УДК 539.374

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

© 2004 Ю.Н. Радаев, Ю.Н. Бахарева[1]

Рассматривается осесимметричная постановка задачи математической теории пластичности для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Треска. Развивается подход, предложенный в работах [1, 2], отличительной чертой которого является формулировка основных уравнений в изостатических координатах. Разработан численный метод расчета напряжений и сетки изостатических траекторий у свободной границы. Исследована задача о локализации пластических деформаций в пределах шейки одноосно растягиваемого образца в осесимметричной постановке по схеме полной пластичности. Дан численный анализ этой задачи при произвольном контуре очертания шейки. Определены поле изостат и предельная растягивающая сила и дано ее численное значение в случае эллиптического контура свободной границы, удовлетворительно согласующиеся с соответствующими оценками, данными Бриджменом.

1. Постановка задачи и вводные замечания

Уравнения математической теории пластичности традиционно применяются для исследования проблемы локализации деформаций и концентрации напряжений в твердых телах. Несомненный интерес представляет оценка концентрации напряжений при растяжении поперечно надрезанных цилиндрических образцов и вблизи края дискообразных трещин. То же самое можно сказать и об оценке напряженного состояния в шейке цилиндрического образца, образующейся при его одноосном растяжении. К настоящему времени пока еще нельзя утверждать, что указанные проблемы получили полное решение и существуют надежные численные методы анализа этого круга задач механики деформируемого твердого тела.

[1]Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru), Бахарева Юлия Николаевна (bahareva@ssu.samara.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

В [3] исследовалась задача о растяжении полосы, ослабленной симметричными глубокими вырезами различных форм. Было указано, что применение модели жесткопластического тела при расчете локализованных на перешейке пластических деформаций допустимо не всегда, а только в тех случаях, когда жесткие зоны не затрудняют развитие пластических зон, а пластические деформации значительно превосходят упругие. Локализация пластических деформаций на перешейке в условиях плоского деформированного состояния может быть проанализирована на основе метода годографа, который заключается в преобразовании уравнений плоской задачи к таким криволинейным координатам, что координатные линии совпадают с траекториями главных напряжений [4]. Применение этого метода позволяет получить распределение напряжений в аналитической форме и определить предельную нагрузку.

Локализация пластических деформаций в пределах шейки растягиваемого образца в осесимметричной постановке исследовалась (1945 г.) Н.Н. Давиденковым и Н.И. Спиридоновой [5]. Ими было построено приближенное решение, основывающееся на допущениях, подсказанных опытными данными. Изложение результатов имеется, например, в [6, с. 274–276]. Для окончательного вычисления напряжений в области шейки необходимо знать радиус ее минимального сечения и кривизну очертания шейки в точке, соответствующей указанному минимальному сечению. Согласно решению [5], максимальные напряжения возникают в центре шейки, что полностью совпадает с экспериментальными данными.

После образования шейки распределение напряжений в образце перестает быть однородным и, кроме того, неизвестно очертание шейки. Упругие деформации в области шейки, по-видимому, пренебрежимо малы по сравнению с пластическими. Следовательно, жесткопластический анализ должен приводить к приемлемым результатам. Заметим также, что вблизи минимального сечения шейки разность главных нормальных напряжений, траектории которых располагаются в меридиональной плоскости, можно с хорошим приближением считать постоянной.

Бриджмен (P.W. Bridgman) уточнил расчеты (изложение результатов имеется в [6, с. 274–276; 7, с. 312–316]. Им были получены приближенные формулы для оценки концентрации напряжений, включающие один неизвестный элемент κ — кривизну контура шейки в точке его пересечения с минимальным сечением:

$$\frac{\sigma_3}{Y} = 1 + \ln\left(1 + \frac{\kappa(l^2 - r^2)}{2l}\right), \tag{1.1}$$

где σ_3 — осевое напряжение в пределах минимального сечения, Y — предел текучести при одноосном растяжении, l — радиус минимального сечения шейки. Согласно (1.1), действительно, имеет место концентрация напряжений, т.к. значения нормальных напряжений в минимальном сечении шейки превосходят предел текучести при растяжении.

Воспользуемся условием равновесия внешних и внутренних сил в минимальном сечении шейки

$$P_* = \iint \sigma_3 dS, \tag{1.2}$$

где P_* — предельная растягивающая сила, dS — элемент площади сечения шейки. Тогда, учитывая зависимость (1.1), получим

$$P_* = Y\pi l \frac{\kappa l + 2}{\kappa} \ln \frac{\kappa l + 2}{2}, \tag{1.3}$$

где $\kappa = a/b^2$ для случая, когда форма контура шейки представляет собой дугу эллипса с полуосями a, b.

Целью настоящей работы является разработка численного метода интегрирования краевых задач теории пластичности в осесимметричной постановке по схеме "полной пластичности" Хаара—Кармана и построение с его помощью численного решения задачи о напряженном состоянии в области шейки одноосно растягиваемого цилиндрического образца с произвольным контуром ее очертания, используя теоретический подход, предложенный в [1, 2], а также сравнение полученного решения с приближенным решением, данным Бриджменом.

2. Основные соотношения пространственной задачи в изостатической системе координат

Вывод уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Треска, в координатной сетке линий главных напряжений приведен в [1]. Показано, что задача является формально статически определимой, если граничные условия заданы в напряжениях. Уравнения равновесия могут быть формально рассмотрены независимо от кинематических уравнений. Ребро призмы Треска определяется уравнениями

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k, \tag{2.1}$$

где σ_1, σ_2, σ_3 — главные нормальные напряжения, k — предел текучести при сдвиге[2]. Учитывая условия (2.1), уравнение равновесия $\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ можно представить в форме

$$\mathrm{grad}\sigma_3 \mp 2k\,\mathrm{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0}, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{n}$ — единичное векторное поле, имеющее направление главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему (наименьшему) собственному значению σ_3 тензора напряжений. Уравнение (2.2) принадлежит к гиперболическому типу, а характеристические направления образуют конус с углом полураствора $\pi/4$ и осью, направленной вдоль вектора $\mathbf{n}$ (характеристическими являются также направления, ортогональные $\mathbf{n}$).

[2]Пределы текучести при одноосном растяжении и сдвиге связаны соотношением $Y = 2k$.

Воспользуемся свойством расслоенности векторного поля $\mathbf{n}$ в зоне пластического течения ($\mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{n} = 0$) [2]. Это условие позволяет нам ввести криволинейные координаты ω^j ($j = 1,2,3$), определяемые по векторному полю $\mathbf{n}$ так, что поверхности $\omega^3 = \mathrm{const}$ являются слоями поля $\mathbf{n}$. Расслоенное статически допустимое поле напряжений порождает каноническое отображение некоторой области пространства на область пластического течения (см. [2])

$$x_i = f_i(\omega^1, \omega^2, \omega^3) \quad (i = 1,2,3). \tag{2.3}$$

Отображающие функции f_i должны удовлетворять следующей системе уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f_1}{\partial\omega^3} + \dfrac{\partial f_2}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f_2}{\partial\omega^3} + \dfrac{\partial f_3}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f_3}{\partial\omega^3} = 0, \qquad (k,p,r,s = 1,2,3) \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial\omega^2}\dfrac{\partial f_1}{\partial\omega^3} + \dfrac{\partial f_2}{\partial\omega^2}\dfrac{\partial f_2}{\partial\omega^3} + \dfrac{\partial f_3}{\partial\omega^2}\dfrac{\partial f_3}{\partial\omega^3} = 0, \\ \left(\dfrac{\partial f_k}{\partial\omega^3}\dfrac{\partial f_k}{\partial\omega^3}\right)\left[\left(\dfrac{\partial f_p}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f_p}{\partial\omega^1}\right)\left(\dfrac{\partial f_r}{\partial\omega^2}\dfrac{\partial f_r}{\partial\omega^2}\right) - \left(\dfrac{\partial f_s}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f_s}{\partial\omega^2}\right)^2\right] = \pm 1. \end{cases} \tag{2.4}$$

Здесь ω^j — канонические изостатические координаты.

Если через J обозначить определитель Якоби отображения (2.3), то последнее уравнение системы (2.4) эквивалентно уравнению $J^2 = 1$. Таким образом, действительно, отображение (2.3) является каноническим.

Такое преобразование координат, а именно условия $g_{13} = 0$, $g_{23} = 0$, $n^1 = 0$, $n^2 = 0$, $g = 1$, позволяет существенно упростить уравнение равновесия (2.2) и свести его к трем соотношениям

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial\omega^1}(\sigma_3 - 2k\ln\sqrt{g_{33}}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial\omega^2}(\sigma_3 - 2k\ln\sqrt{g_{33}}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial\omega^3}(\sigma_3 - 2k\ln\sqrt{g_{33}}) = 0, \end{gathered} \tag{2.5}$$

интегрирование которых позволяет определить распределение напряжений в зоне пластического течения.

3. Формулировка задачи в условиях осевой симметрии

Осесимметричное пластическое течение, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска, можно разделить на следующие два типа: 1) тангенциальное напряжение (которое всегда будет главным напряжением при осесимметричном напряженном состоянии) является наибольшим (наименьшим) главным напряжением, а меридиональные главные напряжения равны; 2) тангенциальное напряжение равно одному из меридиональных главных напряжений, а максимальное касательное напряжение в меридиональной плоскости равно пределу текучести k. Во втором случае имеем состояние "полной пластичности" Хаара—Кармана. Если присвоить тангенциальному главному направлению второй номер и обозначить через σ_3 наибольшее (наименьшее) из двух меридиональных главных напряжений, то приходим к соотношениию (2.1), характеризующему состояние "полной пластичности"[3].

В случае осевой симметрии каноническое преобразование координат записывается в виде (ω^2 — угловая координата)

$$x_1 = f(\omega^1, \omega^3)\cos\omega^2, \quad x_2 = f(\omega^1, \omega^3)\sin\omega^2, \quad x_3 = h(\omega^1, \omega^3). \tag{3.1}$$

Здесь f — горизонтальная координата, а h — вертикальная координата в меридиональной плоскости. Ясно, что координатные линии, соответствующие криволинейным координатам ω^1, ω^3, есть взаимно ортогональные изостаты в плоскости течения.

Отображающие функции f, h должны удовлетворять следующей системе уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f}{\partial\omega^3} + \dfrac{\partial h}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial h}{\partial\omega^3} = 0, \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial h}{\partial\omega^3} - \dfrac{\partial f}{\partial\omega^3}\dfrac{\partial h}{\partial\omega^1}\right) f = \pm 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Представим систему (3.2) в нормальной форме Коши относительно производных по переменной ω^1

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial\omega^1} = \pm f^{-1}\dfrac{\partial h}{\partial\omega^3}\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial\omega^3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial\omega^3}\right)^2\right]^{-1}, \\ \dfrac{\partial h}{\partial\omega^1} = \mp f^{-1}\dfrac{\partial f}{\partial\omega^3}\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial\omega^3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial\omega^3}\right)^2\right]^{-1}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Для однозначного определения функций f, h, кроме системы уравнений (3.3), необходимы еще начальные данные[4].

---

[3]Заметим, что в схеме Бриджмена расчета напряжений в шейке условие $\sigma_3 - \sigma_1 = Y$ выполняется точно лишь в минимальном сечении шейки.

[4]С точки зрения механики, мы можем сформулировать граничные условия на свободном контуре шейки, но с математической точки зрения, как мы увидим далее, они являются начальными данными или данными Коши для системы (3.3). Тот факт, что систему уравнений (3.2) можно представить в нормальной форме Коши по переменной ω^1, позволяет сделать заключение, что линия $\omega^1 = \mathrm{const}$ при условии

$$\left.\left(\left(\frac{\partial f}{\partial\omega^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial\omega^3}\right)^2\right)\right|_{\omega^1=\mathrm{const}} \neq 0$$

не является характеристикой, т.е. задача Коши для системы (3.3) с начальными данными на линии $\omega^1 = \mathrm{const}$ сформулирована корректно. Указанное условие заведомо должно выполняться, поскольку каноническая замена переменных имеет отличный от нуля якобиан:

$$\frac{\partial(x_1, x_3)}{\partial(\omega^1, \omega^3)} \neq 0.$$

Поскольку кривая, определяющая форму шейки, есть свободная граница, то она является траекторией главного напряжения $\omega^1 = \text{const}$ и вдоль нее $\sigma_1 = 0$, следовательно, в силу (2.1) $\sigma_3 = \pm 2k$ на свободной границе шейки. В рассматриваемом случае нормальные напряжения на перешейке положительны (что соответствует растяжению перешейка), поэтому следует выбрать положительный знак: $\sigma_3 = 2k$.

Так как уравнения (3.3) инвариантны относительно преобразований сдвига, то всегда можно принять значение константы в уравнении свободного контура шейки $\omega^1 = \text{const}$ равным нулю так, чтобы свободный контур шейки задавался уравнением $\omega^1 = 0$. По этой же причине можно считать, что минимальное сечение шейки определяется уравнением $\omega^3 = 0$.

Проинтегрируем соотношения (2.5), в результате находим

$$\sigma_3/2k - \ln \sqrt{g_{33}} = C, \tag{3.4}$$

где C — постоянная интегрирования. Подставляя выражения для компоненты g_{33} метрического тензора, получаем условие на свободном контуре шейки в следующем виде:

$$\left.\left(\left(\frac{\partial f}{\partial \omega^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \omega^3}\right)^2\right)\right|_{\omega^1=0} = e^{2(1-C)}. \tag{3.5}$$

Это условие гарантирует, что линия $\omega^1 = 0$ не является характеристикой системы уравнений (3.2).

Заметим, что независимо от значения постоянной C краевое условие $\sigma_3 = 2k$ на свободном контуре шейки удовлетворяется. Поэтому в дальнейшем величину C можно выбрать, исходя из соображений простоты.

Произведем далее замену независимых переменных $\tilde{\omega}^1 = e^{C-1}\omega^1$, $\tilde{\omega}^3 = e^{1-C}\omega^3$. Заметим, что преобразование изостатических координат $\tilde{\omega}^1 = t\omega^1$, $\tilde{\omega}^3 = t^{-1}\omega^3$ не изменяет формы уравнений (3.2) и определяет однопараметрическую группу симметрий этой системы. Указанное преобразование не изменяет также форму изостатических траекторий. Принцип простоты $t = t^{-1} = 1$ сразу же указывает на то, что необходимо положить $C = 1$. Впрочем конкретное значение постоянной C в дальнейшем нигде не потребуется. Тогда система уравнений (3.3) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \tilde{\omega}^1} = \pm f^{-1} \dfrac{\partial h}{\partial \tilde{\omega}^3}\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial \tilde{\omega}^3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial \tilde{\omega}^3}\right)^2\right]^{-1}, \\ \dfrac{\partial h}{\partial \tilde{\omega}^1} = \mp f^{-1} \dfrac{\partial f}{\partial \tilde{\omega}^3}\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial \tilde{\omega}^3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial \tilde{\omega}^3}\right)^2\right]^{-1}, \end{cases} \tag{3.6}$$

а начальные данные —

$$\left.\left(\left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{\omega}^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \tilde{\omega}^3}\right)^2\right)\right|_{\tilde{\omega}^1=0} = 1. \tag{3.7}$$

Таким образом, удается устранить неопределенную пока постоянную C как из уравнений, так и из начальных условий.

Последнее соотношение дает нам право сделать вывод, что на контуре шейки (т.е. при $\tilde{\omega}^1 = 0$) координата $\tilde{\omega}^3$ есть натуральный параметр — переменная длина дуги:

$$\tilde{\omega}^3\big|_{\tilde{\omega}^1=0} = s. \tag{3.8}$$

Начальные данные для системы (3.6) поэтому примут форму

$$f|_{\tilde{\omega}^1=0} = \lambda(s), \quad h|_{\tilde{\omega}^1=0} = \mu(s), \tag{3.9}$$

где λ и μ удовлетворяют условию

$$\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 = 1$$

и являются функциями, реализующими натуральную параметризацию свободного контура шейки.

Таким образом, исследованию подлежит задача Коши (3.6), (3.9). Вернемся к рассмотрению системы (3.6). Заметим, что при $f \to 0$ оба уравнения системы (3.6) являются сингулярно возмущенными, т.к. при производных по переменной $\tilde{\omega}^1$ имеется множитель f, который стремится к нулю при приближении к оси симметрии. С целью устранения сингулярной возмущенности уравнений системы совершим замену $f^2 = 2u$, $h = v$. Подобная замена продиктована тем обстоятельством, что плоское преобразование $x_1^2 = 2u(\omega^1, \omega^3)$, $x_3 = v(\omega^1, \omega^3)$, порожденное трехмерным каноническим преобразованием (3.1), также является каноническим [2]. В результате указанной замены система (3.6) приобретает вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \tilde{\omega}^1} = \pm 2u \dfrac{\partial v}{\partial \tilde{\omega}^3}\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial \tilde{\omega}^3}\right)^2 + 2u\left(\dfrac{\partial v}{\partial \tilde{\omega}^3}\right)^2\right]^{-1}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \tilde{\omega}^1} = \mp \dfrac{\partial u}{\partial \tilde{\omega}^3}\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial \tilde{\omega}^3}\right)^2 + 2u\left(\dfrac{\partial v}{\partial \tilde{\omega}^3}\right)^2\right]^{-1}, \end{cases} \tag{3.10}$$

а данные Коши —

$$u|_{\tilde{\omega}^1=0,\, \tilde{\omega}^3=s} = \frac{1}{2}\lambda^2(s), \quad v|_{\tilde{\omega}^1=0,\, \tilde{\omega}^3=s} = \mu(s). \tag{3.11}$$

Отметим следующие равенства

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{\omega}^3}\right)_{\tilde{\omega}^3=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{\omega}^3}\right)_{\tilde{\omega}^3=0} = 0, \tag{3.12}$$

а также

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \tilde{\omega}^1}\right)_{\tilde{\omega}^3=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{\omega}^1}\right)_{\tilde{\omega}^3=0} = 0.$$

Значение производной $\dfrac{\partial u}{\partial \tilde{\omega}^3}$ в минимальном сечении шейки $\omega^3 = 0$ равно нулю, поэтому производная $\dfrac{\partial v}{\partial \tilde{\omega}^3}$ не должна обращаться в нуль, если изостатическая координатная сетка не имеет особых точек; это касается и поведения указанных производных при $u \to 0$, так как ось симметрии и линия минимального сечения перешейка являются двумя изостатическими траекториями, проходящими через регулярную точку $f = 0$, $h = 0$.

4. Общая численная схема решения осесимметричной задачи со свободной границей

Приведем основные уравнения к безразмерному виду. Для этого введем параметр l — характерный линейный размер тела и обозначения $\bar{u} = u/l^2$, $\bar{v} = v/l$, $\bar{\omega}^1 = \tilde{\omega}^1/l^2$, $\bar{\omega}^3 = \tilde{\omega}^3/l$, $\bar{\lambda} = \lambda/l$, $\bar{\mu} = \mu/l$. Система уравнений (3.10) тогда приобретает безразмерную форму

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{\omega}^1} = \pm 2\bar{u}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{\omega}^3}\left[\left(\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{\omega}^3}\right)^2 + 2\bar{u}\left(\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{\omega}^3}\right)^2\right]^{-1}, \\ \dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{\omega}^1} = \mp \dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{\omega}^3}\left[\left(\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{\omega}^3}\right)^2 + 2\bar{u}\left(\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{\omega}^3}\right)^2\right]^{-1}, \end{cases} \tag{4.1}$$

а начальные данные —

$$\bar{u}|_{\bar{\omega}^1=0} = \frac{1}{2}\bar{\lambda}^2(\bar{\omega}^3), \quad \bar{v}|_{\bar{\omega}^1=0} = \bar{\mu}(\bar{\omega}^3). \tag{4.2}$$

Решим полученную задачу Коши (4.1), (4.2) численно, методом конечных разностей (см., например, [8]). Для этого необходимо в области непрерывного изменения аргументов $(\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^3)$ ввести прямоугольную сетку, а дифференциальный оператор заменить его разностным аналогом. Пусть минимальному сечению шейки ($x_3 = 0$) соответствует значение $\bar{\omega}^3 = 0$. Разобьем отрезок $[-\bar{\omega}^3_*, \bar{\omega}^3_*]$ на достаточно мелкие части точками $\bar{\omega}^3_i$. Решение в минимальном сечении шейки $\bar{\omega}^3 = 0$ определяется исключительно начальными данными на части свободного контура $-\bar{\omega}^3_* < \bar{\omega}^3 < \bar{\omega}^3_*$, где значение $\bar{\omega}^3_*$ достаточно велико и дальнейшее увеличение $\bar{\omega}^3_*$ не приведет к изменению решения в области минимального сечения шейки. Задание шага по координате $\bar{\omega}^1$ требует анализа характеристических условий исследуемой системы уравнений в частных производных. Неправильный выбор величины шага по координате $\bar{\omega}^1$ может привести к ошибочным результатам.

Для оценки соотношения величин шагов необходимо определить характеристические направления рассматриваемой системы уравнений в частных производных (3.2). Эта система существенно нелинейна и при поиске характеристик нельзя применить стандартный алгоритм их определения как линий слабого разрыва решений. Для поиска характеристик воспользуемся тем обстоятельством, что при переходе к характеристическим переменным, если таковые имеются, система дифференциальных уравнений в частных производных не будет иметь нормальной формы ни по одной из независимых переменных[5].

Найдем характеристические линии системы уравнений (3.2). Для этого введем новые независимые переменные γ^1, γ^3, связанные с переменными ω^1, ω^3 соотношениями

$$\gamma^1 = \gamma^1(\omega^1, \omega^3), \quad \gamma^3 = \gamma^3(\omega^1, \omega^3) \tag{4.3}$$

[5]См.: Положий Г.Н. Уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1964, с. 30-41.

и произведем замену переменных в системе уравнений (3.2). После ряда преобразований находим

$$\begin{cases} \left(\left(\dfrac{\partial f}{\partial \gamma^1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial h}{\partial \gamma^1}\right)^2\right)\dfrac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1}\dfrac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3}+\left(\left(\dfrac{\partial f}{\partial \gamma^3}\right)^2+\left(\dfrac{\partial h}{\partial \gamma^3}\right)^2\right)\dfrac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1}\dfrac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3}+ \\ +\left(\dfrac{\partial f}{\partial \gamma^1}\dfrac{\partial f}{\partial \gamma^3}+\dfrac{\partial h}{\partial \gamma^1}\dfrac{\partial h}{\partial \gamma^3}\right)\left(\dfrac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1}\dfrac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3}+\dfrac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3}\dfrac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1}\right)=\pm 1, \\ \dfrac{\partial f}{\partial \gamma^1}\dfrac{\partial h}{\partial \gamma^3}-\dfrac{\partial h}{\partial \gamma^1}\dfrac{\partial f}{\partial \gamma^3}=\dfrac{1}{f\Delta}, \end{cases} \tag{4.4}$$

где

$$\Delta=\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1}\frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3}-\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3}\frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1}$$

есть отличный от нуля якобиан преобразования (4.3). Разрешим затем эту систему относительно производных функций f, h по переменной γ^1. При этом обнаруживается, что это невозможно сделать при выполнении условия:

$$\Delta^4 f^2\left(\left(\frac{\partial f}{\partial \gamma^3}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial \gamma^3}\right)^2\right)^2<4\left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1}\right)^2\left(\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3}\right)^2. \tag{4.5}$$

Это условие может быть также представлено в форме

$$f^2\left(\left(\frac{\partial f}{\partial \gamma^3}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial \gamma^3}\right)^2\right)^2<4\left(\frac{\partial \omega^3}{\partial \gamma^3}\right)^2\left(\frac{\partial \omega^1}{\partial \gamma^3}\right)^2. \tag{4.6}$$

Таким образом, линия $\gamma^1(\omega^1,\omega^3)=\mathrm{const}$ является характеристической, если вдоль нее удовлетворяется условие (4.6). Вообще любая линия $\gamma(\omega^1,\omega^3)=\mathrm{const}$ будет характеристикой системы уравнений (3.2), если вдоль этой линии выполняется неравенство

$$f^2\left((df)^2+(dh)^2\right)^2<4(d\omega^1)^2(d\omega^3)^2. \tag{4.7}$$

Ясно поэтому, что система уравнений (3.2) будет иметь в каждой точке два характеристических направления, т.е. будет гиперболической.

Условие (4.7) позволяет сформулировать ограничение на выбор величин шагов при конструировании разностной схемы. В результате получим прямоугольную сетку с узлами ($\bar\omega^1_j$, $\bar\omega^3_i$). Вместо функций $\bar u(\bar\omega^1,\bar\omega^3)$, $\bar v(\bar\omega^1,\bar\omega^3)$ непрерывных аргументов будем рассматривать сеточные функции $\bar u^j_i=\bar u(\bar\omega^1_j,\bar\omega^3_i)$, $\bar v^j_i=\bar v(\bar\omega^1_j,\bar\omega^3_i)$. Тогда система уравнений в частных производных (4.1) аппроксимируется разностной схемой

$$\begin{cases} \dfrac{\bar u^{j+1}_i-\bar u^j_i}{\bar\omega^1_{j+1}-\bar\omega^1_j}=\pm\dfrac{2\bar u^j_i(\bar v^j_{i+1}-\bar v^j_i)(\bar\omega^3_{i+1}-\bar\omega^3_i)}{\left(\bar u^j_{i+1}-\bar u^j_i\right)^2+2\bar u^j_i\left(\bar v^j_{i+1}-\bar v^j_i\right)^2}, \\ \dfrac{\bar v^{j+1}_i-\bar v^j_i}{\bar\omega^1_{j+1}-\bar\omega^1_j}=\mp\dfrac{(\bar u^j_{i+1}-\bar u^j_i)(\bar\omega^3_{i+1}-\bar\omega^3_i)}{\left(\bar u^j_{i+1}-\bar u^j_i\right)^2+2\bar u^j_i\left(\bar v^j_{i+1}-\bar v^j_i\right)^2} \end{cases} \tag{4.8}$$

с начальными данными

$$\bar{u}_i^0 = \frac{1}{2}\bar{\lambda}_i^2, \quad \bar{v}_i^0 = \bar{\mu}_i, \tag{4.9}$$

где $\bar{\lambda}_i = \bar{\lambda}(\bar{\omega}_i^3)$, $\bar{\mu}_i = \bar{\mu}(\bar{\omega}_i^3)$.

Разностная задача (4.8), (4.9) является так называемой явной схемой: значения решения на более высоком слое $\bar{\omega}_{j+1}^1$ определяются через значения на предыдущем слое $\bar{\omega}_j^1$ по явным формулам. Здесь для аппроксимации производных используется разностное отношение "вперед", имеющее первый порядок точности. Мы не используем более точные симметричные разностные отношения, так как они часто приводят нарастанию погрешности вычислений.

Для реализации численной схемы необходимо знать $\bar{\lambda}_i$, $\bar{\mu}_i$ и контролировать соотношение между шагами с помощью (4.7). С тем, чтобы иметь возможность варьировать кривизну свободного контура, возьмем в качестве уравнения контура шейки уравнение дуги эллипса с полуосями a, b

$$f = a + l - a\sin t, \quad h = -b\cos t, \tag{4.10}$$

где a — большая полуось. Тогда данные Коши (4.9) для системы (4.8) примут форму

$$\bar{u}|_{\bar{\omega}^1=0} = (\bar{a}(1-\cos t)+1)^2/2, \quad \bar{v}|_{\bar{\omega}^1=0} = -\bar{b}\sin t, \tag{4.11}$$

где $\bar{a} = a/l$, $\bar{b} = b/l$, а параметр t определяется из условия $\bar{\omega}^3 = \bar{a}\mathbf{E}(\varepsilon, t)$. Здесь

$$\mathbf{E}(\varepsilon, t) = \int_0^t \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\tau}\,d\tau$$

— канонический эллиптический интеграл Лежандра второго рода, $\varepsilon = \sqrt{1-b^2a^{-2}}$ — эксцентриситет эллипса.

5. Вычисление величины предельной нагрузки

Величина предельной нагрузки P_* в соответствии с (1.1) может быть вычислена по формуле

$$P_* = 2\pi\int_0^{\bar{\omega}_*^1} \sigma_3 \left|\frac{du}{d\bar{\omega}^1}\right| d\bar{\omega}^1, \tag{5.1}$$

где значения всех величин под знаком интеграла вычисляются при $\bar{\omega}^3 = 0$, $\bar{\omega}_*^1$ — значение координаты $\bar{\omega}^1$, при котором выполняется условие

$$\bar{u}|_{\bar{\omega}^1=\bar{\omega}_*^1,\,\bar{\omega}^3=0} = 0. \tag{5.2}$$

Распределение наибольшего главного напряжения σ_3 получим из выражения (3.4)

$$\sigma_3 = k\ln\left[\left(\frac{\partial f}{\partial\omega^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial\omega^3}\right)^2\right] + 2kC.$$

Переходя в (5.1) к безразмерным величинам, получим

$$\frac{P_*}{2\pi k l^2} = \int\limits_0^{\bar{\varpi}^1_*} \left(\ln \left[\frac{1}{2\bar{u}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\varpi}^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{\varpi}^3} \right)^2 \right]_{\bar{\varpi}^3=0} + 2 \right) \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\varpi}^1} \right|_{\bar{\varpi}^3=0} d\bar{\varpi}^1. \tag{5.3}$$

После ряда преобразований, учитывая (3.12), находим

$$\frac{P_*}{2\pi k l^2} = 1 + 2 \int\limits_0^{\bar{\varpi}^1_*} \frac{\ln p}{p} d\bar{\varpi}^1_*, \tag{5.4}$$

где

$$p = \left| \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{\varpi}^3} \right|_{\bar{\varpi}^3=0}$$

или

$$\frac{P_*}{2\pi k l^2} = 1 - 2 \int\limits_0^{\bar{\varpi}^1_*} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\varpi}^1} \right|_{\bar{\varpi}^3=0} \ln \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\varpi}^1} \right|_{\bar{\varpi}^3=0} d\bar{\varpi}^1_*. \tag{5.5}$$

Значение интеграла в формуле (5.5) получим, применяя метод численного интегрирования, основанный на полиномиальной аппроксимации подынтегральной функции, значения которой в узлах $\bar{\varpi}^1_j$ известны.

Данные, приведенные в таблице, получены для различных значений безразмерной кривизны свободного контура шейки в области ее минимального сечения κl; величина шага разностной схемы по координате $\bar{\varpi}^3$ имеет порядок 10^{-3}. Дальнейшее уменьшение шага по координате $\bar{\varpi}^3$ существенно не изменяет значения предельной нагрузки.

Таблица

Значения предельной нагрузки P_* и значения P_{Br}, данные Бриджменом, для различных безразмерных кривизн свободного контура шейки

κl	$\frac{P_*}{2\pi k l^2}$	$\frac{P_{\mathrm{Br}}}{2\pi k l^2}$	$\frac{P_*}{P_{\mathrm{Br}}}$	$\frac{\bar{\varpi}^3_{i+1}-\bar{\varpi}^3_i}{\bar{\varpi}^1_{j+1}-\bar{\varpi}^1_j}$
0.11	0.9540	1.0268	0.9290	4
0.13	0.9565	1.0318	0.9254	4
0.15	0.9632	1.0366	0.9292	4
0.17	0.9707	1.0413	0.9321	4
0.2	0.9797	1.0483	0.9345	4
0.23	0.9848	1.0553	0.9331	4
0.25	0.9893	1.0600	0.9333	4
0.27	0.9976	1.0646	0.9370	4
0.3	1.0025	1.0714	0.9356	4
0.35	1.0074	1.0827	0.9304	5
0.4	1.0202	1.0939	0.9326	5
0.45	1.0286	1.1048	0.9309	7
0.5	1.0421	1.1157	0.9340	7

Численный анализ позволяет заключить, что концентрация напряжений в области минимального сечения шейки относительно мала, пока безразмерный параметр $\varkappa l$ не превосходит единицы.

На основании полученных данных можно также сделать вывод о том, что имеется вполне удовлетворительное согласование значений величины предельной нагрузки, вычисленных двумя различными методами: по схеме Бриджмена и с помощью гипотезы "полной пластичности" Хаара—Кармана. Поле напряжений в области шейки, вычисленное на основании гипотезы "полной пластичности" Хаара—Кармана, приводит к меньшему значению предельной нагрузки.

Литература

[1] Радаев Ю.Н. О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1990. №1. С. 86–94.

[2] Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2004. 147 с.

[3] Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.

[4] Радаев Ю.Н. Предельное состояние шейки произвольного очертания в жесткопластическом теле // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1988. №6. С. 69–75.

[5] Давиденков Н.Н., Спиридонова Н.И. Анализ напряженного состояния в шейке растянутого образца // Заводская лаборатория. 1945. Т. 11. С. 583–593.

[6] Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.

[7] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 408 с.

[8] Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 460 с.

Поступила в редакцию 18/*VIII*/2004;
в окончательном варианте — 24/*IX*/2004.

A NUMERICAL METHOD OF SOLUTIONS OF AXIALLY-SYMMETRIC PROBLEM OF THE THEORY OF PERFECT PLASTICITY

 Y.N. Radayev, Y.N. Bakhareva[6]

The equations of axially-symmetric problems of the mathematical theory of perfect plasticity are considered in the case when a stress state corresponds to an edge of the Tresca prism. The static equilibrium equations are represented in the stress principal lines co-ordinate net (isostatic net). The problem of localization of plastic strains within a neck observed in uniaxially stretched specimen is formulated by the Haar–Karman approach. A numerical method of solution of the problem is proposed for an arbitrary neck free surface. The method based on numerical calculation of the isostatic net. Numerical values of the limit force are obtained in the case of elliptic neck free surface profile and then compared with those known due to Bridgman.

Paper received 18/*VIII*/2004.
Paper accepted 24/*IX*/2004.

[6]Radayev Yuri Nickolaevich (`radayev@ssu.samara.ru`), Bakhareva Yuliya Nickolaevna (`bahareva@ssu.samara.ru`), Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.