

## ИНВАРИАНТНО-ГРУППОВЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

© 2004 Ю.Н. Радаев, В.А. Гудков<sup>1</sup>

Построены алгебра Ли и оптимальная система одномерных подалгебр для группы симметрий дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих осесимметричное пластическое течение, соответствующее ребру призмы Треска. Для каждого простейшего представителя одномерных подалгебр алгебры симметрий исследован вопрос о соответствующем инвариантном решении. Получены новые точные инвариантно-групповые решения, в частности, выражающиеся через эллиптические интегралы.

### 1. Постановка задачи и основные уравнения

Настоящая работа продолжает статью [1] и посвящена построению инвариантных относительно однопараметрических групп решений осесимметричной задачи идеальной пластичности при использовании критерия текучести Треска. Вывод уравнений осесимметричной задачи теории пластичности для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Треска, дан, например, в работе [2]. В этой же книге читатель может найти более или менее полную библиографию по рассматриваемой проблематике. Для ребра призмы Треска, определяемого условием  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$  ( $k$  — предел текучести при сдвиге;  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные нормальные напряжения), уравнения равновесия можно представить в форме одного векторного уравнения

$$\operatorname{grad} \sigma_3 \mp 2k \operatorname{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0}, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичное векторное поле, имеющее направление главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему (наименьшему) собственному значению  $\sigma_3$  тензора напряжений. Векторное поле  $\mathbf{n}$  необходимо яв-

<sup>1</sup>Радаев Юрий Николаевич ([radayev@ssu.samara.ru](mailto:radayev@ssu.samara.ru)), Гудков Василий Александрович ([goodkov@ssu.samara.ru](mailto:goodkov@ssu.samara.ru)), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

ляется расслоенным, т.е.  $\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{n} = 0$ , и с ним естественным образом связано каноническое преобразование декартовых координат

$$x_i = f_i(\omega^1, \omega^2, \omega^3) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.2)$$

где  $\omega^j$  — канонические изостатические координаты, причем поверхности  $\omega^3 = \text{const}$  являются слоями поля  $\mathbf{n}$ .

В случае осевой симметрии каноническое преобразование координат записывается в форме

$$x_1 = f(\omega^1, \omega^3) \cos \omega^2, \quad x_2 = f(\omega^1, \omega^3) \sin \omega^2, \quad x_3 = h(\omega^1, \omega^3), \quad (1.3)$$

где  $\omega^2$  — угловая координата.

Отображающие функции  $f$ ,  $h$  должны удовлетворять следующей системе уравнений в частных производных [2]:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \omega^1} \frac{\partial f}{\partial \omega^3} + \frac{\partial h}{\partial \omega^1} \frac{\partial h}{\partial \omega^3} = 0, \\ \left( \frac{\partial f}{\partial \omega^1} \frac{\partial h}{\partial \omega^3} - \frac{\partial f}{\partial \omega^3} \frac{\partial h}{\partial \omega^1} \right) f = \pm 1, \end{cases} \quad (1.4)$$

где  $f$  — горизонтальная, а  $h$  — вертикальная координата в меридиональной плоскости. В дальнейшем мы ограничимся выбором положительного знака в правой части второго уравнения этой системы.

В статье [1] был получен наиболее общий вид инфинитезимального оператора группы симметрий системы дифференциальных уравнений в частных производных (1.4). Он зависит от пяти произвольных постоянных. Наша цель — выявить такие дополнительные соотношения между коэффициентами инфинитезимального оператора, чтобы соответствующее инвариантное решение можно было бы определить в результате точного интегрирования того или иного обыкновенного дифференциального уравнения. Чтобы выявить указанные соотношения, в представляемой работе строится оптимальная система одномерных подалгебр алгебры симметрий системы дифференциальных уравнений (1.4). Оптимальные системы подалгебр высших размерностей здесь не рассматриваются.

## 2. Построение оптимальной системы первого порядка $\Theta_1$

Инфинитезимальный оператор группы симметрий системы дифференциальных уравнений (1.4) может принимать, как было найдено в [1], только такую форму:

$$(\zeta \cdot \partial) = C_1(\zeta_1 \cdot \partial) + C_2(\zeta_2 \cdot \partial) + C_3(\zeta_3 \cdot \partial) + C_4(\zeta_4 \cdot \partial) + C_5(\zeta_5 \cdot \partial), \quad (2.1)$$

где  $(\varsigma_i \cdot \partial)$  — операторы вида

$$\begin{aligned}(\varsigma_1 \cdot \partial) &= 3v^1 \frac{\partial}{\partial v^1} + 3v^2 \frac{\partial}{\partial v^2} + 2f \frac{\partial}{\partial f} + 2h \frac{\partial}{\partial h}, \\(\varsigma_2 \cdot \partial) &= 3v^1 \frac{\partial}{\partial v^1} - 3v^2 \frac{\partial}{\partial v^2}, \\(\varsigma_3 \cdot \partial) &= \frac{\partial}{\partial v^1}, \\(\varsigma_4 \cdot \partial) &= \frac{\partial}{\partial v^2}, \\(\varsigma_5 \cdot \partial) &= \frac{\partial}{\partial h}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Здесь  $C_j$  — произвольные постоянные,  $(\varsigma_j \cdot \partial)$  — базисные инфинитезимальные операторы, а переменные  $v^1, v^2$  введены вместо  $\omega^1, \omega^3$  в целях более компактного представления уравнений. Заметим, что инфинитезимальные операторы  $(\varsigma_3 \cdot \partial), (\varsigma_4 \cdot \partial), (\varsigma_5 \cdot \partial)$  определяют сдвиги изостатических координат  $v^1, v^2$  и вертикальной координаты  $h$ . Оператор  $(\varsigma_2 \cdot \partial)$  соответствует растяжению первой изостатической координаты в отношении  $l$  и одновременному сжатию второй изостатической координаты в отношении  $l^{-1}$ , а  $(\varsigma_1 \cdot \partial)$  — одновременному растяжению всех четырех координат в отношениях  $l^{3/2}, l^{3/2}, l, l$ . Ниже нам иногда будет удобно не включать множитель 3 в выражение для базисного оператора  $(\varsigma_2 \cdot \partial)$ . Впрочем, то же самое касается и других базисных операторов: в некоторых случаях оказывается удобным использовать их растянутые аналоги.

Так как каждый инфинитезимальный оператор группы симметрий системы (1.4) выражается линейно через операторы  $(\varsigma_i \cdot \partial)$ , то множество операторов образует пятимерное линейное пространство с базисом из инфинитезимальных операторов (2.2).

Чтобы наделить пространство инфинитезимальных операторов алгебраической структурой, вводится билинейная операция коммутации операторов (скобка Пуассона операторов) [3, с. 87] согласно

$$[(\varsigma_i \cdot \partial), (\varsigma_j \cdot \partial)] = [\varsigma_i, \varsigma_j] \cdot \partial,\tag{2.3}$$

где операция коммутации касательных векторных полей  $[\varsigma_i, \varsigma_j]$ , в свою очередь, определяется как:

$$[\varsigma_i, \varsigma_j] = (\varsigma_i \cdot \partial)\varsigma_j - (\varsigma_j \cdot \partial)\varsigma_i.\tag{2.4}$$

Линейное пространство инфинитезимальных операторов с определенной операцией коммутации операторов обладает структурой алгебры, которая носит название алгебры Ли.

Чтобы доказать, что линейная оболочка операторов (2.2) образует алгебру Ли, необходимо составить таблицу коммутации базисных инфинитезимальных операторов  $(\varsigma_i \cdot \partial)$ :

|                              | $\varsigma_1 \cdot \partial$  | $\varsigma_2 \cdot \partial$   | $\varsigma_3 \cdot \partial$   | $\varsigma_4 \cdot \partial$   | $\varsigma_5 \cdot \partial$   |
|------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| $\varsigma_1 \cdot \partial$ | 0                             | 0                              | $-3\varsigma_3 \cdot \partial$ | $-3\varsigma_4 \cdot \partial$ | $-2\varsigma_5 \cdot \partial$ |
| $\varsigma_2 \cdot \partial$ | 0                             | 0                              | $-3\varsigma_3 \cdot \partial$ | $3\varsigma_4 \cdot \partial$  | 0                              |
| $\varsigma_3 \cdot \partial$ | $3\varsigma_3 \cdot \partial$ | $3\varsigma_3 \cdot \partial$  | 0                              | 0                              | 0                              |
| $\varsigma_4 \cdot \partial$ | $3\varsigma_4 \cdot \partial$ | $-3\varsigma_4 \cdot \partial$ | 0                              | 0                              | 0                              |
| $\varsigma_5 \cdot \partial$ | $2\varsigma_5 \cdot \partial$ | 0                              | 0                              | 0                              | 0                              |

(2.5)

Алгебра Ли и ее структурный тензор на основании этой таблицы определяются однозначно.

Ясно, что структурой алгебры Ли обладает также линейное пространство касательных векторных полей  $\varsigma$  с операцией коммутации (2.4). Часто удобнее проводить рассуждения в терминах именно этой алгебры, для которой мы будем использовать обозначение  $L$ . Этим замечанием мы воспользуемся в дальнейшем изложении. Рассматриваемая в данной работе алгебра Ли касательных векторных полей пятимерна и будет обозначаться символом  $L^5$ .

Чтобы изучить внутреннюю структуру алгебры Ли  $L$ , обычно вводится линейное  $(L \rightarrow L)$  отображение  $\text{ad}(\xi)$ , заданное касательным векторным полем  $\xi$ , действующее на касательное векторное поле  $\varsigma$  однопараметрической группы Ли по формуле (см. [3, с. 186])

$$\text{ad}(\xi) \langle \varsigma \rangle = [\varsigma, \xi], \quad (2.6)$$

называемое присоединенным отображением с определяющим касательным векторным полем  $\xi$ .

Линейные отображения  $\text{ad}(\xi)$  с различными определяющими элементами  $\xi$  образуют алгебру Ли с коммутатором, задаваемым следующим равенством:

$$[\text{ad}(\varsigma_i), \text{ad}(\varsigma_j)] = \text{ad}([\varsigma_i, \varsigma_j]). \quad (2.7)$$

Ясно, что присоединенные отображения  $\text{ad}(\varsigma_i)$  ( $i = \overline{1, 5}$ ) образуют базис указанной алгебры Ли и в рассматриваемом нами случае

$$\text{ad}(\xi) \langle \varsigma \rangle = \sum_{i=1}^5 E_i \text{ad}(\varsigma_i) \langle \varsigma \rangle, \quad (2.8)$$

откуда на основании (2.1), (2.5) и (2.6) находим:

$$\begin{aligned} \text{ad}(\xi) \langle \varsigma \rangle = & (-3E_3C_1 - 3E_3C_2 + (3E_1 + 3E_2)C_3)\varsigma_3 + \\ & + (-3E_4C_1 + 3E_4C_2 + (3E_1 - 3E_2)C_4)\varsigma_4 + (-2E_5C_1 + 2E_1C_5)\varsigma_5, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $E_i$  — коэффициенты в разложении  $\xi = E_1\varsigma_1 + \dots + E_5\varsigma_5$ .

Понятие присоединенного отображения интересует нас лишь в связи с тем, что оно используется при конструировании однопараметрической группы внутренних автоморфизмов алгебры Ли  $L$  касательных векторных полей. Техника построения однопараметрической группы внутренних автоморфизмов алгебры Ли  $L$  приводится, например, в [3, с. 188-190].

Чтобы найти группу внутренних автоморфизмов алгебры Ли  $L$ , необходимо решить уравнение Ли [3, с. 188]:

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial \tau} = \text{ad}(\xi) \langle \zeta' \rangle = [\zeta', \xi] \quad (2.10)$$

с начальным условием

$$\zeta'(0) = \zeta. \quad (2.11)$$

Поясним, что  $\zeta'$  — касательное векторное поле, в которое переходит касательное векторное поле  $\zeta$  под действием однопараметрической группы преобразований, заданной уравнением Ли.

Сформулированная задача Коши имеет следующее решение:

$$\zeta' = \exp(\tau \text{ad}(\xi)) \langle \zeta \rangle. \quad (2.12)$$

Можно показать, что преобразования (2.12) являются автоморфизмами алгебры Ли  $L$ . Они называются внутренними автоморфизмами.

Заметим, что в терминах инфинитезимальных операторов уравнение (2.10) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\zeta' \cdot \partial) = [(\zeta' \cdot \partial), (\xi \cdot \partial)],$$

а начальное условие (2.11) —

$$(\zeta' \cdot \partial)|_{\tau=0} = (\zeta \cdot \partial).$$

Решение этой задачи Коши дается формулой Хаусдорфа

$$(\zeta' \cdot \partial) = (\zeta \cdot \partial) + \tau[(\zeta \cdot \partial), (\xi \cdot \partial)] + \frac{\tau^2}{2!}[[\zeta \cdot \partial], (\xi \cdot \partial)], (\xi \cdot \partial)] + \dots$$

Достаточно построить однопараметрические группы автоморфизмов, порождаемые базисными векторами  $\xi = \zeta_j$  ( $j = \overline{1, 5}$ ). Подставляя в (2.10) выражение (2.9), получим для каждого базисного вектора  $\zeta_j$  ( $j = \overline{1, 5}$ ) соответствующую группу внутренних автоморфизмов, действующую на коэффициентах  $C_i$  в разложении общего инфинитезимального оператора (2.1), определяемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений [3, с. 189]:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \dot{C}'_1 = 0, \quad \dot{C}'_2 = 0, \quad \dot{C}'_3 = 3C'_3, \quad \dot{C}'_4 = 3C'_4, \quad \dot{C}'_5 = 2C'_5; \\ 2) \quad & \dot{C}'_1 = 0, \quad \dot{C}'_2 = 0, \quad \dot{C}'_3 = 3C'_3, \quad \dot{C}'_4 = -3C'_4, \quad \dot{C}'_5 = 0; \\ 3) \quad & \dot{C}'_1 = 0, \quad \dot{C}'_2 = 0, \quad \dot{C}'_3 = -3C'_1 - 3C'_2, \quad \dot{C}'_4 = 0, \quad \dot{C}'_5 = 0; \\ 4) \quad & \dot{C}'_1 = 0, \quad \dot{C}'_2 = 0, \quad \dot{C}'_3 = 0, \quad \dot{C}'_4 = -3C'_1 + 3C'_2, \quad \dot{C}'_5 = 0; \\ 5) \quad & \dot{C}'_1 = 0, \quad \dot{C}'_2 = 0, \quad \dot{C}'_3 = 0, \quad \dot{C}'_4 = 0, \quad \dot{C}'_5 = -2C'_1. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь дифференцирование (обозначаемое точкой) производится по параметру  $\tau$ . Решая каждую из пяти выписанных систем с начальными данными

$$C'_1|_{\tau=0} = C_1, \quad C'_2|_{\tau=0} = C_2, \quad C'_3|_{\tau=0} = C_3, \quad C'_4|_{\tau=0} = C_4, \quad C'_5|_{\tau=0} = C_5, \quad (2.14)$$

в результате определим, как действуют на коэффициентах  $C_i$  однопараметрические группы автоморфизмов, соответствующие базисным касательным векторным полям  $\xi = \zeta_j$  ( $j = \overline{1, 5}$ ):

$$\begin{aligned}
1) \quad & C'_1 = C_1, \quad C'_2 = C_2, \quad C'_3 = C_3 e^{3\tau}, \quad C'_4 = C_4 e^{3\tau}, \quad C'_5 = C_5 e^{2\tau}; \\
2) \quad & C'_1 = C_1, \quad C'_2 = C_2, \quad C'_3 = C_3 e^{3\tau}, \quad C'_4 = C_4 e^{-3\tau}, \quad C'_5 = C_5; \\
3) \quad & C'_1 = C_1, \quad C'_2 = C_2, \quad C'_3 = C_3 - 3\tau C_1 - 3\tau C_2, \quad C'_4 = C_4, \quad C'_5 = C_5; \\
4) \quad & C'_1 = C_1, \quad C'_2 = C_2, \quad C'_3 = C_3, \quad C'_4 = C_4 - 3\tau C_1 + 3\tau C_2, \quad C'_5 = C_5; \\
5) \quad & C'_1 = C_1, \quad C'_2 = C_2, \quad C'_3 = C_3, \quad C'_4 = C_4, \quad C'_5 = C_5 - 2\tau C_1.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Здесь параметр  $\tau$  для каждой из однопараметрических групп изменяется независимо.

Построение оптимальной системы одномерных подалгебр алгебры симметрий системы дифференциальных уравнений (1.4) мы осуществим с помощью "наивного" подхода, состоящего в том, что общий инфинитезимальный оператор (2.1) (точнее коэффициенты  $C_i$  в его разложении по базисным операторам) подвергается различным преобразованиям из списка (2.15) так, чтобы "упростить" его настолько, насколько это представляется возможным (в частности, стремясь привести к нулевому значению как можно больше коэффициентов  $C_i$  в (2.1)). Далее мы выбираем из каждого класса инфинитезимальных операторов, переводящихся друг в друга автоморфизмами (1)–(5), по одному простейшему представителю и формируем оптимальную систему одномерных подалгебр  $\Theta_1$ .

При поиске указанных простейших представителей, кроме однопараметрических групп автоморфизмов, будем применять также преобразование, заключающееся в умножении простейшего инфинитезимального оператора на произвольную постоянную. Это преобразование, очевидно, не изменяет вида инвариантного решения системы (1.4).

Рассмотрим, как изменяются коэффициенты  $C_i$  в разложении общего инфинитезимального оператора (2.1) группы симметрий системы уравнений (1.4) при применении к ним однопараметрических групп автоморфизмов (2.15).

Прежде всего необходимо отметить, что ни один из перечисленных внутренних автоморфизмов не может изменить значений  $C_1$  и  $C_2$ . Однопараметрические группы автоморфизмов (1), (2) не могут привести к нулевому значению коэффициенты  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5$ , если сами указанные коэффициенты отличны от нуля. Однопараметрические группы автоморфизмов (3), (4), (5), напротив, могут изменить соответственно значения коэффициентов  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5$ , если, конечно, значения коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  отличны от нуля.

Дальнейшие рассуждения удобно разделить на ряд случаев.

А). Коэффициенты  $C_1$ ,  $C_2$  таковы, что  $C_1 \neq 0$ ,  $C_1 + C_2 \neq 0$ ,  $C_1 - C_2 \neq 0$ .

Применяя автоморфизмы (3), (4), (5) при значениях  $\tau$ , равных соответственно  $\frac{C_3}{3(C_1 + C_2)}$ ,  $\frac{C_4}{3(C_1 - C_2)}$ ,  $\frac{C_5}{2C_1}$ , можно добиться того, чтобы коэффициенты  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5$  были приведены к нулевым значениям; применяя затем преобразование умножения, приводим значение коэффициента  $C_1$  к единице, полагаем  $C_2 = C$  и получаем в результате простейшего представителя в форме:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) + C(\varsigma_2 \cdot \partial), \quad (2.16)$$

где  $C \neq 1$ ,  $C \neq -1$ .

В).  $C_1 = 0$  и  $C_2 \neq 0$ .

Коэффициент  $C_5$  привести к нулевому значению не удастся. Однако с помощью автоморфизмов (3) и (4) удастся привести к нулевым значениям величины  $C_3$  и  $C_4$ .

Если считать, что  $C_5 \neq 0$ , то, применяя автоморфизм (1) при  $\tau$ , равном  $\frac{1}{2} \ln|C_2/C_5|$ , приводим коэффициенты  $C_2$  и  $C_5$  к одному и тому же абсолютному значению и, применяя затем преобразование умножения, получим простейших представителей в следующем виде:

$$(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_5 \cdot \partial). \quad (2.17)$$

Если  $C_5 = 0$ , то простейший представитель есть:

$$(\varsigma_2 \cdot \partial). \quad (2.18)$$

С).  $C_1 - C_2 = 0$  и  $C_2 \neq 0$ .

Коэффициент  $C_4$  привести к нулевому значению не удастся, но с помощью автоморфизмов (3) и (5) удастся привести к нулевым значениям величины  $C_3$  и  $C_5$ .

В случае  $C_4 \neq 0$ , применяя автоморфизм (1) при  $\tau$ , равном  $\frac{1}{3} \ln|C_2/C_4|$ , приводим коэффициенты  $C_2$  и  $C_4$  к одному и тому же абсолютному значению. В итоге находим двух простейших представителей:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) + (\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial). \quad (2.19)$$

Если  $C_4 = 0$ , то простейший представитель будет вида (2.16) при  $C = 1$ .

Д).  $C_1 + C_2 = 0$  и  $C_2 \neq 0$ .

Коэффициент  $C_3$  привести к нулевому значению не удастся. При помощи автоморфизмов (4) и (5) удастся привести к нулевым значениям величины  $C_4$  и  $C_5$ .

Если  $C_3 \neq 0$ , то, применяя автоморфизм (1) при  $\tau$ , равном  $\frac{1}{3} \ln|C_1/C_3|$ , приводим коэффициенты  $C_1$  и  $C_3$  к одному и тому же абсолютному значению. В результате определяются еще два простейших представителя:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) - (\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_3 \cdot \partial). \quad (2.20)$$

Если  $C_3 = 0$ , то простейший представитель будет вида (2.16) при  $C = -1$ .

Е). Одновременно выполняются условия  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$ .

Все три коэффициента  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5$  привести к нулевым значениям не удастся.

Если  $C_3 \neq 0$ ,  $C_4 \neq 0$ ,  $C_5 \neq 0$ , то, применяя автоморфизм (2) при  $\tau$ , равном  $\frac{1}{6} \ln|C_4/C_3|$ , приводим коэффициенты  $C_3$  и  $C_4$  к значениям, равным по модулю, и, применяя после этого автоморфизм (1) при  $\tau$ , равном  $\ln|C_5/C_4|$ ,

приводим к одному и тому же абсолютному значению коэффициенты  $C_3$ ,  $C_5$ . В результате получаем простейших представителей (знаки не согласованы и выбираются независимо)

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_5 \cdot \partial). \quad (2.21)$$

В случае, когда один из коэффициентов  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5$  равен нулю, получаем следующих простейших представителей:

$$(\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_5 \cdot \partial), \quad (2.22)$$

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_5 \cdot \partial), \quad (2.23)$$

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial). \quad (2.24)$$

Если два из коэффициентов  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5$  равны нулю, то имеем простейших представителей вида

$$(\varsigma_3 \cdot \partial), \quad (2.25)$$

$$(\varsigma_4 \cdot \partial), \quad (2.26)$$

$$(\varsigma_5 \cdot \partial). \quad (2.27)$$

Перечисленные инфинитезимальные операторы (21 индивидуальный оператор и одно однопараметрическое семейство) образуют оптимальную систему  $\Theta_1$  одномерных подалгебр алгебры симметрий системы дифференциальных уравнений (1.4). Это подалгебры, порожденные инфинитезимальными операторами

$$\begin{aligned} &(\varsigma_1 \cdot \partial) + C(\varsigma_2 \cdot \partial), & (\varsigma_2 \cdot \partial), \\ &(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_5 \cdot \partial), & (\varsigma_5 \cdot \partial), \\ &(\varsigma_1 \cdot \partial) + (\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial), & (\varsigma_4 \cdot \partial), \\ &(\varsigma_1 \cdot \partial) - (\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_3 \cdot \partial), & (\varsigma_3 \cdot \partial), \\ &(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_5 \cdot \partial), & (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_5 \cdot \partial), \\ &(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_5 \cdot \partial), & (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Напомним, что в этом списке знаки не согласованы и могут быть выбраны независимо. В каждом элементе списка один из базисных операторов  $(\varsigma_j \cdot \partial)$  может быть замещен своим коллинеарным аналогом. При построении списка не учтены дискретные симметрии системы дифференциальных уравнений (1.4):

$$\begin{aligned} &f \rightarrow -f; \\ &v^1, v^2 \rightarrow -v^1, -v^2; \\ &v^1, v^2, h \rightarrow -v^1, v^2, -h; \\ &v^1, v^2, h \rightarrow v^1, -v^2, -h; \\ &v^1, v^2 \rightarrow -v^2, v^1; \\ &v^1, v^2 \rightarrow v^2, -v^1; \\ &v^1, v^2, h \rightarrow v^2, v^1, -h. \end{aligned} \quad (2.29)$$

### 3. Инвариантные решения, соответствующие оптимальной системе одномерных подалгебр $\Theta_1$

Рассмотрим инвариантные решения системы дифференциальных уравнений (1.4), которые соответствуют каждому из простейших представителей одномерных подалгебр алгебры симметрий этой системы, перечисленных выше в (2.28). Результаты будут разделены на двенадцать классов так, как это предусматривается (2.28). Дополнительно могут быть получены решения с помощью применения группы симметрий системы (1.4) к решениям для простейших представителей, т.е. с помощью замены переменных

$$\tilde{v}^1 = d_1^3 d_2 v^1 + a_1, \quad \tilde{v}^2 = d_1^3 d_2^{-1} v^2 + a_2, \quad \tilde{f} = d_1^2 f, \quad \tilde{h} = d_1^2 h + a_3, \quad (3.1)$$

где  $d_1 \neq 0$ ,  $d_2 \neq 0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  есть произвольные постоянные, а также с помощью применения дискретных симметрий (2.29).

**3.1.** Критерий инвариантности  $(\zeta_1 + C\zeta_2) \cdot \partial I = 0$  приводит к характеристической системе

$$\frac{dv^1}{3(1+C)v^1} = \frac{dv^2}{3(1-C)v^2} = \frac{df}{2f} = \frac{dh}{2h}. \quad (3.2)$$

В случае  $C \neq 1$ ,  $C \neq -1$  по ее первым интегралам базисные инварианты находятся в форме

$$I_1 = \frac{(v^1)^{1/3/(1+C)}}{(v^2)^{1/3/(1-C)}}, \quad I_2 = \frac{f}{(v^1)^{1/3/(1+C)}(v^2)^{1/3/(1-C)}}, \quad I_3 = \frac{h}{(v^1)^{1/3/(1+C)}(v^2)^{1/3/(1-C)}}. \quad (3.3)$$

Базисные инварианты такого типа были рассмотрены в работе [1] (если принять, что  $\alpha = 1/3/(1+C)$ ,  $\beta = 1/3/(1-C)$ ) и им соответствуют автомодельные решения, определяемые системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} [\Psi(\lambda)\Phi'(\lambda) - \Phi(\lambda)\Psi'(\lambda)]\Phi(\lambda) = \lambda^{3C-1}, \\ [\Phi(\lambda)]^2 + \frac{1}{4}[\Psi(\lambda)]^2 - [\Phi'(\lambda)\lambda]^2 - \frac{1}{4}[\Psi'(\lambda)\lambda]^2 = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

где  $\lambda = (\alpha^{-1}v^1)^\alpha(\beta^{-1}v^2)^{-\beta}$ ,  $\Phi(\lambda) = (\alpha^{-1}v^1)^{-\alpha}(\beta^{-1}v^2)^{-\beta}f$ ,  $\Psi(\lambda) = 2(\alpha^{-1}v^1)^{-\alpha} \times (\beta^{-1}v^2)^{-\beta}h$ . Если следовать [1], то  $\lambda$  есть автомодельная переменная  $v$ , а система (3.4) совпадает с системой (3.8) из указанной работы, если в этой последней системе положить  $v = \lambda$ ,  $a = 3C$ ,  $b = 2$ .

Система уравнений (3.4) заменой неизвестных функций

$$\Phi(\lambda) = \lambda^C \rho \cos \iota, \quad \Psi(\lambda) = \lambda^C 2\rho \sin \iota \quad (3.5)$$

приводится к системе уравнений

$$\begin{cases} -2\lambda\rho^3\iota' \cos \iota = 1, \\ (C^2 - 1)\rho^2 + 2C\lambda\rho\rho' + \lambda^2(\rho')^2 + \lambda^2(\rho\iota')^2 = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Выражая из первого уравнения системы (3.6) переменную  $\lambda$  и подставляя во второе уравнение, получим, что зависимость от переменной  $\lambda$  будет устранена. С помощью еще одной замены  $W = \ln \rho$  приходим к уравнению

$$4(C^2 - 1)e^{6W} \cos^2 \iota + 4Ce^{3W} \frac{dW}{d\iota} \cos \iota + \left( \frac{dW}{d\iota} \right)^2 + 1 = 0. \quad (3.7)$$

Это уравнение было изучено в работе [2] (см. уравнение (43) на с. 127) и ему соответствуют следующие значения постоянных  $l_1$  и  $l_2$ :  $l_1 = -4(C^2 - 1)$ ,  $l_2 = -4C$ .

Производя далее замены  $u = \sin \iota$  и  $w = -\frac{e^{-3W}}{3}$ , приходим к уравнению

$$\left( \frac{dw}{du} \right)^2 = l_1 + l_2 \frac{dw}{du} - \frac{9w^2}{1 - u^2}. \quad (3.8)$$

В случае  $C = 1$  базисные инварианты есть

$$I_1 = v^2, \quad I_2 = \frac{f}{\sqrt[3]{v^1}}, \quad I_3 = \frac{h}{\sqrt[3]{v^1}}. \quad (3.9)$$

Будем искать решение в форме

$$f = \sqrt[3]{v^1} F(v^2), \quad h = \sqrt[3]{v^1} H(v^2). \quad (3.10)$$

Первое уравнение системы (1.4) тогда приводится к виду

$$F \frac{dF}{dv^2} + H \frac{dH}{dv^2} = 0, \quad (3.11)$$

а второе —

$$\frac{1}{3} \left[ F \frac{dH}{dv^2} - \frac{dF}{dv^2} H \right] F = 1. \quad (3.12)$$

Из уравнения (3.11) следует

$$[F(v^2)]^2 + [H(v^2)]^2 = C_1, \quad (3.13)$$

где  $C_1$  — произвольная положительная постоянная. Исключая в (3.12) функцию  $F$  с помощью (3.13), получим

$$(C_1 - [H(v^2)]^2) \frac{dH(v^2)}{dv^2} - \frac{1}{2} \frac{d(C_1 - [H(v^2)]^2)}{dv^2} H(v^2) = 3 \quad (3.14)$$

или

$$\frac{dH}{dv^2} = \frac{3}{C_1}. \quad (3.15)$$

Интегрируя (3.15) и подставляя в (3.13) и (3.10), получим точное решение системы уравнений (1.4):

$$f = \sqrt[3]{v^1} \sqrt{C_1 - \left[ \frac{3}{C_1} v^2 + C_2 \right]^2}, \quad h = \sqrt[3]{v^1} \left[ \frac{3}{C_1} v^2 + C_2 \right]. \quad (3.16)$$

Изоэстатические траектории  $v^1 = \text{const}$ , определяемые решением (3.16), представляют собой концентрические окружности

$$f^2 + h^2 = C_1 (v^1)^{\frac{2}{3}}$$

с центром в начале координат. Изостатические траектории  $v^2 = \text{const}$  — лучи, выходящие из начала координат. Изостатические траектории, определяемые решением (3.16), приведены на рис. 1. Характеристические кривые в этом случае есть логарифмические спирали, развертывающиеся из начала координат. Главные напряжения, как нетрудно видеть, логарифмически зависят от полярного радиуса в меридиональной плоскости.

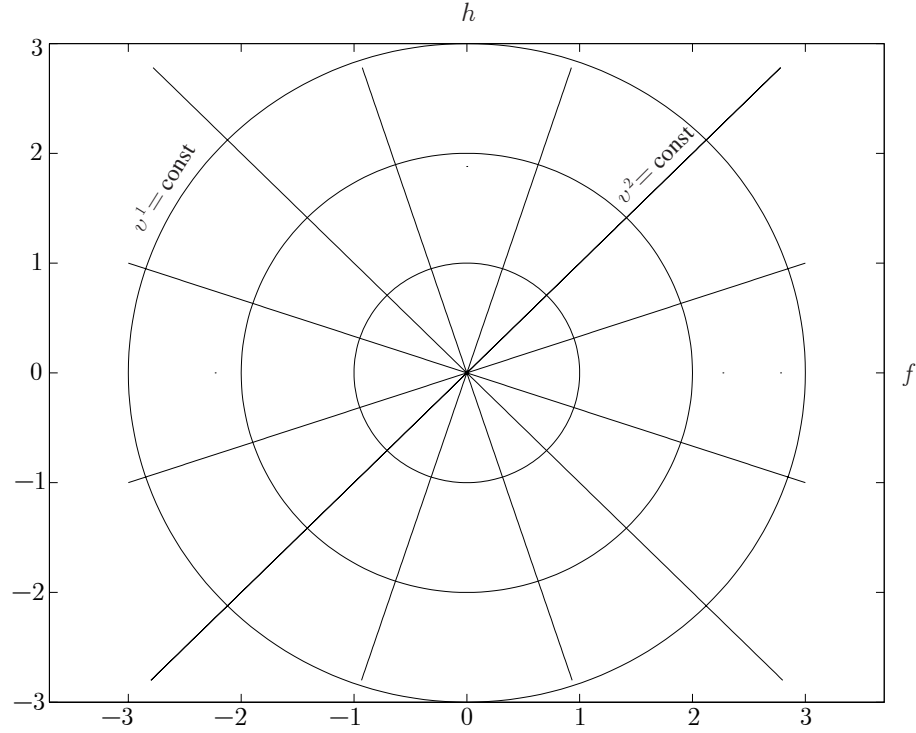


Рис. 1. Изостатические траектории в меридиональной плоскости, соответствующие одномерной подалгебре  $(\zeta_1 + \zeta_2) \cdot \partial$

Случай  $C = 1$  приводится к случаю  $C = -1$  заменой в решении (3.16) переменной  $v^1$  на  $v^2$ , а  $v^2$  — на  $-v^1$ . Здесь мы воспользовались антисимметрией системы (1.4) при перемене ролей переменных  $v^1, v^2$ .

**3.2.** Критерий инвариантности  $(\zeta_2 \cdot \partial)I = 0$  приводит к характеристической системе

$$\frac{dv^1}{v^1} = \frac{dv^2}{-v^2} = \frac{df}{0} = \frac{dh}{0} \quad (3.17)$$

и базисным инвариантам

$$I_1 = v^1 v^2, \quad I_2 = f, \quad I_3 = h. \quad (3.18)$$

Вводя переменную  $\lambda = v^1 v^2$ , будем искать решение системы дифференциальных уравнений (1.4) в форме

$$f = F(\lambda), \quad h = H(\lambda). \quad (3.19)$$

Прямая подстановка (3.19) во второе уравнение системы (1.4) показывает, что оно приводится к несовместному равенству. Следовательно, данной подалгебре не соответствует ни одно инвариантное решение системы (1.4).

**3.3.** Критерий инвариантности  $(\varsigma_2 \pm \varsigma_5) \cdot \partial I = 0$  приводит к характеристической системе (мы не включаем множитель 3 в выражение для  $(\varsigma_2 \cdot \partial)$  и ограничиваемся выбором положительного знака)

$$\frac{dv^1}{v^1} = \frac{dv^2}{-v^2} = \frac{df}{0} = \frac{dh}{1}, \quad (3.20)$$

откуда определяются базисные инварианты

$$I_1 = v^1 v^2, \quad I_2 = f, \quad I_3 = h - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v^1}{v^2} \right|. \quad (3.21)$$

Вводя независимую переменную  $\lambda = v^1 v^2$ , будем искать решение системы уравнений (1.4) в форме

$$f = F(\lambda), \quad h = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v^1}{v^2} \right| + H(\lambda). \quad (3.22)$$

Первое уравнение этой системы тогда приводится к виду

$$\lambda \left( \frac{dF}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{\lambda} \left[ \lambda^2 \left( \frac{dH}{d\lambda} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] = 0, \quad (3.23)$$

или

$$\frac{dH}{d\lambda} = \pm \sqrt{\frac{1}{4\lambda^2} - \left( \frac{dF}{d\lambda} \right)^2}. \quad (3.24)$$

Второе уравнение системы (1.4) может быть преобразовано к

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} F(\lambda) = -1, \quad (3.25)$$

или, учитывая, что  $f \geq 0$ ,

$$f = \sqrt{-2\lambda + C_2} = \sqrt{-2v^1 v^2 + C_2}. \quad (3.26)$$

Подставляя (3.26) в уравнение (3.24), получим:

$$h = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v^1}{v^2} \right| \pm \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{-2\lambda + C_2 - 4\lambda^2}}{\lambda \sqrt{-2\lambda + C_2}} d\lambda + C_3. \quad (3.27)$$

Вычисляя интеграл в (3.27) и обозначая через

$$z = \sqrt{\frac{1}{k} - \frac{2(k-1)^2}{k^2} v^1 v^2} = \frac{k-1}{k} \sqrt{-2v^1 v^2 + \frac{k}{(k-1)^2}}, \quad (3.28)$$

находим инвариантно-групповые решения вида

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v^1}{v^2} \right| \pm i \left( kF(z, k) + \frac{1}{k-1} E(z, k) - (k-1) \Pi(z, k, k) \right) + C_3, \\ f &= \sqrt{-2v^1 v^2 + \frac{k}{(k-1)^2}}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

где  $C_3$  — произвольная, вообще говоря, комплексная постоянная,  $i$  — мнимая единица, а канонические эллиптические интегралы Лежандра выражаются, как обычно, формулами

$$F(z, k) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad E(z, k) = \int_0^z \frac{\sqrt{(1-k^2t^2)}}{\sqrt{(1-t^2)}} dt, \quad (3.30)$$

$$\Pi(z, v, k) = \int_0^z \frac{dt}{(1-vt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}; \quad k = \frac{2C_2 + 1 \pm \sqrt{1+4C_2}}{2C_2} \quad (3.31)$$

есть модуль эллиптических интегралов.

Верхний предел  $z$  в эллиптических интегралах необходимо выбирать так, чтобы он всегда попадал на тот интервал вещественной оси, где подкоренное выражение  $(1-t^2)(1-k^2t^2)$  было бы отрицательным. В пределах указанного интервала действительная часть эллиптических интегралов Лежандра постоянна и ее можно сложить с константой  $C_3$  так, чтобы величина  $h$  была действительной, как это и должно быть. При условии  $|k| > 1$  имеем  $z \in (-1, -1/k) \cap (1/k, 1)$ , а при  $|k| < 1 - z \in (-1/k, -1) \cap (1, 1/k)$ . Заметим, что при  $C_2 > 0$  и выборе положительного знака в (3.31) необходимо  $k > 1$ , и поэтому переменная  $z$  должна быть заключена в пределах

$$\frac{1}{k} < z < 1.$$

Прямая подстановка решений (3.29) в систему (1.4), выполненная с помощью пакета символьных вычислений Maple, показывает что она удовлетворяется.

Изостатические траектории, определяемые решением (3.29) при условии выбора положительного знака, приведены на рис. 2. Прямолинейной изостатической траектории  $v^2 = 0$  соответствует значение  $z = 1/\sqrt{k}$ , а эллиптический интеграл третьего рода обладает логарифмической сингулярностью.

В случае  $k = 0$  получим точное решение, выражающееся через элементарные функции:

$$f = \sqrt{-2v^1v^2}, \quad h = C_3 + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v^1}{v^2} \right| \pm \left[ t + \frac{1}{2} \ln |(t-1)(t+1)^{-1}| \right], \quad (3.32)$$

где введена вспомогательная переменная  $t = \sqrt{1+2v^1v^2}$ . Изостатические траектории, определяемые решением (3.32) при условии выбора положительного знака и  $C_3 = 0$ , приведены на рис. 3.

**3.4.** Критерий инвариантности  $(\zeta_5 \cdot \partial)I = 0$  приводит к характеристической системе

$$\frac{dv^1}{0} = \frac{dv^2}{0} = \frac{df}{0} = \frac{dh}{1} \quad (3.33)$$

и инвариантам

$$I_1 = v^1, \quad I_2 = v^2, \quad I_3 = f, \quad (3.34)$$

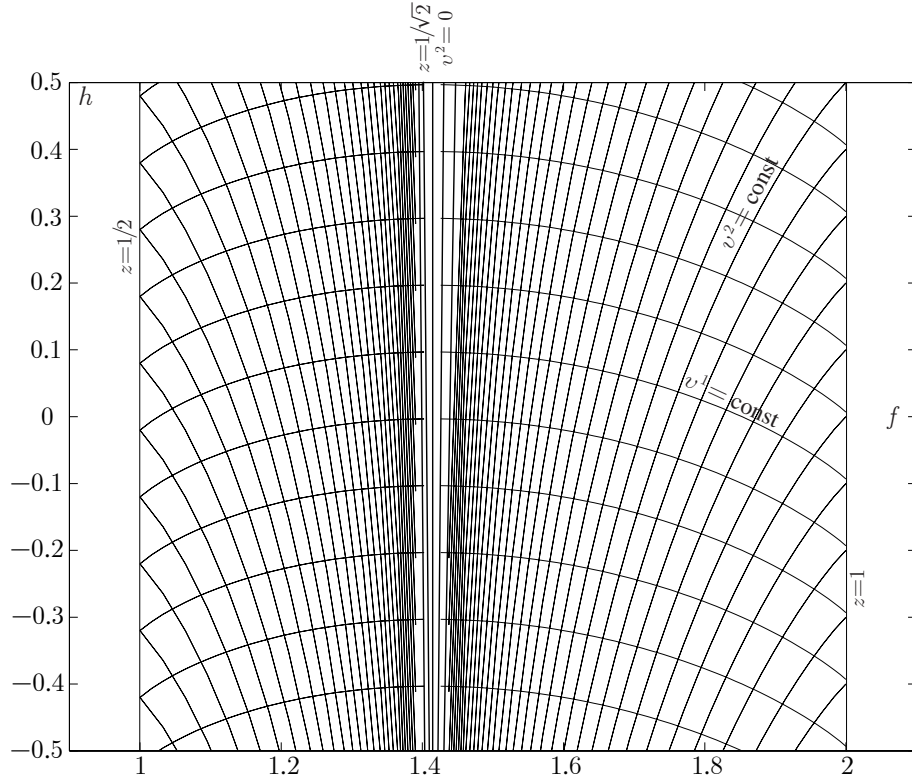


Рис. 2. Изостатические траектории в меридиональной плоскости, соответствующие одномерной подалгебре  $(\varsigma_2 \pm \varsigma_5) \cdot \partial$ , при  $k^{-1} < z < 1$ ,  $k = 2$ ,  $C_3 = -i(kF(1, k) + (k-1)^{-1}E(1, k) - (k-1)\Pi(1, k, k))$

которые не позволяют найти никаких решений системы дифференциальных уравнений (1.4).

**3.5.** Критерий инвариантности  $(\varsigma_1 + \varsigma_2 \pm \varsigma_4) \cdot \partial I = 0$  приводит к характеристической системе (если заменить  $(\varsigma_4 \cdot \partial)$  растянутым аналогом  $6(\varsigma_4 \cdot \partial)$ )

$$\frac{dv^1}{6v^1} = \frac{dv^2}{\pm 6} = \frac{df}{2f} = \frac{dh}{2h}, \quad (3.35)$$

откуда в случае, когда выбирается положительный знак, определяются инварианты

$$I_1 = v^2 - \ln |v^1|, \quad I_2 = \frac{f}{\sqrt[3]{v^1}}, \quad I_3 = \frac{h}{\sqrt[3]{v^1}}. \quad (3.36)$$

Вводя замену  $\lambda = v^2 - \ln |v^1|$ , будем искать решение системы дифференциальных уравнений (1.4) в форме

$$f = \sqrt[3]{v^1} F(\lambda), \quad h = \sqrt[3]{v^1} H(\lambda). \quad (3.37)$$

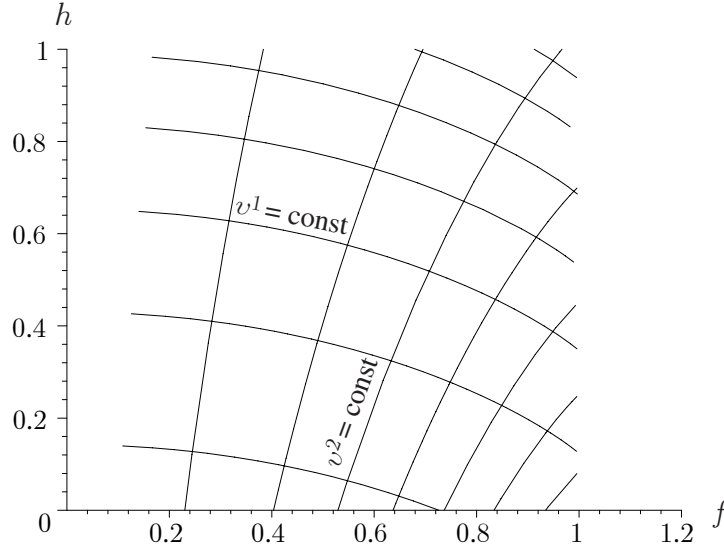


Рис. 3. Изостатические траектории в меридиональной плоскости, соответствующие одномерной подалгебре  $(\zeta_2 \pm \zeta_5) \cdot \partial$ , при  $k = 0$ ,  $C_3 = 0$

Исследуемая система уравнений приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}F \frac{dF}{d\lambda} - \left( \frac{dF}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{3}H \frac{dH}{d\lambda} - \left( \frac{dH}{d\lambda} \right)^2 &= 0, \\ \frac{1}{3} \left( F \frac{dH}{d\lambda} - \frac{dF}{d\lambda} H \right) F &= 1. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Выразим из второго уравнения производную  $\frac{dH}{d\lambda}$  и подставим в первое уравнение. В результате получим квадратное уравнение относительно  $\frac{dH}{d\lambda}$ , решая которое находим выражение для  $\frac{dH}{d\lambda}$ . Подставляя полученное выражение во второе уравнение, определяем производную  $\frac{dF}{d\lambda}$ . Разделив затем одну из производных на другую, можно устранить зависимость от переменной  $\lambda$  и получить уравнение первого порядка относительно пары переменных  $F$ ,  $H$ :

$$\frac{dH}{dF} = \frac{H}{F} + \frac{6(F^2 + H^2)}{F^2} \left[ \left( \frac{F(F^2 + H^2)}{3} - \frac{6H}{F} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{F(F^2 + H^2)}{3} \right)^2 - 36} \right]^{-1}. \quad (3.39)$$

Мы не будем исследовать это уравнение, т.к. гораздо проще провести анализ в рассматриваемом случае следующим образом.

Если сделать замену переменной  $\tilde{v}^2 = e^{v^2}$  в системе уравнений (1.4), то она приобретет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial f}{\partial \tilde{v}^2} + \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial h}{\partial \tilde{v}^2} &= 0, \\ \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial h}{\partial \tilde{v}^2} - \frac{\partial f}{\partial \tilde{v}^2} \frac{\partial h}{\partial v^1} \right) f &= \frac{1}{\tilde{v}^2}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

а ее решение надо будет искать в виде автомодельного

$$\begin{cases} f = \sqrt[3]{v^1} \Phi(\tilde{\lambda}), \\ h = \sqrt[3]{v^1} \Psi(\tilde{\lambda}), \end{cases} \quad (3.41)$$

где  $\tilde{\lambda} = \tilde{v}^2/v^1 = e^\lambda$ . Такое решение уже было найдено ранее в статье [4]. Для определения функций  $\Phi$  и  $\Psi$  имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (штрих обозначает дифференцирование по автомодельной переменной  $\tilde{\lambda}$ ):

$$\begin{cases} (\Phi(\tilde{\lambda})\Psi'(\tilde{\lambda}) - \Phi'(\tilde{\lambda})\Psi(\tilde{\lambda}))\Phi(\tilde{\lambda}) = 3\tilde{\lambda}^{-1}, \\ (\Phi(\tilde{\lambda}) - 3\tilde{\lambda}\Phi'(\tilde{\lambda}))\Phi'(\tilde{\lambda}) + (\Psi(\tilde{\lambda}) - 3\tilde{\lambda}\Psi'(\tilde{\lambda}))\Psi'(\tilde{\lambda}) = 0. \end{cases} \quad (3.42)$$

Эта система уравнений заменой неизвестных функций

$$\Phi(\tilde{\lambda}) = \rho \cos \iota, \quad \Psi(\tilde{\lambda}) = \rho \sin \iota \quad (3.43)$$

сводится к системе уравнений (штрих по-прежнему обозначает дифференцирование по переменной  $\tilde{\lambda}$ )

$$\begin{cases} \tilde{\lambda} \rho^3 \iota' \cos \iota = 3, \\ \rho \rho' - 3\tilde{\lambda}(\rho')^2 - 3\tilde{\lambda}(\rho \iota')^2 = 0. \end{cases} \quad (3.44)$$

Выражая из первого уравнения системы (3.44) переменную  $\tilde{\lambda}$  и подставляя во второе уравнение, получим, что зависимость от переменной  $\tilde{\lambda}$  будет устранена. Вводя замену  $W = \ln \rho$ , приходим к уравнению

$$\left( \frac{dW}{d\iota} \right)^2 - \frac{e^{3W}}{9} \frac{dW}{d\iota} \cos \iota + 1 = 0. \quad (3.45)$$

Это уравнение было изучено в работе [2] и ему соответствуют следующие значения постоянных  $l_1$  и  $l_2$ :  $l_1 = 0$  и  $l_2 = -1$ .

Совершая замены  $u = \sin \iota$  и  $w = -\frac{e^{-3W}}{3}$ , окончательно приходим к уравнению

$$\left( \frac{dw}{du} \right)^2 - \frac{1}{9} \frac{dw}{du} + \frac{9w^2}{1-u^2} = 0. \quad (3.46)$$

**3.6.** Критерий инвариантности  $(\zeta_4 \cdot \partial)I = 0$  приводит к характеристической системе

$$\frac{dv^1}{0} = \frac{dv^2}{1} = \frac{df}{0} = \frac{dh}{0} \quad (3.47)$$

и инвариантам

$$I_1 = v^1, \quad I_2 = f, \quad I_3 = h. \quad (3.48)$$

Если разыскивать решение системы дифференциальных уравнений (1.4) в форме

$$f = F(v^1), \quad h = H(v^1), \quad (3.49)$$

то второе уравнение указанной системы будет представлять собой несовместное равенство. Следовательно, данной подалгебре не соответствует ни одно инвариантное решение системы (1.4).

**3.7.** Критерий инвариантности  $(\zeta_1 - \zeta_2 \pm \zeta_3) \cdot \partial I = 0$  приводит к характеристической системе (если заменить  $(\zeta_3 \cdot \partial)$  растянутым аналогом  $6(\zeta_3 \cdot \partial)$ )

$$\frac{dv^1}{\pm 6} = \frac{dv^2}{6v^2} = \frac{df}{2f} = \frac{dh}{2h}, \quad (3.50)$$

из которой при выборе положительного знака определяются инварианты

$$I_1 = v^1 - \ln|v^2|, \quad I_2 = \frac{f}{\sqrt[3]{v^2}}, \quad I_3 = \frac{h}{\sqrt[3]{v^2}}. \quad (3.51)$$

Вводя переменную  $\lambda = v^1 - \ln|v^2|$ , будем искать решение системы (1.4) в форме

$$f = \sqrt[3]{v^2} F(\lambda), \quad h = -\sqrt[3]{v^2} H(\lambda). \quad (3.52)$$

Подобная форма решения получается из **3.5**, если поменять ролями переменные  $v^1$ ,  $v^2$ , а  $h$  заменить на  $-h$ . Пользуясь симметрией системы уравнений (1.4) относительно указанного преобразования, заключаем, что разыскиваемое решение есть преобразованное данным способом решение **3.5**.

**3.8.** Критерий инвариантности  $(\zeta_3 \cdot \partial)I = 0$  приводит к характеристической системе

$$\frac{dv^1}{1} = \frac{dv^2}{0} = \frac{df}{0} = \frac{dh}{0} \quad (3.53)$$

и инвариантам вида

$$I_1 = v^2, \quad I_2 = f, \quad I_3 = h. \quad (3.54)$$

Разыскивая решение системы (1.4) в форме

$$f = F(v^2), \quad h = H(v^2), \quad (3.55)$$

имеем, что второе уравнение этой системы представляет собой несовместное равенство. Следовательно, данной подалгебре не соответствует ни одно инвариантное решение системы (1.4).

**3.9.** Критерий инвариантности  $(\zeta_3 \mp \zeta_4 \mp \zeta_5) \cdot \partial I = 0$  приводит к характеристической системе уравнений

$$\frac{dv^1}{1} = \frac{dv^2}{\mp 1} = \frac{df}{0} = \frac{dh}{\mp 1} \quad (3.56)$$

и базисным инвариантам (если ограничиться выбором положительного знака при  $(\zeta_5 \cdot \partial)$ )

$$I_1 = v^1 \pm v^2, \quad I_2 = f, \quad I_3 = h - v^1. \quad (3.57)$$

Выберем в выражении для  $I_1$  положительный знак и, вводя независимую переменную  $\lambda = v^1 + v^2$ , будем искать решение системы (1.4) в форме

$$f = F(\lambda), \quad h = v^1 + H(\lambda). \quad (3.58)$$

Первое уравнение системы (1.4) тогда приводится к виду

$$\left(\frac{dF}{d\lambda}\right)^2 + \frac{dH}{d\lambda} + \left(\frac{dH}{d\lambda}\right)^2 = 0, \quad (3.59)$$

а второе — к виду

$$\frac{dF}{d\lambda}F = \mp 1, \quad (3.60)$$

откуда находим

$$f = \sqrt{\mp 2(v^1 + v^2) + C_5} = \sqrt{\mp 2\lambda + C_5}. \quad (3.61)$$

Подставляя  $f$  в уравнение (3.59), получим

$$h = v^1 + \frac{1}{2} \int \left[ -1 \pm \sqrt{1 - 4(\mp 2\lambda + C_5)^{-1}} \right] d\lambda. \quad (3.62)$$

Выполняя интегрирование и вводя переменную

$$t = C_5 \mp 2\lambda, \quad (3.63)$$

получаем точное решение

$$\begin{cases} h = \frac{v^1 - v^2}{2} \pm \frac{1}{4} \left[ \mp \sqrt{t} \sqrt{t-4} \pm 4 \ln(\sqrt{t} + \sqrt{t-4}) \right] + C_7, \\ f = \sqrt{t}, \end{cases} \quad (3.64)$$

где  $C_5, C_7$  — произвольные вещественные постоянные. Здесь выбор знаков в первом вхождении  $\pm$  может быть произведен независимо, а во всех остальных вхождениях  $\pm$  (после подстановки выражения (3.63) вместо  $t$ ) всюду должен быть выбран либо верхний, либо нижний знак.

**3.10.** Критерий инвариантности  $(\zeta_4 \pm \zeta_5) \cdot \partial I = 0$  приводит к характеристической системе

$$\frac{dv^1}{0} = \frac{dv^2}{1} = \frac{df}{0} = \frac{dh}{\pm 1}, \quad (3.65)$$

откуда находятся инварианты

$$I_1 = v^1, \quad I_2 = f, \quad I_3 = h \mp v^2. \quad (3.66)$$

Будем искать решение системы дифференциальных уравнений (1.4) в форме

$$f = F(v^1), \quad h = \pm v^2 + H(v^1). \quad (3.67)$$

Первое уравнение указанной системы тогда приводится к виду

$$\frac{dH}{dv^1} = 0, \quad (3.68)$$

или

$$H = \text{const} \quad (3.69)$$

и на основании (3.67)

$$h = \pm v^2 + C_1. \quad (3.70)$$

С помощью второго уравнения системы (1.4) находим

$$F(v^1) = \sqrt{\pm 2v^1 + C_2}.$$

Изостатические траектории есть горизонтальные ( $v^2 = \text{const}$ ) и вертикальные ( $v^1 = \text{const}$ ) прямые. Этому полю изостат соответствует прямолинейная сетка скольжения.

**3.11.** Критерий инвариантности  $(\varsigma_3 \pm \varsigma_5) \cdot \partial I = 0$  приводит к характеристической системе

$$\frac{dv^1}{1} = \frac{dv^2}{0} = \frac{df}{0} = \frac{dh}{\pm 1} \quad (3.71)$$

и соответствующим инвариантам

$$I_1 = v^2, \quad I_2 = f, \quad I_3 = h \mp v^1. \quad (3.72)$$

Ищем решение системы (1.4) в форме

$$f = F(v^2), \quad h = \pm v^1 + H(v^2). \quad (3.73)$$

Ясно, что рассматриваемый случай аналогичен **3.10**.

**3.12.** Критерий инвариантности  $(\varsigma_3 \mp \varsigma_4) \cdot \partial I = 0$  приводит к характеристической системе

$$\frac{dv^1}{1} = \frac{dv^2}{\mp 1} = \frac{df}{0} = \frac{dh}{0} \quad (3.74)$$

и набору инвариантов

$$I_1 = v^1 \pm v^2, \quad I_2 = f, \quad I_3 = h. \quad (3.75)$$

Вводя независимую переменную  $\lambda = v^1 \pm v^2$ , будем искать решение системы дифференциальных уравнений (1.4) в форме

$$f = F(\lambda), \quad h = H(\lambda). \quad (3.76)$$

Прямая подстановка (3.76) во второе уравнение этой системы показывает, что оно удовлетворяться не может. Следовательно, данной подалгебре не соответствует ни одно инвариантное решение системы дифференциальных уравнений (1.4).

## Литература

- [1] Радаев Ю.Н., Гудков В.А. Группы симметрий дифференциальных уравнений осесимметричной задачи математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественная серия. 2004. №4(34). С. 99–111.
- [2] Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2004. 147 с.
- [3] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

- [4] Радаев Ю.Н., Бахарева Ю.Н. К теории осесимметричной задачи математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2003. №4(30). С. 125–139.

Поступила в редакцию 18/VIII/2004;  
в окончательном варианте — 24/IX/2004.

## THE GROUP-INVARIANT SOLUTIONS OF THE AXIALLY-SYMMETRIC EQUATIONS OF THE MATHEMATICAL PLASTICITY

© 2004 Y.N. Radayev, V.A. Gudkov<sup>2</sup>

The Lie algebra and a first order optimal system of subalgebras of the symmetry group of partial differential equations of axially-symmetric problem of the mathematical theory of plasticity represented in the isostatic co-ordinate net are studied. The equations of mathematical plasticity are formulated for stress states corresponding to an edge of the Tresca prism in the Haigh-Westergaard space. By analysing the first order optimal system of subalgebras the group-invariant solutions are determined from systems of ordinary differential equations. A number of new exact solutions are obtained in analytically closed forms. Some of them are represented by the canonical Legendre elliptic integrals.

Paper received 18/VIII/2004.

Paper accepted 24/IX/2004.

---

<sup>2</sup>Radayev Yuri Nickolaevich ([radayev@ssu.samara.ru](mailto:radayev@ssu.samara.ru)), Gudkov Vasilij Alexandrovich ([goodkov@ssu.samara.ru](mailto:goodkov@ssu.samara.ru)), Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.