1}{h}u_2 - \frac{\lambda_2}{h}\right)\right]$$

есть ПНС для (2.9), где λ_1, λ_2 — произвольные постоянные, $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$ — линейно независимые частные решения, а $u(x,t)$ — полный интеграл (2.9).

3. Факторизация нелинейных дифференциальных операторов

В п. 1 был дан конкретный пример факторизации. Сейчас мы представим два важных уравнения, которые допускают другие виды факторизации.

Пример 3.1. Ангармонический осциллятор. Он описывается уравнением

$$y'' + b_1y' + b_0y + by^n = 0. \tag{3.1}$$

Если выполняется условие $(n+3)^2b_0 = 2(n+1)b_1^2$, то (3.1) допускает факторизацию

$$(D - r_2 - k_2y^{(n-1)/2})(D - r_1 - k_1y^{(n-1)/2})y = 0,$$

где

$$r_1 = -\frac{2}{n+3}b_1, \quad r_2 = \frac{n+1}{2}r_1, \ k_1 = \pm\sqrt{-\frac{2}{n+1}b}, \ k_2 = -\frac{n+1}{2}k_1.$$

Уравнение (3.1) допускает однопараметрическое семейство решений

$$y = \left(-\frac{k_1}{r_1} + C_1 \exp\left(-\frac{r_1(n-1)}{2}t\right)\right)^{2/(1-n)},$$

где C_1 — произвольная постоянная (параметр); кроме того, преобразованием

$$y = \exp\left(-2b_1 \frac{1}{n+3} x\right) z, \quad dt = \exp\left(b_1 \frac{1}{n+3} x\right) dx$$

оно приводится к интегрируемой форме $\ddot{z} + bz^n = 0$.

Пример 3.2. Автономное уравнение Льенара. Его можно представить в виде

$$y'' + a_1(y)y' + a_0(y)y = 0, \tag{3.2}$$

оно допускает факторизацию

$$(D - \alpha_2)(D - \alpha_1)y = 0, \quad \alpha_i = \alpha_i(y), \quad i = 1, 2, \tag{3.3}$$

где $a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1^* y)$, $a_0 = \alpha_1\alpha_2$, $(*) = d/dy$, причем α_1, α_2 удовлетворяют уравнениям Абеля 2-го и 1-го родов соответственно:

$$y\alpha_1\alpha_1^* + \alpha_1^2 + a_1\alpha_1 + a_0 = 0,$$
$$a_0 y\alpha_2^* = \alpha_2^3 + a_1\alpha_2^2 + \alpha_2(a_0 + a_0^* y).$$

В частности, уравнение

$$y'' - [p(m+1)y^m + qy^n]y' + pqy^{m+n+1} = 0$$

допускает факторизацию (3.3), где $\alpha_1 = py^m, \alpha_2 = qy^n$.

4. Метод точной линеаризации

В естествознании неизбежно встают вопросы: как связать существующие явления с возникающими? Нельзя ли их объединить? Ведь мы живем в едином мире, и между различными его частями должна существовать взаимосвязь. Метод точной линеаризации призван сыграть важную роль в процессе преобразования данных нелинейных уравнений в линейные уравнения.

4.1. Обобщенное уравнение Бернулли

Уравнение вида

$$y' = P(x)f(y) + Q(x)f(y)\exp\left(-\int f^{-1}(y)dy\right) \tag{4.1}$$

преобразованием

$$z = \exp\left(\int f^{-1}(y)dy\right)$$

приводится к линейному уравнению 1-го порядка

$$z' = P(x)z + Q(x). \tag{4.2}$$

Пусть $f(y) = 1/(1-n)y$. Тогда получим уравнение Бернулли

$$y' = \frac{1}{1-n}P(x)y + \frac{1}{1-n}Q(x)y^n. \tag{4.3}$$

Уже в (4.1) можно увидеть структуру будущего уравнения (4.2).

4.2. Главные результаты для автономных уравнений

Контуры моста, связывающего нелинейные и линейные уравнения, позволяет увидеть следующая теорема:

Теорема 4.1. Для того чтобы автономное уравнение

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{4.4}$$

приводилось к линейному автономному виду

$$Mz \equiv z^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}b_k z^{(n-k)}(t) = 0, \quad b_k = \mathrm{const} \tag{4.5}$$

нелинейным преобразованием

$$y = v(y)z, \quad dt = u(y)dx, \tag{4.6}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялась некоммутативная факторизация

$$F \sim \prod_{k=n}^{1}\left[D - \left(\frac{v^*}{v} + (k-1)\frac{u^*}{u}\right)y' - r_k u\right]y = 0, \tag{4.7}$$

или коммутативная факторизация

$$F \sim \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{u}D - \frac{v^*}{uv}y' - r_k\right]y = 0, \tag{4.8}$$

где $(*) = d/dy$, r_k — корни характеристического уравнения

$$M(r) \equiv r^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}b_k r^{n-k} = 0. \tag{4.9}$$

В факторизации (4.7), (4.8) входят параметры r_k, отвечающие коэффициентам преобразованного уравнения (4.5). Таким образом, уже в исходном уравнении (4.4) скрыта информация о его будущем ”перевоплощении” в уравнение (4.5).

Теорема 4.2. Для того чтобы уравнение (4.4) могло быть линеаризовано преобразованием вида (4.6), необходимо и достаточно, чтобы

$$\prod_{k=n}^{1}\left[D - \left(\frac{1}{y} - \frac{\varphi^{(n^2-n+2)/(2n)}\exp(\int f dy)}{\int \varphi^{(n^2-n+2)/(2n)}\exp(\int f dy)dy} + (k-1)\frac{\varphi^*}{\varphi}\right)y' - r_k\varphi\right]y = 0. \tag{4.10}$$

При этом линеаризующее преобразование (4.6) примет вид

$$z = \beta\int \varphi^{(n^2-n+2)/(2n)}\exp\left(\int f dy\right)dy, \quad dt = \varphi(y)dx, \tag{4.11}$$

где $\beta = \text{const}$ — нормирующий множитель.

Линеаризуемое уравнение допускает также однопараметрические семейства решений

$$\int \frac{\varphi^{(n^2-3n+2)/(2n)} \exp(\int f dy) dy}{\int \varphi^{(n^2-n+2)/(2n)} \exp(\int f dy) dy} = r_k x + C_k, \tag{4.12}$$

где r_k — простые корни характеристического уравнения (4.9).

Формулам (4.12) соответствует фундаментальная совокупность решений $\{y_k(x)\}$ уравнения (4.4), через которую может быть найдено и общее решение уравнения (4.4) и, следовательно, получен принцип нелинейной суперпозиции. В то же время он может быть выражен с помощью формул преобразования (4.11) и формулы

$$z = c_1 z_1(t) + \cdots + c_n z_n(t), \tag{4.13}$$

где $\{z_k(t)\}$ образуют базис пространства решений уравнения (4.5).

Пусть уравнение (4.4) допускает коммутативную факторизацию

$$\prod_{k=1}^{n} [\gamma(y) D - \beta(y) y' - \alpha(y) - r_k] y = 0. \tag{4.14}$$

К данному уравнению (4.4), (4.14) можно применить преобразование Бэклунда, представленное либо в интегральной форме

$$y = \exp\left(\int (\alpha + \beta y')\gamma^{-1} dx\right) z, \quad dt = \gamma^{-1} dx, \tag{4.15}$$

либо в дифференциальной форме

$$\left(\frac{1}{y} - \frac{\beta}{\gamma}\right) y' = \frac{z'}{z} + \frac{\alpha}{\gamma}. \tag{4.16}$$

Теорема 4.3. Уравнение (4.4), (4.14) преобразованием (4.15), или (4.16), приводится к линейному виду (4.5).

5. Линеаризация уравнений второго порядка

5.1. Полная линеаризация

Линеаризуемые уравнения 2-го порядка имеют вид

$$y'' + f y'^2 + 2b_1 \varphi y' + \varphi \exp\left(-\int f dy\right)\left(b_2 \int \varphi \exp\left(\int f dy\right) dy + c/\beta\right) = 0. \tag{5.1}$$

Подстановка

$$z = \beta \int \varphi \exp(\int f dy) dy, \quad dt = \varphi dx \tag{5.2}$$

приводит к линейному автономному ОДУ

$$\ddot{z} + 2b_1 \dot{z} + b_2 z + c = 0. \tag{5.3}$$

При $c = 0$ уравнение (5.1) допускает также однопараметрические решения

$$\int \frac{\exp(\int f dy) dy}{\int \varphi \exp(\int f dy) dy} = r_k x + C_k, \quad k = 1, 2,$$

где r_k — простые корни характеристического уравнения $r_2 + b_1 r + b_2 = 0$.

Пример 5.1. Рассмотрим систему Лотки—Вольтерра

$$\begin{cases} y_1' &= \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_1 y_2, \\ y_2' &= \alpha_2 y_1 + \beta_2 y_1 y_2, \end{cases} \tag{5.4}$$

где $\alpha_i, \beta_i = \text{const}$, $i = 1, 2$, описывающую динамику взаимодействия двух биологических популяций. От связанной системы (5.4) перейдем к несвязанной системе

$$\begin{cases} y_1'' - \dfrac{1}{y_1} y_1'^2 - (\alpha_2 + \beta_2 y_1) y_1' + \alpha_1 y_1 (\alpha_2 + \beta_2 y_1) &= 0, \\ y_2'' - \dfrac{1}{y_2} y_2'^2 - (\alpha_1 + \beta_1 y_2) y_2' + \alpha_2 y_2 (\alpha_1 + \beta_1 y_2) &= 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

Уравнения системы (5.5) принадлежат классу линеаризуемых уравнений (5.1). С помощью линеаризующих преобразований

$$z_1 = \alpha_2 \ln y_1 + \beta_2 y_1, \quad dt_1 = (\alpha_2 + \beta_2 y_1) dx,$$

$$z_2 = \alpha_1 \ln y_2 + \beta_1 y_2, \quad dt_2 = (\alpha_1 + \beta_1 y_2) dx,$$

(5.5) приводится к линейной системе

$$z_1''(t_1) - z_1'(t_1) + \alpha_1 = 0, \quad z_2''(t_2) - z_2'(t_2) + \alpha_2 = 0.$$

Пример 5.2. Нелинейный осциллятор. Он описывается уравнением

$$y'' + f(y) y'^2 + a^2 \psi(y) = 0. \tag{5.6}$$

Преобразованием

$$z = \sqrt{2 \int \psi \exp(2 \int f dy) dy}, \quad dt = z^{-1} \psi \exp(\int f dy) dx$$

уравнение (5.6) линеаризуется в уравнение $\ddot{z} + a^2 z = 0$, имеет первые интегралы и однопараметрические семейства решений соответственно:

$$y'^2 = a^2 \left(C \mp 2 \int \psi \exp(2 \int f dy) dy \right) \exp\left(-2 \int f dy \right),$$

$$\int \frac{\exp(\int f dy) dy}{z} = \pm i a x + C_k, \quad i = \sqrt{-1}, \quad k = 1, 2.$$

Пример 5.3. Уравнение Буссинеска—Рэлея. Оно имеет вид

$$y'' + a y + b y^2 = 0 \tag{5.7}$$

и описывает приближенную модель уединенной волны [17, с. 524–570].

Уравнение (5.7) подстановкой

$$z = y\sqrt{a + \frac{2}{3}by}, \quad dt = \frac{a + by}{\sqrt{a + \frac{2}{3}by}}dx$$

приводится к виду $\ddot{z}+z = 0$, имеет первые интегралы и однопараметрические решения соответственно:

$$y'^2 = C \mp y^2\left(a + \frac{2}{3}by\right), \tag{5.8}$$

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{a + \frac{2}{3}by}} = \pm\sqrt{-a}x + C. \tag{5.9}$$

Из формулы (5.9) получим элементарные решения уравнения (5.7):

$$y(x) = -\frac{3a}{2b}\frac{1}{\sin^2\frac{\sqrt{a}}{2}x}, \quad a > 0;$$

$$y(x) = -\frac{3a}{2b}\frac{1}{\mathrm{ch}^2\frac{\sqrt{-a}}{2}x}, \quad a < 0.$$

Заметим, что приведенное в [18, с. 116] решение неверно.

Специальный случай уравнения (5.7) (при $b = 9/2$) другим путем рассмотрел М.А. Лаврентьев [17] и получил частный случай формулы (5.8).

Пример 5.4. Уравнение Ньютона [27, с. 26]. Оно имеет вид

$$y'' + \omega^2\left(y^3 - \frac{1}{2}y\right) = 0. \tag{5.10}$$

В силу примера 5.2 оно линеаризуется преобразованием

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}y\sqrt{y^2 - 1}, \quad dt = \frac{(y^2 - 1/2)\sqrt{2}}{\sqrt{y^2 - 1}}dx$$

в уравнение $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$ и имеет однопараметрические решения, которые можно получить, исходя из соотношения

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2\int(y^3 - 1/2y)dy}} = \sqrt{2}\int\frac{dy}{y\sqrt{y^2 - 1}} = \pm\omega i x + C. \tag{5.11}$$

Из формулы (5.11) вытекают комплексные решения

$$y_{1,2} = \frac{1}{\sin\left(\pm\frac{i\omega}{\sqrt{2}}x + c\right)}.$$

В [27] приводится другое представление для однопараметрических решений:

$$y_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1 - \alpha e^{i\omega x}}{1 + \alpha e^{i\omega x}}.$$

5.2. Неполная линеаризация

Пусть дано уравнение

$$y'' + f(y)y'^2 + 2b_1\varphi(y)y' + \psi(y) = 0, \tag{5.12}$$

где, в отличие от (5.1), функция ψ не выражается через f и φ. Тогда (5.12) преобразованием (5.2) приводится к виду

$$\ddot{z} + 2b_1\dot{z} + b_2 z + \beta\phi(z) = 0,$$

где $\beta\phi(z) = \varphi^{-1}\exp(\int f dy)\psi(y)$.

Пример 5.5. Уравнение

$$y'' + 3yy' + y^3 + y^5 = 0$$

преобразованием $z = y^2$, $dt = ydx$ приводится к виду

$$\ddot{z} + 3\dot{z} + 2z + 2z^2 = 0.$$

5.3. Линеаризация связанной динамической системы

Нелинейная связанная система

$$\begin{cases} \dot{x} &= a_1\dfrac{f(x)}{f'(x)}u(x,y) + b_1\dfrac{g(y)}{f'(x)}u(x,y), \\ \dot{y} &= a_2\dfrac{f(x)}{g'(y)}u(x,y) + b_2\dfrac{g(y)}{g'(y)}u(x,y) \end{cases}$$

нелинейным преобразованием

$$X = f(x), \quad Y = g(y), \quad d\tau = u(x,u)dt$$

приводится к линейной связанной системе

$$\begin{cases} X' &= a_1X + b_1Y, \\ Y' &= a_2X + b_2Y. \end{cases}$$

6. Метод автономизации

Фундаментальное значение для интегрирования дифференциальных уравнений, допускающих точечные симметрии, играет групповой анализ. Альтернативой служит метод автономизации, который приводит к тем же результатам, что и групповой анализ, но позволяет обойтись без исследования громоздкой системы определяющих уравнений С. Ли. Однако он применим в основном для уравнений, структура которых состоит из суммы линейной и нелинейной частей, например, для обобщенного уравнения Эмдена—Фаулера

$$y'' + 2a_1(x)y' + a_2(x)y + f(x)y^n = 0, \quad a_1 \in C^1(I), \quad a_2 \in C(I), \tag{6.1}$$

частным случаем которого является классическое уравнение Эмдена—Фаулера (ЭФ)

$$y'' + \frac{a}{x}y' + bx^{m-1}y^n = 0. \tag{6.2}$$

Метод автономизации применим для уравнений, допускающих точечные симметрии с инфинитезимальными операторами вида

$$X = \xi(x)\frac{\partial}{\partial x} + [\eta_1(x)y + \eta_2(x)]\frac{\partial}{\partial y}.$$

Рассмотрим преобразование Куммера—Лиувилля (КЛ)

$$y = v(x)z, \quad dt = u(x)dx, \tag{6.3}$$

где $v(x)$ и $u(x)$ — достаточно гладкие функции, не обращающиеся в нуль ни в одной точке рассматриваемого интервала I. Оно является наиболее общим точечным преобразованием, сохраняющим линейность и порядок линейного ОДУ.

Лемма 1. Для того чтобы уравнение

$$y'' + 2a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{6.4}$$

преобразованием (6.3) приводилось к заранее заданному виду

$$\ddot{z} + 2b_1(t)\dot{z} + b_2(t)z = 0, \tag{6.5}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\frac{1}{2}\frac{t'''}{t'} - \frac{3}{4}\left(\frac{t''}{t'}\right)^2 + (b_2 - b_1^2 - \dot{b}_1)t'^2 = a_2 - a_1^2 - a_1', \tag{6.6}$$

$$v(x) = |t'(x)|^{-1/2}\exp\left(-\int a_1 dx + b_1\int u dx\right). \tag{6.7}$$

Особый интерес представляет случай, когда преобразованное уравнение (6.5) является уравнением с постоянными коэффициентами, т.е. автономным.

Теорема 6.1. Для того чтобы уравнение (6.1) приводилось к автономному виду

$$\ddot{z} + 2b_1\dot{z} + b_2 z + bz^n = 0, \tag{6.8}$$

необходимо и достаточно, чтобы в дополнение к условиям (6.6), (6.7) (где вместо t' нужно писать u) следует взять также условие

$$u^2(x)v^{1-n}(x) = bf(x).$$

Если показатель нелинейности в уравнении (6.1) $n = 2$, то оно может приводиться преобразованием КЛ и к следующему автономному виду:

$$\ddot{z} + 2b_1\dot{z} + b_2 z + c + bz^2 = 0.$$

Метод автономизации распространяется и на системы нелинейных уравнений.

Пример 6.1. Рассмотрим обобщенную систему Ермакова вида

$$\begin{cases} \ddot{x} + a_0(t)x &= x^{-3}f(y/x), \\ \ddot{y} + a_0(t)y &= y^{-3}f(x/y). \end{cases}$$

Пусть x_1, x_2 образуют фундаментальную систему решений присоединенного линейного уравнения $\ddot{x} + a_0(t)x = 0$. Тогда преобразованием

$$x = x_1 X, \quad y = x_1 Y, \quad ds = \frac{dt}{x_1^2}$$

данная система приводится к автономному виду

$$\begin{cases} X''(s) &= X^{-3} f(Y/X), \\ Y''(s) &= Y^{-3} f(X/Y) \end{cases}$$

и имеет первый интеграл

$$\frac{1}{2}(\dot{x}y - \dot{y}x)^2 + \int^{y/x} f(u)du + \int^{x/y} f(u)du = C.$$

7. О нелинейном уравнении теплопроводности, описывающем режимы с обострением

Центральное место в творчестве С.П. Курдюмова и его научной школы занимали исследования режимов "с обострением", возникающих в самых различных процессах, происходяших как в природе, так и в обществе. Эти исследования привели к открытию т.н. Т-слоя (см. [1, 2, 8–10, 24, 25]). Соответствующее квазилинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n T^\sigma \frac{\partial T}{\partial r}\right) + T^\beta,$$

описывающее режимы с обострением в плоской ($n = 0$), цилиндрической ($n = 1$) и сферической ($n = 2$) геометриях, при поиске автомодельных решений приводится к ОДУ вида

$$y'' + \frac{n}{x}y' + \frac{\sigma}{y}y'^2 + \frac{\sigma + 1 - \beta}{2(\beta - 1)}xy^{-\sigma}y' + y^{\beta-\sigma} - \frac{1}{\beta - 1}y^{1-\sigma} = 0 \tag{7.1}$$

преобразованием

$$T(t, r) = (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)}y(x), \quad x = \frac{r}{(T_0 - t)^{\frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}}}.$$

Таким образом, вопросы о нахождении точных и асимптотических автомодельных решений указанного типа привели к аналогичным вопросам относительно уравнения (7.1).

7.1. К вопросу о точных автомодельных решениях

I. Пусть $n = 0$ и $\beta = \sigma + 1$. Это есть известный интегрируемый случай для режима с обострением [9]. Но мы исследуем его иным путем, а именно методом точной линеаризации [7]. В этом случае (7.1) имеет вид

$$y'' + \frac{\sigma}{y}y'^2 + y - \frac{1}{\sigma}y^{1-\sigma} = 0. \tag{7.2}$$

Уравнение (7.2) линеаризуется преобразованием

$$Y = y^{\sigma+1}\sqrt{-\frac{2}{\sigma(\sigma+2)}y^{-\sigma} + \frac{1}{\sigma+1}},\ \ dt = \frac{1-\frac{1}{\sigma}y^{-\sigma}}{\sqrt{-\frac{2}{\sigma(\sigma+2)}y^{-\sigma} + \frac{1}{\sigma+1}}}dx$$

в уравнение $\ddot{Y} + Y = 0$, обладает первыми интегралами

$$y'^2 = a^2\left[Cy^{-2\sigma} - y^2\left(-\frac{2}{\sigma(\sigma+2)}y^{-\sigma} + \frac{1}{\sigma+1}\right)\right], \quad (\sigma \neq 0, \sigma \neq -1, \sigma \neq -2)$$

и, кроме того, имеет однопараметрические семейства решений:

$$y^{-\sigma} = \frac{2C\sigma(\sigma+2)}{\sigma+1}\frac{\exp\left(i\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma+1}}x\right)}{\left(1 + c\exp\left(\frac{i\sigma}{\sqrt{\sigma+1}}x\right)\right)^2}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Для $C = 1$ получим следующие элементарные решения:

$$y = \left[\frac{2(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)}\right]^{1/\sigma} \begin{cases} \left(\cos^2\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma+1}}x + C^*\right)\right)^{1/\sigma}, & \sigma > -1, \sigma \neq 0, \\ \left(\mathrm{ch}^2\left(\frac{\sigma}{\sqrt{-\sigma-1}}x + C^*\right)\right)^{1/\sigma}, & \sigma < -1, \sigma \neq -2. \end{cases}$$

Автором рассмотрены также особые случаи $\sigma = -1$ и $\sigma = -2$ [5].

II. Преобразованием $y = Y^{1/(\sigma+1)}$ уравнение (7.1) приводится к виду

$$Y'' + \frac{n}{x}Y' + \frac{(\sigma+1)(\beta-\sigma-1)}{2(1-\beta)}xY^{-\frac{\sigma}{\sigma+1}}Y' + \frac{\sigma+1}{1-\beta}Y^{\frac{1}{1+\sigma}} + (\sigma+1)Y^{\frac{\beta}{1+\sigma}} = 0. \tag{7.3}$$

Рассмотрим 2 случая:

а) пусть $n = 1, \beta = \sigma + 1$. Уравнение (7.3) примет вид

$$Y'' + \frac{1}{x}Y' - \frac{\sigma+1}{\sigma}Y^{\frac{1}{\sigma+1}} + (\sigma+1)Y = 0; \tag{7.3а}$$

б) пусть $n = 2, \beta = \sigma + 1$. Уравнение (7.3) примет вид

$$Y'' + \frac{2}{x}Y' - \frac{\sigma+1}{\sigma}Y^{\frac{1}{\sigma+1}} + (\sigma+1)Y = 0. \tag{7.3б}$$

Вопрос об интегрируемости уравнений (7.3а) и (7.3б) требует дополнительного рассмотрения.

7.2. Об асимптотических автомодельных решениях

Для поиска асимптотических решений уравнения (7.1) применим к нему преобразование КЛ (6.3). Получим уравнение

$$\ddot{z} + \frac{2v'u + vu'}{vu^2}\dot{z} + \frac{v''}{vu^2}z + \frac{\sigma}{z}(\dot{z} + \frac{v'}{vu}z)^2 + \frac{\sigma+1-\beta}{2(\beta-1)}xv^{-\sigma}u^{-1}z^{-\sigma}(\dot{z} + \frac{v'}{vu}z) +$$
$$+\frac{n}{x}\frac{vu\dot{z} + v'z}{vu^2} + v^{\beta-\sigma-1}u^{-2}z^{\beta-\sigma} - \frac{1}{\beta-1}v^{-\sigma}u^{-2}z^{1-\sigma} = 0. \tag{7.4}$$

Потребуем, чтобы переменный коэффициент при $z^{-\sigma}$ стал автономным. Тогда получим соотношение

$$xv^{-\sigma}u^{-1} = 1. \tag{7.5}$$

I. Выберем в (7.5) $u = 1, v = x^{1/\sigma}$. Преобразование КЛ примет вид подстановки одной лишь зависимой переменной

$$y = x^{1/\sigma}z, \quad dt = dx. \tag{7.6}$$

Посредством (7.6) уравнение (7.4) станет следующим:

$$z'' + \frac{2}{\sigma x}z' + \frac{1}{\sigma}(\frac{1}{\sigma} - 1)\frac{1}{x^2}z + \frac{\sigma}{z}(z' + \frac{1}{\sigma x}z)^2 + \frac{\sigma + 1 - \beta}{2(\beta - 1)}z^{-\sigma}(z' + \frac{1}{\sigma x}z) +$$
$$+ \frac{n}{x}(z' + \frac{1}{\sigma x}z) + x^{\frac{\beta-\sigma-1}{\sigma}}z^{\beta-\sigma} - \frac{1}{\beta - 1}x^{-1}z^{1-\sigma} = 0. \tag{7.7}$$

Найдем асимптотические решения (7.7) при $x \to \infty$:

а) $\beta < \sigma + 1$. Тогда получим уравнение

$$z'' + \frac{\sigma}{z}z'^2 + \frac{\sigma + 1 - \beta}{2(\beta - 1)}z^{-\sigma}z' = 0. \tag{7.8}$$

Методом точной линеаризации, а именно нелинейным преобразованием

$$w = z, \quad ds = z^{-\sigma}dx$$

придем к линейному уравнению

$$z''(s) + \frac{\sigma + 1 - \beta}{2(\beta - 1)}z'(s) = 0.$$

Однопараметрические решения уравнения (7.8) имеют вид

$$z = (rx + C)^{1/\sigma}, \quad r = \frac{\sigma(\sigma + 1 - \beta)}{2(1 - \beta)}, \quad z = \text{const}.$$

В качестве асимптотических решений уравнения (7.1) можно взять

$$y = \lambda x^{2/\sigma} \quad \text{и} \quad y = \mu x^{1/\sigma},$$

где λ и μ принимают определенные значения, причем для "нейтрализации" члена $y^{\beta-\sigma}$ нужно взять $\beta < \sigma$;

б) $\beta = \sigma + 1$. Тогда уравнение (7.7), допускающее асимптотическое решение, примет вид

$$z'' + \frac{\sigma}{z}z'^2 + z = 0. \tag{7.9}$$

Уравнение (7.9) подстановкой $z = w^{1/(\sigma+1)}$ приводится к линейному виду

$$w'' + (\sigma + 1)w = 0.$$

Тогда общее решение (7.9) имеет вид

$$z = \begin{cases} (c_1 e^{\sqrt{-\sigma-1}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\sigma-1}x})^{1/(\sigma+1)}, & \sigma < -1; \\ (c_1 \cos\sqrt{\sigma + 1}x + c_2 \sin\sqrt{\sigma + 1}x)^{1/(\sigma+1)}, & \sigma > -1. \end{cases} \tag{7.10}$$

Из (7.10) и (7.6) можно получить асимптотическое автомодельное решение (7.1).

II. Выберем в (7.5) $u = x^{-1}$, $v = x^{2/\sigma}$. Тогда подстановка

$$y = x^{2/\sigma} z, \quad dt = x^{-1} dx$$

преобразует уравнение (7.4) в уравнение

$$\ddot{z} + (\frac{4}{\sigma} - 1)\dot{z} + \frac{2}{\sigma}(\frac{2}{\sigma} - 1)z + \frac{\sigma}{z}(\dot{z} + \frac{2}{\sigma}z)^2 + n(\dot{z} + \frac{2}{\sigma}z) +$$
$$+ \frac{\beta - (\sigma + 1)}{2(1 - \beta)} z^{-\sigma}(\dot{z} + \frac{2}{\sigma}z) + \frac{1}{1 - \beta} z^{1-\sigma} + x^{2(\beta-1)/\sigma} z^{\beta - \sigma} = 0.$$

Теперь потребуем, чтобы $(\beta - 1)/\sigma < 0$. Тогда поиск асимптотических решений приведет к уравнению

$$\ddot{z} + (\frac{4}{\sigma} - 1)\dot{z} + \frac{2}{\sigma}(\frac{2}{\sigma} - 1)z + \frac{\sigma}{z}(\dot{z} + \frac{2}{\sigma}z)^2 + n(\dot{z} + \frac{2}{\sigma}z) +$$
$$+ \frac{\beta - (\sigma + 1)}{2(1 - \beta)} z^{-\sigma}(\dot{z} + \frac{2}{\sigma}z) + \frac{1}{1 - \beta} z^{1-\sigma} = 0.$$

Так как полученное уравнение имеет в качестве решения определенную постоянную, то и в качестве асимптотического решения может быть выбрана функция $y = \lambda x^{2/\sigma}$, где λ — некоторая постоянная.

8. Уравнение Колмогорова—Петровского—Пискунова

Одним из фундаментальных уравнений естествознания является уравнение КПП

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u), \qquad k = \text{const}, \tag{8.1}$$

где $F(u)$ есть нелинейная функция, удовлетворяющая условиям

$$F(0) = F(1) = 0, \quad F'(0) = \alpha, \quad F'(u) < \alpha, \quad 0 < u < 1, \quad (\ ' \ ) = \frac{d}{du}. \tag{8.2}$$

Это уравнение рассматривалось в [11–14] в связи с задачей определения инвариантных решений типа бегущей волны

$$u(x, t) = y(\tau), \quad \tau = ax + bt. \tag{8.3}$$

Специальный случай (8.1), (8.2) есть хорошо известное в генетике уравнение Фишера:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u). \tag{8.4}$$

Решение (8.4) типа бегущей волны при $\tau = x - bt$ удовлетворяет т.н. полулинейному уравнению

$$y'' + by' + y - y^2 = 0, \quad (\ ' \ ) = \frac{d}{d\tau}. \tag{8.5}$$

Если скорость волны $b = 5/\sqrt{6} \approx 2.04$, то (8.5) допускает однопараметрическое семейство решений:

$$y = \left(1 + ce^{x/\sqrt{6}}\right)^{-2}, \quad c \quad \text{есть параметр.}$$

Уравнение (8.5) есть частный случай примера 3.1 (см. рис. 1–3).

8.1. Связь между уравнениями КПП и ЭФ

Между уравнениями КПП и ЭФ существует глубокая связь, которую можно проследить на следующем примере. Пусть уравнение ЭФ имеет вид

$$y'' + \frac{n+m+2}{(n+1)x}y' + kx^{m-1}y^n = 0. \tag{8.6}$$

Тогда преобразованием КЛ

$$y = x^{-(m+1)/(n-1)}z, \quad d\tau = x^{-1}dx \tag{8.7}$$

оно приводится к автономному виду

$$\ddot{z} - \frac{(m+1)(n+3)}{n^2-1}\dot{z} + \frac{2(m+1)^2}{(n+1)(n-1)^2}z + kz^n = 0, \quad (\cdot) = \frac{d}{d\tau}. \tag{8.8}$$

В то же время уравнение КПП

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + \frac{(n+1)(n-1)^2}{2(m+1)^2}ku^n \tag{8.9}$$

после приведения к полулинейному виду преобразованиями

$$u = z, \quad \tau = ax + bt, \quad a^2 = \frac{(n-1)^2(n+1)}{2(m+1)^2}, \quad b = \frac{(n-1)(n+3)}{2(m+1)} \tag{8.10}$$

также приводится к автономному ОДУ (8.8), допускающему следующие семейства решений:

$$z = \left[\pm\frac{p(n^2-1)}{2(m+1)} + C\exp\left(-\frac{m+1}{n+1}\tau\right)\right]^{-\dfrac{2}{n-1}}, \quad p = \sqrt{-\frac{2k}{n+1}}.$$

8.2. Связь уравнений КПП, Семенова и Зельдовича

Уравнение Семенова (Фитж—Хью—Нагумо), используемое, в частности, в теории цепных химических реакций, имеет вид (8.1) с условиями для $F(u)$:

$$F(0) = F(1) = 0, \quad F'(0) = \alpha > 0, \quad F'(1) < \alpha, \quad 0 < u < 1, \quad (\,'\,) = \frac{d}{du}.$$

Уравнение Зельдовича, играющее важную роль в математической теории горения и взрыва, имеет вид (8.1) с условиями для $F(u)$:

$$F(0) = F(1) = 0, \quad F'(0) = 0, \quad F'(1) < 0.$$

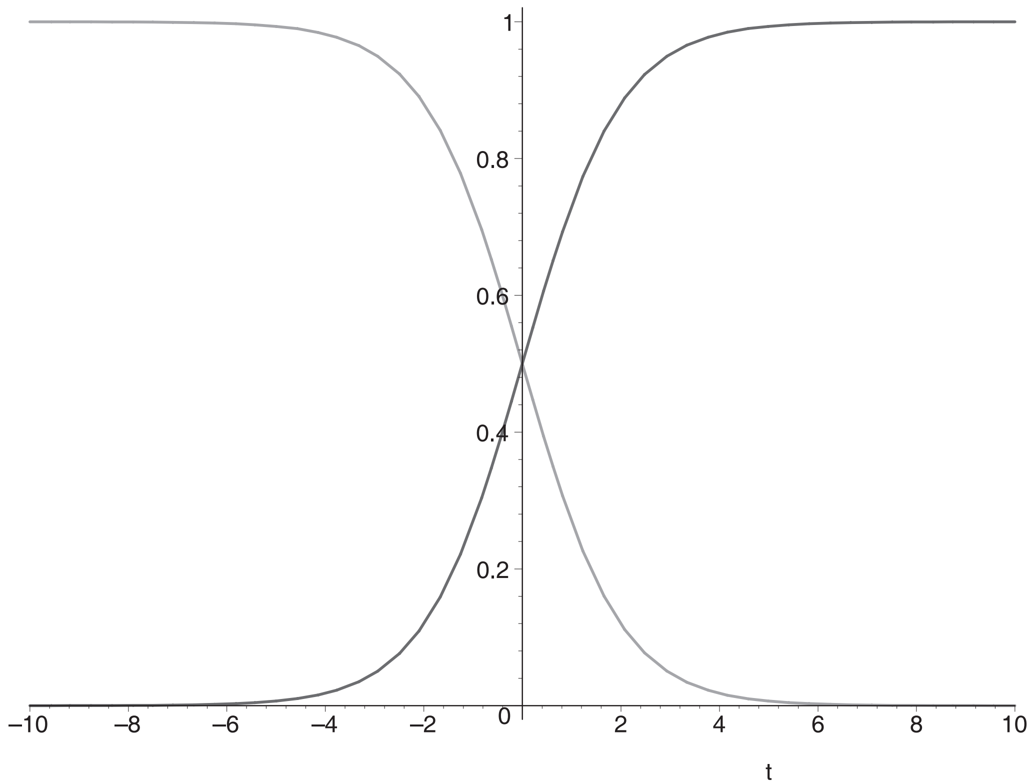


Рис. 1. S-образные кривые

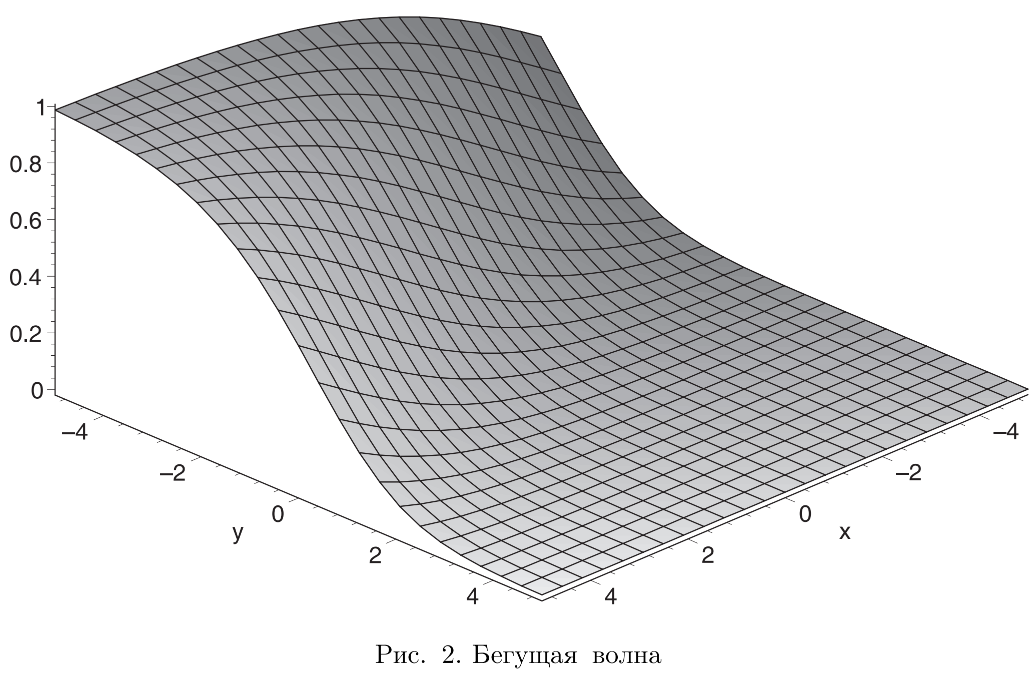


Рис. 2. Бегущая волна

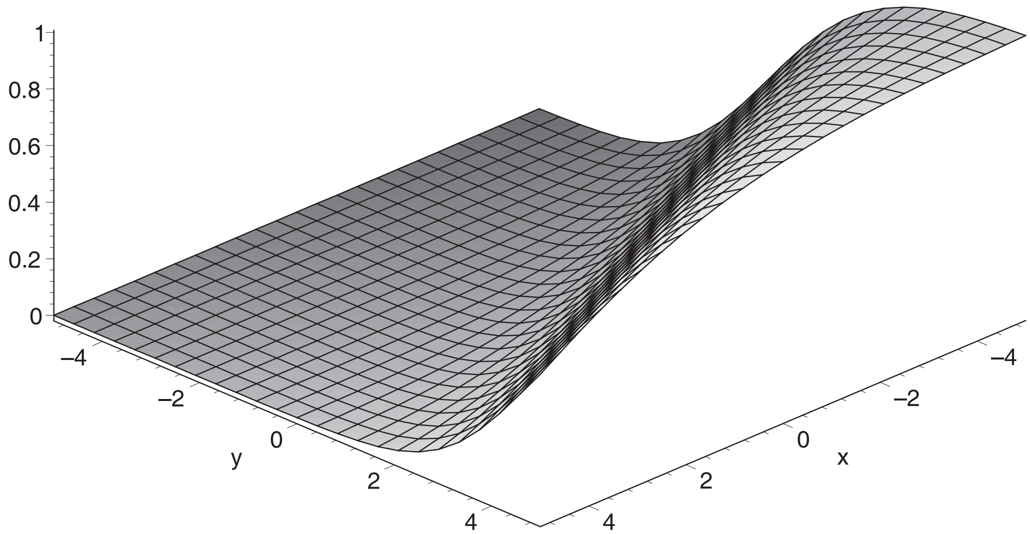


Рис. 3. Бегущая волна

Найдем связь между полулинейными уравнениями КПП, Семенова и Зельдовича посредством логистического уравнения.

В качестве нелинейного члена $F(u)$ для уравнения Семенова используем выражение

$$F(u) = -pu^3 + (p+q)u^2 - qu, \quad (p > q > 0, \quad a_1 = q \quad \text{или} \quad p,$$

а для уравнения Зельдовича — выражение

$$F(u) = u^\nu(1-u), \quad \nu > 1.$$

В результате наблюдения была раскрыта связь полулинейных уравнений Семенова

$$f_{\text{sem}} \equiv \frac{d^2u}{d\tau^2} + (1 - 2q/p)\frac{du}{d\tau} - 2u^3 + 2(1 + q/p)u^2 - \frac{2q}{p}u = 0$$

($\tau = ax + bt, \quad a^2 = p/2, \quad b = q - p/2$) и Зельдовича

$$f_{\text{zeld}}(u) \equiv \frac{d^2u}{d\tau^2} + \frac{du}{d\tau} + 2u^2(1-u) = 0$$

($\tau = ax + bt, \quad a^2 = 1/2, \quad b = -1/2$) с полулинейным уравнением КПП

$$f_{\text{kpp}}(u) \equiv \frac{d^2u}{d\tau^2} - 3\frac{du}{d\tau} + 2u(1-u^2) = 0$$

посредством логистического уравнения

$$\varphi_{\log}(u) \equiv \frac{du}{d\tau} + u^2 - u = 0.$$

Наблюдение. Имеют место следующие представления:

$$f_{\text{sem}}(u) = -f_{\text{kpp}}(1-u) - (4 - \frac{2q}{p})\varphi_{\log}(1-u),$$

$$f_{\mathrm{zeld}}(u) = -f_{\mathrm{kpp}}(1-u) - 4\varphi_{\log}(1-u),$$

причем полулинейные уравнения Семенова и Зельдовича обладают одним и тем же однопараметрическим семейством решений (c — параметр)

$$u = (1 + c\exp\tau)^{-1}.$$

9. Линеаризация уравнений третьего порядка

Линеаризуемые уравнения 3-го порядка, принадлежащие классу (4.10), имеют вид

$$y''' + 3fy'y'' + \left(\frac{1}{3}\frac{\varphi^{**}}{\varphi} - \frac{5}{9}\frac{\varphi^{2*}}{\varphi^2} - \frac{1}{3}f\frac{\varphi^*}{\varphi} + f^2 + f^*\right)y'^3 + 3b_1\varphi\left[y'' + \left(f + \frac{1}{3}\frac{\varphi^*}{\varphi}\right)y'^2\right] +$$
$$+3b_2\varphi^2 y' + +b_3\varphi^{5/3}\exp\left(-\int f dy\right)\int \varphi^{4/3}\exp\left(\int f dy\right)dy = 0. \qquad (9.1)$$

Подстановка

$$z = \beta\int \varphi^{4/3}\exp\left(\int f dy\right)dy, \quad dt = \varphi dx$$

приводит к линейному ОДУ

$$\dddot{z} + 3b_1\ddot{z} + 3b_2\dot{z} + b_3 z = 0.$$

Уравнение (9.1) допускает однопараметрические семейства решений

$$r_k x + C_k = \int \frac{\varphi^{1/3}\exp(\int f dy)dy}{\int \varphi^{4/3}\exp(\int f dy)dy},$$

где r_k — простые корни характеристического уравнения

$$r^3 + 3b_1 r^2 + 3b_2 r + b_3 = 0.$$

Пример 9.1. Триплет. Квадратично-нелинейные системы ОДУ, которыми описываются многие математические модели процессов, происходящих в природе и обществе, обнаруживают много общего и часто оказываются просто эквивалентными. Так, например, уравнения триплета, простейшей системы гидродинамического типа [15], эквивалентны уравнениям Эйлера

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = pu_2u_3, \\ \dot{u}_2 = qu_3u_1, \\ \dot{u}_3 = ru_1u_2, \end{cases} \qquad (9.2)$$

где $p + q + r = 0$.

Система (9.2) исключением переменных сводится к несвязанной системе

$$\begin{cases} \dddot{u}_1 - \dfrac{\dot{u}_1\ddot{u}_1}{u_1} - 4qru_1^2\dot{u}_1 = 0, \\ \dddot{u}_2 - \dfrac{\dot{u}_2\ddot{u}_2}{u_2} - 4rpu_2^2\dot{u}_2 = 0, \\ \dddot{u}_3 - \dfrac{\dot{u}_3\ddot{u}_3}{u_3} - 4pqu_3^2\dot{u}_3 = 0, \end{cases}$$

применив к которой преобразования

$$u_i^2 = z_i, \quad d\tau = u_i dt \quad (i = 1, 2, 3), \tag{9.3}$$

придем к следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} z_1'''(\tau) - 4qrz_1'(\tau) &= 0, \\ z_2'''(\tau) - 4rpz_2'(\tau) &= 0, \\ z_3'''(\tau) - 4pqz_3'(\tau) &= 0. \end{cases}$$

Пример 9.2. Система С.В. Ковалевской имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(ax + by + cz), \\ \dot{y} &= y(a_1x + b_1y + c_1z), \\ \dot{z} &= z(a_2x + b_2y + c_2x). \end{cases} \tag{9.4}$$

При значениях параметров $a_1 = a_2 = -a$, $b_1 = -b$, $b_2 = b$, $c_1 = c$, $c_2 = -c$ исключением переменных приведем ее к несвязанной системе

$$\begin{cases} \dddot{x} - \dfrac{\dot{x}\ddot{x}}{x} - 4a^2\dot{x} &= 0, \\ \dddot{y} - \dfrac{\dot{y}\ddot{y}}{y} - 4b^2\dot{y} &= 0, \\ \dddot{z} - \dfrac{\dot{z}\ddot{z}}{z} - 4c^2\dot{z} &= 0. \end{cases} \tag{9.5}$$

Далее (9.5) нелинейным преобразованием типа (9.3), а именно подстановками

$$z_i = x_i^2, \quad d\tau = x_i dt \quad (i = 1, 2, 3),$$

придем к следующей несвязанной системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} z_1'''(\tau) - 4a^2z_1'(\tau) &= 0, \\ z_2'''(\tau) - 4b^2z_2'(\tau) &= 0, \\ z_3'''(\tau) - 4c^2z_3'(\tau) &= 0. \end{cases}$$

В примерах 9.1 и 9.2 линеаризация динамических систем прошла путем предварительного превращения связанной системы в несвязанную за счет повышения порядка уравнений. Но так же, как в п. 5.3, возможна линеаризация связанной нелинейной динамической системы третьего порядка.

Пример 9.3. Линеаризация связанной системы. Дана система

$$\begin{cases} \dot{x} &= a_1\dfrac{f(x)}{f'(x)}u(x,y,z) + b_1\dfrac{g(y)}{f'(x)}u(x,y,z) + c_1\dfrac{h(z)}{f'(x)}u(x,y,z), \\ \dot{y} &= a_2\dfrac{f(x)}{g'(y)}u(x,y,z) + b_2\dfrac{g(y)}{g'(y)}u(x,y,z) + c_2\dfrac{h(z)}{g'(y)}u(x,y,z), \\ \dot{z} &= a_3\dfrac{f(x)}{h'(z)}u(x,y,z) + b_3\dfrac{g(y)}{h'(z)}u(x,y,z) + c_3\dfrac{h(z)}{h'(z)}u(x,y,z). \end{cases}$$

Нелинейным преобразованием

$$X = f(x), \quad Y = g(y), \quad Z = h(z), \quad d\tau = u(x,y,z)dt$$

она приводится к линейной связанной системе

$$\begin{cases} X' &= a_1X + b_1Y + c_1Z, \\ Y' &= a_2X + b_2Y + c_2Z, \\ Z' &= a_3X + b_3Y + c_3Z. \end{cases}$$

10. Об уравнении Кортевега—де Фриза и солитонах

Открытие солитона (уединенной волны), его замечательных свойств и необыкновенного богатства математических методов его описания осуществлялась в два этапа, на протяжении почти 140 лет. История берет свое начало с наблюдения инженером Д.С. Расселлом большой бегущей волны при изучении пропускной способности одного из каналов в Шотландии. Вот как он сам описал свое открытие:

"Я наблюдал за движением баржи, которую быстро тянула по узкому каналу пара лошадей, когда баржа неожиданно остановилась. Но масса воды, которую баржа привела в движение, не остановилась, а собралась у носа судна в состоянии бешеного движения, затем неожиданно оставила его позади, катясь вперед с огромной скоростью и принимая форму большого одиночного возвышения, т.е. округлого, гладкого и четко выраженного водяного холма, который продолжал свой путь вдоль канала, не меняя своей формы и не снижая скорости. Я последовал за ним верхом ..., его высота постепенно уменьшалась, и после одной или двух миль погони я потерял его в изгибах канала. Так в августе 1834 г. мне впервые довелось столкнуться с необычным и красивым явлением, которое я назвал уединенной волной трансляции. С тех пор я обнаружил, что такие волны играют важную роль почти во всех случаях, когда жидкость оказывает сопротивление движению, и пришел к убеждению, что к тому же типу относятся огромные движущиеся повышения уровня моря, которые с регулярностью обращения небесного тела входят в наши реки и катятся вдоль наших побережий."

Сначала сделанное Расселлом описание своего открытия ученые встретили со скептитизмом и даже с неприятием. Они сомневались в том, может ли волна, распространяющаяся без изменения формы, целиком располагаться выше уровня воды. Расселл предположил (правильно), что это несоответствие вызвано трением.

Само уравнение, математически описывающее наблюдаемое Расселлом явление уединенной волны, было выведено лишь в 1895 г. голландским профессором Кортевегом и его дипломником де Фризом. Открытие универсальной природы солитона еще ждало своего часа. В 1965 году уравнение было переоткрыто Забуским и Крускалом. Им же принадлежит термин "солитон". Уравнение Кортевега—де Фриза (КдФ) имеет вид

$$u_t + u_{xxx} + 6u_{xx} = 0. \tag{10.1}$$

Решение в виде солитона было обнаружено в результате вычислительного эксперимента. "Синергетический подход к нелинейным математическим и физическим задачам можно определить как совместное использование математического анализа и численной машинной математики для получения решений системы уравнений математического и физического содержания.” (И. Забуский)

Вскоре, однако, П. Лакс заметил, что некоторые важные интегрируемые уравнения математической физики могут быть формально представлены в виде операторного уравнения

$$L_t + [L, A] = 0, \tag{10.2}$$

где операторы L, A образуют т.н. пару Лакса, а $[L, A]$ — их коммутатор.

В частности, уравнение КдФ (10.1) может быть также представлено в виде (10.2), где L и A являются дифференциальными операторами соответственно вида $L = D^2 + u(x,t), \quad A = -4D^3 - 6uD - 3u_x, \quad D = \dfrac{\partial}{\partial x}$.

Уравнению КдФ удовлетворяют, в частности, бегущие волны, имеющие вид солитонов. Солитон, удовлетворяющий начальному условию $u(x) = \dfrac{2q^2}{\operatorname{ch}^2 x}$, описывается уравнением (см. рис. 4)

$$u(x - 4q^2t) = \frac{2q^2}{\operatorname{ch}^2 q(x - x_0 - 4q^2t)}.$$

Таким образом, оправдываются слова С.П.Новикова: ”Солитоника все больше становится разделом теории нелинейных дифференциальных уравнений”.

11. Система Лоренца

В 1963 г. американский метеоролог Э. Лоренц опубликовал статью ”Детерминированное непериодическое течение”, в которой обсуждались результаты численного исследования достаточно простой системы ДУ, моделирующих динамику жидкости при конвекции в подогреваемом снизу слое. Лоренц подверг полученные результаты тщательному и глубокому обсуждению, акцентируя внимание на связь между сложным поведением системы и присущей ей неустойчивости. Позднее, воспользовавшись образом, заимствованным из рассказа Рэя Брэдбери, это свойство пропагандировалось им как ”эффект бабочки” (butterfly effect)[6]: в приложении к метеорологии

[6] Брэдбери Р. И грянул гром // О скитаниях вечных на Земле. М.: Правда, 1987. С. 602–617.

В рассказе говорится о том, как с помощью Машины времени совершено было путешествие в далекое прошлое, а именно на 60 миллионов лет назад, с целью охоты на динозавра, который и так должен был погибнуть мгновение спустя из-за того, что его придавит обломившееся дерево. Поэтому охота никак не могла повлиять на дальнейшую эволюцию. Но охотник оступился и случайно придавил ботинком бабочку. По возвращении назад он с ужасом узнал, что вместо действовавшего на период путешествия на Машине времени президента США был избран его соперник, и даже правила грамматики изменились.

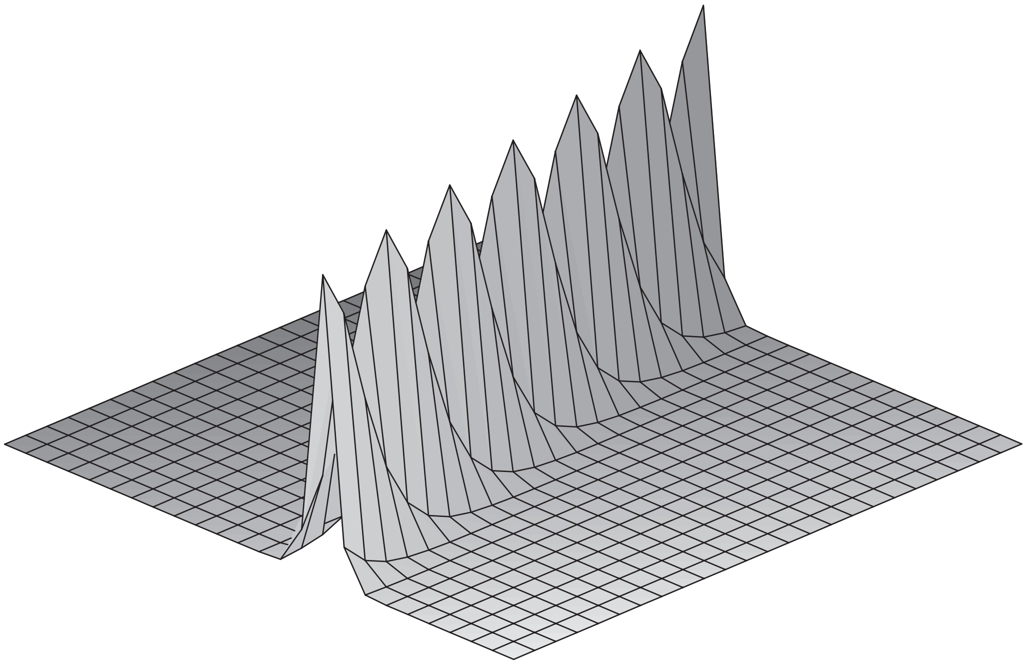


Рис. 4. Солитон

взмах крыльев бабочки может через достаточно продолжительное время повлечь существенное изменение погоды. Таким образом, оказывается невозможным предсказать поведение даже достаточно простой системы.

Однако заметим, что сама возможность появления динамического хаоса в детерминированных системах была теоретически доказана значительно раньше при исследовании траекторий движений в задаче трех тел небесной механики. "В неустойчивых системах совершенно ничтожная причина, ускользающая от нас по своей малости, вызывает значительные действия, которые мы не в состоянии предугадать ... . Предсказание становится невозможным" (Анри Пуанкаре. Наука и Метод. 1908 г.).

Система Лоренца имеет вид

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \sigma(y-x), \\ \dot{y} & = & -y+rx-zx, \\ \dot{z} & = & xy-bz. \end{array}\right. \tag{11.1}$$

Параметры σ, r, b — положительные постоянные, имеющие вполне определенный физический смысл. Так, σ — число Прандтля, r — нормированное число Рэлея, b — геометрический параметр, соответствующий характерному размеру процесса.

Решая численно систему уравнений (11.1), Э. Лоренц обнаружил при значениях параметров $b = 8/3$, $r = 28$, $\sigma \in [1, 10]$ поведение траекторий, притягивающихся в фазовом пространстве к некоторому множеству, получившему название странного (хаотического) аттрактора, который позже стал называться аттрактором Лоренца (см. рис. 5).

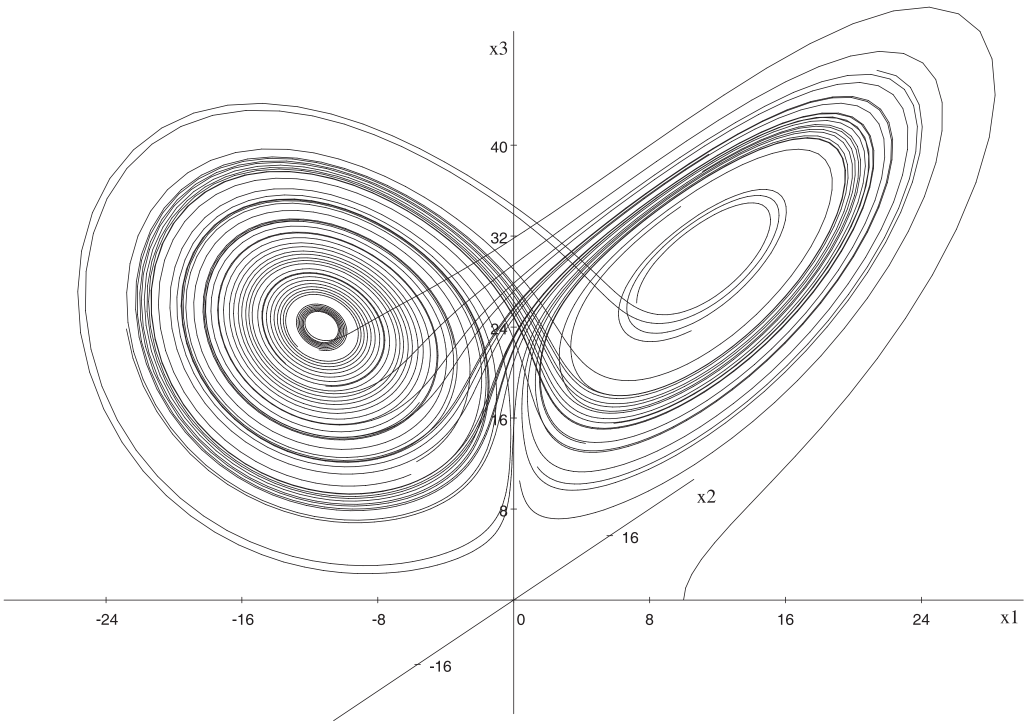


Рис. 5. Система Лоренца

11.1. Точно решаемые случаи

Преобразованием переменных

$$x = X\frac{1}{\epsilon}, \quad y = Yr, \quad z = Zr, t = \tau\epsilon, \quad \epsilon = \frac{1}{\sqrt{\sigma r}}, \quad r = \frac{1}{\epsilon^2\sigma},$$

система Лоренца сводится к следующему виду

$$\begin{cases} X' &= \quad Y - \sigma\epsilon X, \\ Y' &= -\epsilon Y + X - XZ, \\ Z' &= \quad XY - b\epsilon Z. \end{cases} \tag{11.2}$$

В предельном случае при $\epsilon \to 0$ $(r \to \infty)$ она сводится к следующей системе:

$$\begin{cases} X' &= \quad Y, \\ Y' &= X - XZ, \\ Z' &= \quad XY. \end{cases} \tag{11.3}$$

Исключая переменные Y, Z, придем к интегрируемому уравнению:

$$X_1'''(\tau) - \frac{1}{X_1}X_1'(\tau)X_1''(\tau) + X_1^2(\tau)X_1'(\tau) = 0 \quad \text{(см. п. 9).} \tag{11.4}$$

В работе [29] (см. также [21]) исследованы следующие точно решаемые случаи:

1) $\sigma = 0$;
2) $\sigma = 1/2, b = 1, r = 0$;
3) $\sigma = 1, b = 2, r = 1/9$;
4) $\sigma = 1/3, b = 0, r$ — произвольное число.

Рассмотрим случай 4), модифицируя подход, использованный в [21].

Из системы

$$\begin{cases} \dot x &= \frac{1}{3}(y - x), \\ \dot y &= zx - y - xz, \\ \dot z &= xy, \end{cases} \tag{11.5}$$

исключив переменные y, z, получим уравнение

$$\dddot x - \frac{\ddot x \dot x}{x} + \frac{4}{3}\ddot x - \frac{4}{3}\frac{1}{x}\dot x^2 + x^2 \dot x + \frac{1}{3}x^3 = 0. \tag{11.6}$$

Оно допускает факторизацию

$$\left(D + \frac{1}{x}\dot x + \frac{4}{3}\right)\left(\ddot x - \frac{\dot x^2}{x} + \frac{1}{4}x^3\right) = 0. \tag{11.7}$$

Последовательно преобразуем факторизацию (11.7):

$$\left(D + \frac{1}{x}\dot x + \frac{4}{3}\right)\frac{1}{x}\left(x\ddot x - \dot x^2 + \frac{1}{4}x^4\right) =$$

$$= \frac{1}{x}\left(D + \frac{4}{3}\right)\left(x\ddot x - \dot x^2 + \frac{1}{4}x^4\right).$$

Тогда уравнение (11.7) примет вид

$$\left(D + \frac{4}{3}\right)\left(x\ddot x - \dot x^2 + \frac{1}{4}x^4\right) = 0. \tag{11.8}$$

Первым интегралом (11.8) служит

$$x\ddot x - x^2 + \frac{1}{4}x^4 = -Ce^{-4t/3}. \tag{11.9}$$

Применив к (11.9) преобразование Куммера—Лиувилля

$$x = v(t)X, \quad d\tau = u(t)dt, \tag{11.10}$$

получим

$$v^2u^2(XX'' - X'^2) + v^2\dot u XX' + (v\ddot v - \dot v^2)X^2 + \frac{1}{4}v^4X^4 = Ce^{-4t/3}.$$

Потребуем: $v^2u^2 = Ce^{-4t/3}$, $\quad v^2u^2 = \frac{1}{4}v^4$. Тогда $v = 2u$, где $u = \sqrt[4]{\frac{c}{4}}e^{-t/3}$, откуда $\tau = -3\sqrt[4]{\frac{c}{4}}e^{-t/3}$. При этом уравнение (11.9) примет вид

$$X'' - \frac{1}{X}X'^2 + \frac{1}{\tau}X' - X^3 - \frac{1}{X} = 0. \tag{11.11}$$

Уравнение (11.11) является третьим уравнением Пенлеве. Введя обозначение $c_1 = 3\sqrt[4]{\dfrac{c}{4}}$, получим $c = \dfrac{4}{81}c_1^4$, а преобразование (11.10) примет вид

$$x(t) = \frac{2c_1}{3}e^{-t/3}X(\tau), \quad d\tau = \frac{c_1}{3}e^{-t/3}dt.$$

Заключение

Точное аналитическое решение нелинейных дифференциальных уравнений мы в подавляющем большинстве случаев получить не можем. "Создаваемые математиками методы решения нелинейных дифференциальных уравнений — это пока не слишком универсальный инструмент для проникновения в тайны пространственно-временной архитектуры тех сложнейших систем, что окружают нас."

Представленные в данной статье методы не умаляют значения ни других аналитических методов, ни методов численного анализа и качественной теории, а также компьютерного моделирования. Лишь совместное их применение принесет наибольшую пользу. Однако построение алгоритмов для нахождения точных решений есть главная цель любой эффективной теории ОДУ. Явные формулы имеют непреходящую ценность и сосредоточивают всю возможную информацию об уравнениях. Они необходимы для развития математической и физической интуиции, а также для сравнения различных теорий, включая границы их применимости. По мнению автора, дальнейшая разработка и применение методов нелинейной динамики позволят пролить новый свет как на многие уже решенные, так и на нерешенные пока задачи естествознания.

Литература

[1] Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. М.: Наука, 1997.

[2] Режимы с обострением. Эволюция идеи. Законы коэволюции сложных структур / Под ред. Г.Г. Малинецкого. М.: Наука, 1999. 255 с.

[3] Данилов Ю.А. Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение. М.: Постмаркет, 2001.

[4] Беркович Л.М. Александр Андронов и нелинейная наука // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2001. №4(22). С. 9–18.

[5] Беркович Л.М. Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002. 463 с.

[6] Беркович Л.М. Факторизация, преобразования и интегрируемость обыкновенных дифференциальных уравнений. Ч. 1. // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2003. Спец. выпуск. С. 5–43;

Беркович Л.М. Факторизация, преобразования и интегрируемость обыкновенных дифференциальных уравнений. Ч. 2. // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2003. №4(30). С. 36–78.

[7] Беркович Л.М. Факторизация нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и линеаризация // Доклады РАН, 1999. Т. 368. №5. С. 604–608.

[8] Курдюмов С.П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1982. С. 217–243.

[9] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П. и др. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.

[10] Беркович Л.М. Как прикладная математика помогла сделать открытие в физике. (Посвящается С.П. Курдюмову в связи с 75-летием со дня рождения) // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2003. 2-й спецвыпуск. С. 36–47.

[11] Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. Математическое моделирование процессов тепло- и массопереноса. М.: Наука, 1987.

[12] Беркович Л.М. Преобразования переменных как метод нахождения точных инвариантных решений уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова и связанных с ним нелинейных уравнений теплопроводности // Докл. РАН. 1992. Т. 322. №4. С. 635–640.

[13] Беркович Л.М. Факторизация как метод нахождения точных инвариантных решений уравнений КПП и связанных с ним уравнений Семенова и Зельдовича // Докл. РАН. 1992. Т. 322. №5. С. 823–827.

[14] Беркович Л.М. Об элементарных инвариантных решениях типа бегущей волны для уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова // Докл. РАН. 1998. Т. 359. №6. С. 731–734.

[15] Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.Н. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981.

[16] Беркович Л.М. Новый класс нелинейных эволюционных уравнений // Докл. РАН. 2003. Т. 390. №5. С. 583–587.

[17] Лаврентьев М.А. Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1990. С. 524–570.

[18] Морозов А.Д., Драгунов Т.Н. Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

[19] Колесов А.Ю., Розов Н.Х., Садовничий В.А. Жизнь на кромке хаоса // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 23. М.: Изд-во МГУ, 2003. С. 219–266.

[20] Кащеев В.Н. Эвристические методы получения решений нелинейных уравнений солитоники. Рига: Зинатне, 1990.

[21] Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. Изд. 2-е, испр. и доп. М.; Ижевск, 2004.

[22] Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985.

[23] Пригожин И.Р. От существующего к возникающему. М.: Наука, 1985.

[24] Управление риском. Риск. Устойчивое развитие. Синергетика (под ред. Малинецкого Г.Г.). М.: Наука, 2000.

[25] Беркович Л.М., Лепилов А.Н. О некоторых инвариантных решениях нелинейного уравнения теплопроводности // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2005. №3(37).

[26] Berkovich L.M. On the method of exact linearization of autonomous ordinary differential equations. Max-Planck-Institut für Mathematik. Bonn, Preprint Series 2001 (73). 24 p.

[27] Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.

[28] Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 320 с.

[29] Tabor M., Weiss J. Analytic structure of the Lorentz system // Phys. Rev. A., 1981. V. 24. No. 4. P. 2157–2167.

Поступила в редакцию $21/IV/2005$;
в окончательном варианте — $27/IV/2005$.

ON ANALYTICAL METHODS OF NONLINEAR DYNAMICS[7]

© 2005 L.M. Berkovich[8]

In the present paper devoted to the memory of Prof. S.P. Kurdjumov being an expert in the field of mathematical modelling of nonlinear phenomena and synergetics, an outstanding scientist and great individual, it is discussed new analytical methods in the theory of the nonlinear differential equations, developed by the author and aimed at their simplification and integrating. These methods have been reported and considered at a number of seminars in M.V. Keldysh's Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Science, that took place under Prof. S.P. Kurdjumov supervision.

Paper received $21/IV/2005$.
Paper accepted — $27/IV/2005$.

---

[7]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Y.N. Radayev.

[8]Berkovich Lev Meilikhovich (`berk@ssu.samara.ru`), Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, 443011, Samara, Russia.