

ОБОБЩЕНИЕ ПРИНЦИПА УСРЕДНЕНИЯ КРЫЛОВА—БОГОЛЮБОВА НА СЛУЧАЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С НЕЛИПШИЦЕВОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ¹

© 2004 Е.В. Соколовская²

В работе доказана теорема о взаимной аппроксимации дифференциальных включений с односторонне липшицевой правой частью при отсутствии быстрых переменных. Тем самым расширяется круг задач, к которым применим принцип усреднения Крылова—Боголюбова.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения

$$\dot{x} \in \mu F(t, x, \mu), \quad x(0) = x_0 \quad (1.1)$$

с отображением $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times [0, a] \rightarrow Kv(\mathbb{R}^m)$; здесь $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{R}^m$ — m -мерное евклидово пространство с евклидовой нормой $\|\cdot\|$ и скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\mu \in [0, a]$ ($a > 0$) — малый параметр, $Kv(\mathbb{R}^m)$ — совокупность всех непустых выпуклых компактов в $\mathbb{R}^m$.

Наряду с задачей (1.1) рассмотрим задачу

$$\dot{u} \in \mu F_0(t, u), \quad u(0) = x_0; \quad (1.2)$$

здесь $F_0 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow Kv(\mathbb{R}^m)$. Эту задачу называют обычно усредненной задачей, поскольку нередко в качестве отображения F_0 берется среднее по t от отображения $F(t, x, 0)$:

$$F_0(u) = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta F(t, u, 0) dt. \quad (1.3)$$

Определение. Говорят [1, с. 25], что задача (1.2) аппроксимирует задачу (1.1) взаимно, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\mu_0 > 0$ такое, что

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором О.П. Филатовым.

²Соколовская Елена Валериевна (solena@ssu.samara.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

при всех μ из $(0, \mu_0]$ справедливы утверждения: для любого решения $x_\mu(t)$ задачи (1.1) найдется решение $u_\mu(t)$ задачи (1.2), для которого выполняется

$$\|x_\mu(t) - u_\mu(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, 1/\mu], \quad (1.4)$$

и наоборот, для любого решения $u_\mu(t)$ задачи (1.2) найдется решение $x_\mu(t)$ задачи (1.1), для которого имеет место условие (1.4).

Возможность взаимной аппроксимации задачи (1.1) задачей (1.2) является основанием для замены исходной задачи (1.1) усредненной задачей (1.2), которая, как правило, оказывается более простой. В случае обыкновенных дифференциальных уравнений (обобщением которых являются дифференциальные включения) такая замена носит название принципа усреднения Крылова–Боголюбова, впервые обосновавших ее для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в 30-е годы XX века.

Для дифференциальных включений теорема о взаимной аппроксимации задачи (1.1) задачей (1.2) при условии, что отображение F не зависит от μ , а F_0 определяется равенством (1.3), доказана [2, с. 13] в предположении липшицевости по x отображения $F(t, x)$.

Для того чтобы задача (1.1) аппроксимировалась взаимно задачей (1.2), не обязательно, чтобы правая часть усредненной задачи (1.2) строилась по формуле (1.3). Одним из основных условий взаимной аппроксимации задачи (1.1) задачей (1.2) является близость средних от отображений F и F_0 в следующем смысле:

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \alpha \left(\frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} F(t, \xi_0, 0) dt, \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} F_0(t, \xi_0) dt \right) = 0 \quad (1.5)$$

равномерно по t_0 на $\mathbb{R}_+$ и ξ_0 на $\mathbb{R}^m$; здесь $\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\}$, $\beta(A, B) = \sup_{a \in A} \rho(a, B)$ — соответственно отклонение и полуотклонение по Хаусдорфу множества A от множества B ; $\rho(a, B) = \inf_{b \in B} \|a - b\|$ — расстояние от точки a до множества B . При выполнении этого условия и некоторых других, естественных для задач аппроксимации, в предположении липшицевости по x и u соответственно отображений F и F_0 задача (1.2) будет аппроксимировать взаимно задачу (1.1); это следует из [1, с. 52].

Но даже стандартная процедура усреднения, позволяющая в ряде случаев найти вид задачи (1.2), может привести к усредненной задаче с нелипшицевой правой частью. Рассмотрению этого случая и посвящена настоящая работа. Именно вместо липшицевости по x и u соответственно отображений F и F_0 от них требуется односторонняя липшицевость (OSL) по x и u соответственно, что является более слабым условием, чем липшицевость.

Условие односторонней липшицевости для однозначных функций появилось впервые, по-видимому, в 50-е годы XX века в работе [3] в связи с вопросом о единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для многозначного отображения $E : [0, 1] \times \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$ ($K(\mathbb{R}^m)$ — совокупность всех непустых компактов в $\mathbb{R}^m$) условие односторонней липшицевости по x сформулировано в работе [4]: существует интегрируемая по Лебегу на $[0, 1]$ функция $L_E : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$, для любого $t \in [0, 1]$ и для любого $v \in E(t, x_1)$ найдется элемент $w \in E(t, x_2)$, для которого выполняется

$$\langle x_1 - x_2, v - w \rangle \leq L_E(t) \|x_1 - x_2\|^2.$$

Для дифференциальных включений с OSL правой частью, как и для дифференциальных включений с липшицевой правой частью, имеет место теорема о непрерывной зависимости решений задачи Коши от исходных данных. Эта теорема существенно используется в настоящей работе. Приведем ее.

Теорема ([4, с. 785]). Предположим, что определенное на $[0, 1] \times \mathbb{R}^m$ отображение $H(s, x)$ со значениями в $Kv(\mathbb{R}^m)$ удовлетворяет условиям: H — OSL отображение с интегрируемой на $[0, 1]$ функцией $L(s)$; $H(s, x)$ измеримо по s на $[0, 1]$ для каждого $x \in \mathbb{R}^m$ и полунепрерывно сверху по x для каждого $s \in [0, 1]$; $\|H(s, x)\| \leq \lambda(s)(1 + \|x\|)$ для всех $x \in \mathbb{R}^m$ и почти всех $s \in [0, 1]$ ($\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ — интегрируемая на $[0, 1]$ функция). И пусть имеется абсолютно непрерывная функция $z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, для которой расстояние $\rho(\dot{z}(s), H(s, z(s))) \leq g(s)$ для почти всех $s \in [0, 1]$ с интегрируемой на $[0, 1]$ функцией $g(s)$.

Тогда для любого компакта $K_0 \in K(\mathbb{R}^m)$ существует на $[0, 1]$ решение $x(s)$ задачи

$$\dot{x} \in H(s, x), \quad x(0) \in K_0$$

такое, что $\|x(s) - z(s)\| \leq v(s)$, где

$$v(s) = d \exp(m(s)) + \int_0^s \exp[m(s) - m(\tau)] g(\tau) d\tau, \quad d = \rho(z(0), K_0), \quad m(s) = \int_0^s L(\tau) d\tau.$$

Выполнение указанного выше условия OSL и требуется в настоящей работе от отображений F и F_0 . При этом оказалось, что условие близости средних (1.5) можно заменить на условие

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \alpha \left(\frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta F(t, \xi_0, 0) dt, \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta F_0(t, \xi_0) dt \right) = 0 \quad (1.6)$$

равномерно по ξ_0 на $\mathbb{R}^m$, аналогичное классическому условию в случае дифференциальных уравнений:

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta F(t, \xi_0, 0) dt - \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta F_0(t, \xi_0) dt \right\| = 0$$

равномерно по ξ_0 на $\mathbb{R}^m$.

2. Основной результат

Пусть для отображений $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times [0, a] \rightarrow Kv(\mathbb{R}^m)$ и $F_0 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow Kv(\mathbb{R}^m)$ выполнены следующие условия:

а) отображения F и F_0 измеримы по t на $\mathbb{R}_+$ соответственно для любых $(x, \mu) \in \mathbb{R}^m \times [0, a]$ и любого $u \in \mathbb{R}^m$;

б) отображения F и F_0 интегрально ограничены: $\|F(t, x, \mu)\| \leq \lambda_F(t)$ $\forall (t, x, \mu) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times [0, a]$ и $\|F_0(t, u)\| \leq \lambda_{F_0}(t)$ $\forall (t, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$, причем $\lambda_F(t), \lambda_{F_0}(t)$ — локально интегрируемые на $\mathbb{R}_+$ функции такие, что их средние

$$\frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \lambda_F(t) dt = O(1), \quad \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \lambda_{F_0}(t) dt = O(1) \quad \text{при } \Delta \rightarrow +\infty \quad (2.1)$$

равномерно по t_0 на $\mathbb{R}_+$;

в) модули непрерывности³ $\omega_F^\circ(t, \delta)$ и $\omega_{F_0}(t, \delta)$ отображений $F(t, x, 0)$ и $F_0(t, u)$ соответственно по x и u допускают оценки

$$\omega_F^\circ(t, \delta) \leq \sigma_F(t) \eta_F(t, \delta), \quad \omega_{F_0}(t, \delta) \leq \sigma_{F_0}(t) \eta_{F_0}(t, \delta),$$

в которых неотрицательные функции $\eta_F(t, \delta)$ и $\eta_{F_0}(t, \delta)$ при $\delta \rightarrow +0$ стремятся к нулю равномерно по t на $\mathbb{R}_+$, а положительные локально интегрируемые на $\mathbb{R}_+$ функции $\sigma_F(t)$ и $\sigma_{F_0}(t)$ таковы, что

$$\frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \sigma_F(t) dt = O(1), \quad \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \sigma_{F_0}(t) dt = O(1) \quad \text{при } \Delta \rightarrow +\infty \quad (2.2)$$

равномерно по t_0 на $\mathbb{R}_+$;

г) отображение $F(t, x, \mu)$ удовлетворяет условию

$$\alpha(F(t, x, \mu), F(t, x, 0)) \leq \sigma_F(t) \nu(t, x, \mu) \quad \forall (t, x, \mu) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times [0, a],$$

где $\nu(t, x, \mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow +0$ равномерно по (t, x) на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$.

Заметим, что выполнение для отображения F_0 перечисленных выше условий обеспечивает, в силу теоремы Деймлинга [5, с. 58], разрешимость на $[0, 1/\mu]$ при каждом $\mu \in (0, a]$ задачи (1.2);

д) пусть для отображений F и F_0 выполняется условие близости средних (1.6).

При этих предположениях имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть отображение $F(t, x, \mu)$ при каждом фиксированном $\mu \in [0, a]$ и отображение $F_0(t, u)$ — OSL по x и u соответственно с локально интегрируемыми на $\mathbb{R}_+$ функциями $L_F^\mu, L_{F_0} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такими, что при $\Delta \rightarrow +\infty$ имеют место оценки

$$\frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta L_{F_0}(t) dt = O(1), \quad \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta L_F^\mu(t) dt = O(1), \quad (2.3)$$

³Модуль непрерывности $\omega_E(\delta)$ многозначного отображения $E(x)$ со значениями в $K(\mathbb{R}^m)$ определяется равенством: $\omega_E(\delta) = \sup_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m: \|x_1 - x_2\| \leq \delta} \alpha(E(x_1), E(x_2))$.

причем последнее соотношение выполняется равномерно по μ на $[0, a]$.

Тогда задача (1.2) аппроксимирует взаимно задачу (1.1).

Пример. В качестве задачи (1.1) рассмотрим задачу

$$\dot{x} \in \mu F(t, x, \mu), \quad x(0) = 1 \quad (2.4)$$

с отображением $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0, a] \rightarrow Kv(\mathbb{R})$, определяемым равенством

$$F(t, x, \mu) = g(x)(\sqrt{\mu} \sin^2(t + \mu) + [1; 2]),$$

где функция $g(x)$ задается так:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq 0, \\ 1 - \sqrt{x}, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{если } x > 1, \end{cases}$$

а в качестве усредненной задачи (1.2) возьмем задачу

$$\dot{u} \in \mu F_0(t, u), \quad u(0) = 1, \quad (2.5)$$

в которой отображение $F_0 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow Kv(\mathbb{R})$ задается равенством

$$F_0(t, u) = g(u)[1; 2].$$

Отображения F и F_0 нелипшицевы по x и u соответственно.

Заметим, что отображение F_0 из правой части усредненной задачи (2.5) строится по формуле (1.3). Для задач (2.4) и (2.5) выполнены все условия сформулированной выше теоремы и, следовательно, задача (2.5) аппроксимирует взаимно задачу (2.4).

3. Доказательство теоремы

В силу условий (2.1), (2.2) и (2.3) найдутся константы $c > 0$ и $\Delta_0 > 0$ такие, что при $\Delta \geq \Delta_0$ для всех $t_0 \in \mathbb{R}_+$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \lambda_F(t) dt &\leq c, \quad \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \lambda_{F_0}(t) dt \leq c; \quad \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \sigma_F(t) dt \leq c, \\ \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \sigma_{F_0}(t) dt &\leq c; \quad \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta L_{F_0}(t) dt \leq c; \quad \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta L_F^\mu(t) dt \leq c, \quad \forall \mu \in [0, a]. \end{aligned}$$

Далее, заметим, что, по леммам 1, 2 из [6], выполнение для отображения F условий ϕ и ψ равносильно выполнению для него условия

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m, \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall \mu \in [0, a]: \\ \|x_1 - x_2\| < \delta, \quad 0 \leq \mu < \delta \Rightarrow \alpha(F(t, x_1, \mu), F(t, x_2, 0)) < \varepsilon \sigma_F(t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

а выполнение для F_0 условия ϕ равносильно следующему:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^m, \forall t \in \mathbb{R}_+: \\ \|u_1 - u_2\| < \delta \Rightarrow \alpha(F_0(t, u_1), F_0(t, u_2)) < \varepsilon \sigma_{F_0}(t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

I. Сначала докажем выполнение условия: $\forall \varepsilon > 0 \exists \mu_0 > 0 \forall \mu \in (0, \mu_0]$, и для любого решения $u_\mu(t)$ задачи (1.2) найдется решение $x_\mu(t)$ задачи (1.1), для которого выполняется

$$\|x_\mu(t) - u_\mu(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, 1/\mu]. \quad (3.3)$$

(В этом случае говорят [1, с. 25], что задача (1.2) аппроксимирует снизу задачу (1.1)).

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По взятому $\varepsilon > 0$ найдем число $\delta_F(\varepsilon) > 0$ из выполнения условия (3.1). По числу $\gamma = \min\{\delta_F(\varepsilon)/2, \varepsilon\}/(c+2)$ найдем число $\delta_{F_0}(\gamma) > 0$ из выполнения условия (3.2). Возьмем число $N \in \mathbb{N}$ настолько большим, чтобы $c/N < \min\{\delta_{F_0}(\gamma), \delta_F(\varepsilon)/2, \varepsilon\}$. По числу γ/N найдем число $\Delta_1(\gamma/N) > \Delta_0$ из выполнения условия (1.6) о близости средних от F и F_0 .

Теперь берем число $\mu_0 > 0$ настолько малым, чтобы

$$\mu_0 < \min\left\{\frac{1}{\Delta_1(\gamma/N)N}, \delta_F(\varepsilon), 1/\Delta_0\right\}.$$

Покажем, что это μ_0 — искомое. Пусть $\mu \in (0, \mu_0]$ — произвольное. Разобьем отрезок $[0, 1/\mu]$ точками $t_j = \frac{j}{\mu N}$ ($j = \overline{0, N}$) на N частичных отрезков длиной $\Delta = \frac{1}{\mu N}$. Из того, что $\mu \leq \mu_0$ следует, что $\Delta > \Delta_1(\gamma/N) > \Delta_0$.

Возьмем теперь произвольное решение $u_\mu(t)$ задачи (1.2). Значения его в узлах сетки обозначим через u_j . Для этого решения имеем:

$$u_\mu(t) = x_0 + \mu \int_0^t v(s) ds,$$

где $v(s) \in F_0(s, u_\mu(s))$ — некоторый измеримый селектор.

По теореме об измеримом селекторе, на каждом отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ ($j = \overline{0, N-1}$) найдется измеримый селектор $v_j^1(t) \in F_0(t, u_j)$ такой, что

$$\begin{aligned} \|v(t) - v_j^1(t)\| &= \rho(v(t), F_0(t, u_j)) \leq \\ &\leq \beta(F_0(t, u_\mu(t)), F_0(t, u_j)) \leq \alpha(F_0(t, u_\mu(t)), F_0(t, u_j)). \end{aligned}$$

Чтобы теперь использовать условие (3.2) для F_0 , оценим, насколько $u_\mu(t)$ отличается от u_j на $[t_j, t_{j+1}]$ ($j = \overline{0, N-1}$). Имеем:

$$\begin{aligned} \|u_\mu(t) - u_j\| &= \left\| x_0 + \mu \int_0^t v(s) ds - x_0 - \mu \int_0^{t_j} v(s) ds \right\| \leq \mu \int_{t_j}^t \|v(s)\| ds \leq \\ &\leq \mu \int_{t_j}^{t_j+\Delta} \lambda_{F_0}(s) ds \leq \mu c \Delta = \mu c \frac{1}{\mu N} = \frac{c}{N} < \delta_{F_0}(\gamma), \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad (j = \overline{0, N-1}). \end{aligned}$$

Так как число $\delta_{F_0}(\gamma)$ выбиралось по числу γ из выполнения условия (3.2) для F_0 , находим:

$$\|v(t) - v_j^1(t)\| \leq \alpha(F_0(t, u_\mu(t)), F_0(t, u_j)) < \gamma \sigma_{F_0}(t) \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad (j = \overline{0, N-1}). \quad (3.4)$$

По теореме об измеримом селекторе, на каждом отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ ($j = \overline{0, N-1}$) найдется селектор $v_j^2(t) \in F(t, u_j, 0)$ такой, что

$$\left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j^1(t) dt - \int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j^2(t) dt \right\| = \rho \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j^1(t) dt, \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(t, u_j, 0) dt \right).$$

Учитывая, что для $j = 1, 2, \dots, N-1$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \rho \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j^1(t) dt, \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(t, u_j, 0) dt \right) &\leq \beta \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} F_0(t, u_j) dt, \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(t, u_j, 0) dt \right) \leq \\ &\leq \alpha \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} F_0(t, u_j) dt, \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(t, u_j, 0) dt \right) \leq \\ &\leq \alpha \left(\int_0^{t_{j+1}} F_0(t, u_j) dt, \int_0^{t_{j+1}} F(t, u_j, 0) dt \right) + \alpha \left(\int_0^{t_j} F_0(t, u_j) dt, \int_0^{t_j} F(t, u_j, 0) dt \right) = \\ &= t_{j+1} \cdot \alpha \left(\frac{1}{t_{j+1}} \int_0^{t_{j+1}} F_0(t, u_j) dt, \frac{1}{t_{j+1}} \int_0^{t_{j+1}} F(t, u_j, 0) dt \right) + \\ &+ t_j \cdot \alpha \left(\frac{1}{t_j} \int_0^{t_j} F_0(t, u_j) dt, \frac{1}{t_j} \int_0^{t_j} F(t, u_j, 0) dt \right), \end{aligned}$$

в силу условия (1.6) о близости средних от F и F_0 , получим

$$\left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j^1(t) dt - \int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j^2(t) dt \right\| \leq t_{j+1} \frac{\gamma}{N} + t_j \frac{\gamma}{N} \leq 2\gamma\Delta, \quad \forall j = \overline{0, N-1}. \quad (3.5)$$

Введем теперь на $[0, 1/\mu]$ функцию

$$v^2(t) = \begin{cases} v_j^2(t), & \text{если } t \in [t_j, t_{j+1}) \quad (j = \overline{0, N-1}), \\ v_{N-1}^2(1/\mu), & \text{если } t = 1/\mu \end{cases}$$

и функцию

$$p_\mu(t) = x_0 + \mu \int_0^t v^2(s) ds.$$

С целью дальнейшего применения теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши для дифференциального включения от исходных данных (она применяется в случае, когда временная переменная t изменяется от 0 до 1) введем на $[0, 1]$ вспомогательную задачу

$$\dot{q} \in H(s, q, \mu), \quad q(0) = x_0, \quad (s \in [0, 1]), \quad (3.6)$$

где $H : [0, 1] \times \mathbb{R}^m \times (0, \mu_0] \rightarrow K\nu(\mathbb{R}^m)$ определяется равенством

$$H(s, q, \mu) = F\left(\frac{s}{\mu}, q, \mu\right).$$

Заметим, что если функция $q(s)$ — решение на $[0, 1]$ задачи (3.6), то $x_\mu(t) = q(\mu t)$ — решение на $[0, 1/\mu]$ задачи (1.1).

Покажем, что для задачи (3.6) выполняется условие упомянутой выше теоремы о непрерывной зависимости, состоящее в существовании абсолютно непрерывной на $[0, 1]$ функции $z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ такой, что

$$\rho(\dot{z}(s), H(s, z(s), \mu)) \leq g(s) \quad (3.7)$$

для почти всех $s \in [0, 1]$, где $g(s)$ — интегрируемая на $[0, 1]$ функция.

В качестве этой функции $z(s)$ возьмем

$$z(s) = p_\mu(s/\mu) = x_0 + \mu \int_0^{s/\mu} v^2(\alpha) d\alpha = x_0 + \int_0^s v^2(\beta/\mu) d\beta.$$

Это и будет функция, для которой выполняется условие (3.7). Действительно, каждое $s \in [0, 1]$ попадает в один из промежутков $[\mu t_j, \mu t_{j+1})$ ($j = \overline{0, N-1}$), а тогда для расстояния $\rho(\dot{z}(s), H(s, z(s), \mu))$ имеем для почти всех $s \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \rho(\dot{z}(s), H(s, z(s), \mu)) &= \rho(v^2(s/\mu), H(s, z(s), \mu)) = \\ &= \rho(v_j^2(s/\mu), F(s/\mu, p_\mu(s/\mu), \mu)) \leq \beta(F(t, u_j, 0), F(t, p_\mu(t), \mu)) \leq \\ &\leq \alpha(F(t, u_j, 0), F(t, p_\mu(t), \mu)), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $t = s/\mu \in [t_j, t_{j+1})$.

Чтобы теперь использовать условие (3.1) для отображения F , оценим норму $\|u_j - p_\mu(t)\| \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}]$ ($j = \overline{0, N-1}$). Для этого сначала оценим эту норму в узлах сетки. Используя (3.4) и (3.5), находим:

$$\begin{aligned} \|u_j - p_\mu(t_j)\| &= \left\| x_0 + \mu \int_0^{t_j} v(\tau) d\tau - x_0 - \mu \int_0^{t_j} v^2(\tau) d\tau \right\| = \\ &= \left\| \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(\tau) d\tau - \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i^2(\tau) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \left\| \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(\tau) d\tau - \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i^1(\tau) d\tau \right\| + \left\| \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i^1(\tau) d\tau - \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i^2(\tau) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|v(\tau) - v_i^1(\tau)\| d\tau + \mu \sum_{i=0}^{j-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i^1(\tau) d\tau - \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i^2(\tau) d\tau \right\| < \\ &< \mu \gamma \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma_{F_0}(\tau) d\tau + 2\mu j \Delta \gamma \leq \mu j \Delta \gamma c + 2\mu j \Delta \gamma = \end{aligned}$$

$$= \mu j \Delta \gamma(c+2) \leq \gamma(c+2) \leq \frac{\delta_F(\varepsilon)}{2} \quad \forall j = \overline{0, N}.$$

Отдельно отметим оценку

$$\|u_j - p_\mu(t_j)\| \leq \gamma(c+2) \quad \forall j = \overline{0, N}. \quad (3.9)$$

Теперь для любого $t \in [t_j, t_{j+1}]$ ($j = \overline{0, N-1}$) имеем

$$\begin{aligned} \|u_j - p_\mu(t)\| &\leq \|u_j - p_\mu(t_j)\| + \|p_\mu(t_j) - p_\mu(t)\| \leq \\ &\leq \frac{\delta_F(\varepsilon)}{2} + \left\| x_0 + \mu \int_0^{t_j} v^2(\tau) d\tau - x_0 - \mu \int_0^t v^2(\tau) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \frac{\delta_F(\varepsilon)}{2} + \mu \int_{t_j}^t \|v_j^2(\tau)\| d\tau \leq \frac{\delta_F(\varepsilon)}{2} + \mu \int_{t_j}^{t_j+\Delta} \|v_j^2(\tau)\| d\tau \leq \frac{\delta_F(\varepsilon)}{2} + \mu \int_{t_j}^{t_j+\Delta} \lambda_F(\tau) d\tau \leq \\ &\leq \frac{\delta_F(\varepsilon)}{2} + \mu c \Delta = \frac{\delta_F(\varepsilon)}{2} + \mu c \frac{1}{\mu N} = \frac{\delta_F(\varepsilon)}{2} + \frac{c}{N} < \frac{\delta_F(\varepsilon)}{2} + \frac{\delta_F(\varepsilon)}{2} = \delta_F(\varepsilon) \\ &\quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad (j = \overline{0, N-1}). \end{aligned}$$

Так как число $\delta_F(\varepsilon)$ выбиралось по числу $\varepsilon > 0$ из выполнения условия (3.1) для F , то

$$\alpha(F(t, u_j, 0), F(t, p_\mu(t), \mu)) < \varepsilon \sigma_F(t) \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad (j = \overline{0, N-1}).$$

Из (3.8) теперь следует, что

$$\rho(\dot{z}(s), H(s, z(s), \mu)) < \varepsilon \sigma_F(s/\mu)$$

для почти всех $s \in [0, 1]$, то есть для задачи (3.6) выполняется условие (3.7) с интегрируемой на $[0, 1]$ функцией $g(s) = \varepsilon \sigma_F(s/\mu)$.

Нетрудно убедиться, что для задачи (3.6) выполнены и все остальные условия упомянутой выше теоремы о непрерывной зависимости. При этом функция $L_H^\mu(s)$ из условия OSL для H совпадает с $L_F^\mu(s/\mu)$, где L_F^μ — функция из условия OSL для отображения F .

В силу этой теоремы на $[0, 1]$ существует решение $q(s)$ задачи (3.6), для которого на $[0, 1]$ имеет место оценка:

$$\|q(s) - z(s)\| \leq \int_0^s \exp(m_H^\mu(s) - m_H^\mu(\tau)) g(\tau) d\tau,$$

где

$$\begin{aligned} m_H^\mu(s) &= \int_0^s L_H^\mu(\tau) d\tau = \int_0^s L_F^\mu\left(\frac{\tau}{\mu}\right) d\tau = \\ &= \mu \int_0^{s/\mu} L_F^\mu(\beta) d\beta \leq \mu \int_0^{1/\mu} L_F^\mu(\beta) d\beta \leq c \quad \forall s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned}
\|q(s) - z(s)\| &\leq \int_0^s \exp(c)g(\tau) d\tau = \int_0^s \exp(c)\varepsilon\sigma_F(\tau/\mu) d\tau = \\
&= \exp(c)\varepsilon \int_0^s \sigma_F(\tau/\mu) d\tau = \exp(c)\varepsilon\mu \int_0^{s/\mu} \sigma_F(\beta) d\beta \leq \\
&\leq \exp(c)\varepsilon\mu \int_0^{1/\mu} \sigma_F(\beta) d\beta \leq \exp(c)\varepsilon\mu \frac{1}{\mu} c = \exp(c)c\varepsilon \quad \forall s \in [0, 1].
\end{aligned}$$

Следовательно, $\forall t \in [0, 1/\mu]$ выполняется

$$\|q(\mu t) - z(\mu t)\| \leq \exp(c)c\varepsilon.$$

Вспоминая, что $q(\mu t) = x_\mu(t)$ — решение на $[0, 1/\mu]$ задачи (1.1), а $z(\mu t) = p_\mu(t)$, находим

$$\|x_\mu(t) - p_\mu(t)\| \leq \exp(c)c\varepsilon \quad \forall t \in [0, 1/\mu]. \quad (3.10)$$

Таким образом, на $[0, 1/\mu]$ найдено решение $x_\mu(t)$ задачи (1.1), для которого имеет место (3.10).

Оценим теперь $\|x_\mu(t) - u_\mu(t)\| \quad \forall t \in [0, 1/\mu]$. Обозначая через t_j ближайший слева к точке t узел сетки, с учетом (3.9), (3.10) находим

$$\begin{aligned}
\|x_\mu(t) - u_\mu(t)\| &\leq \|x_\mu(t) - p_\mu(t)\| + \|p_\mu(t) - p_\mu(t_j)\| + \|p_\mu(t_j) - u_j\| + \|u_j - u_\mu(t)\| \leq \\
&\leq \exp(c)c\varepsilon + \frac{c}{N} + \gamma(c+2) + \|x_0 + \mu \int_0^{t_j} v(s) ds - x_0 - \mu \int_0^t v(s) ds\| \leq \\
&\leq \exp(c)c\varepsilon + \frac{c}{N} + \gamma(c+2) + \mu \int_{t_j}^{t_j+\Delta} \|v(s)\| ds \leq \exp(c)c\varepsilon + 2\varepsilon + \mu \int_{t_j}^{t_j+\Delta} \lambda_{F_0}(s) ds \leq \\
&\leq \exp(c)c\varepsilon + 2\varepsilon + \mu c\Delta = \exp(c)c\varepsilon + 2\varepsilon + \mu c \frac{1}{\mu N} < \varepsilon(\exp(c)c + 3) \quad \forall t \in [0, 1/\mu].
\end{aligned}$$

В силу произвольности ε это означает, что задача (1.2) аппроксимирует снизу задачу (1.1).

II. Теперь докажем выполнение условия: $\forall \varepsilon > 0 \exists \mu_0 > 0 \forall \mu \in (0, \mu_0]$, и для любого решения $x_\mu(t)$ задачи (1.1) найдется решение $u_\mu(t)$ задачи (1.2), для которого имеет место оценка (3.3) (в этом случае задача (1.2) называется [1, с. 25] аппроксимирующей сверху задачу (1.1)).

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По нему найдем число $\delta_{F_0}(\varepsilon) > 0$ из выполнения условия (3.2) для F_0 . По числу $\gamma = \min\{\delta_{F_0}(\varepsilon)/2, \varepsilon\}/(c+2)$ найдем число $\delta_F(\gamma) > 0$ из выполнения для отображения F условия (3.1). Возьмем число $N \in \mathbb{N}$ настолько большим, что $c/N < \min\{\delta_F(\gamma), \delta_{F_0}(\varepsilon)/2, \varepsilon\}$. По числу

γ/N найдем число $\Delta_1(\gamma/N) > \Delta_0$ из выполнения условия (1.6) о близости средних от отображений F и F_0 .

Далее берем $\mu_0 > 0$ настолько малым, что

$$\mu_0 < \min \left\{ \frac{1}{\Delta_1(\gamma/N)N}, \delta_F(\gamma), \frac{1}{\Delta_0} \right\}.$$

Покажем теперь, что это μ_0 — искомое. Для этого возьмем произвольное $\mu \in (0, \mu_0]$. Разобьем отрезок $[0, 1/\mu]$ точками $t_j = \frac{j}{\mu N}$ ($j = \overline{0, N}$) на N частичных отрезков длиной $\Delta = \frac{1}{\mu N}$. Из того, что $\mu \leq \mu_0$, следует, что $\Delta > \Delta_1(\gamma/N) > \Delta_0$.

Возьмем произвольное решение $x_\mu(t)$ задачи (1.1) (по доказанному выше эта задача разрешима на $[0, 1/\mu]$). Значения его в узлах сетки обозначим через x_j . Для этого решения $x_\mu(t)$ имеем

$$x_\mu(t) = x_0 + \mu \int_0^t v(s) ds,$$

где $v(s) \in F(s, x_\mu(s), \mu)$ — некоторый измеримый селектор.

По теореме об измеримом селекторе, на $[t_j, t_{j+1}]$ ($j = \overline{0, N-1}$) найдется измеримый селектор $v_j^1(t) \in F(t, x_j, 0)$ такой, что

$$\begin{aligned} \|v(t) - v_j^1(t)\| &= \rho(v(t), F(t, x_j, 0)) \leq \\ &\leq \beta(F(t, x_\mu(t), \mu), F(t, x_j, 0)) \leq \alpha(F(t, x_\mu(t), \mu), F(t, x_j, 0)). \end{aligned}$$

Чтобы теперь использовать условие (3.1) для F , оценим сначала норму $\|x_\mu(t) - x_j\|$ для любого $t \in [t_j, t_{j+1}]$ ($j = \overline{0, N-1}$):

$$\begin{aligned} \|x_\mu(t) - x_j\| &= \left\| x_0 + \mu \int_0^t v(s) ds - x_0 - \mu \int_0^{t_j} v(s) ds \right\| \leq \mu \int_{t_j}^t \|v(s)\| ds \leq \\ &\leq \mu \int_{t_j}^{t_j+\Delta} \|v(s)\| ds \leq \mu \int_{t_j}^{t_j+\Delta} \lambda_F(s) ds \leq \mu c \Delta = \mu c \frac{1}{\mu N} = \frac{c}{N} < \delta_F(\gamma). \end{aligned}$$

Так как число $\delta_F(\gamma)$ выбиралось по числу γ из выполнения для F условия (3.1), то

$$\begin{aligned} \|v(t) - v_j^1(t)\| &\leq \alpha(F(t, x_\mu(t), \mu), F(t, x_j, 0)) < \gamma \sigma_F(t) \\ \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad (j = \overline{0, N-1}). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Опять, по теореме об измеримом селекторе, на $[t_j, t_{j+1}]$ ($j = \overline{0, N-1}$) найдется селектор $v_j^2(t) \in F_0(t, x_j)$ такой, что

$$\left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j^1(t) dt - \int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j^2(t) dt \right\| = \rho \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j^1(t) dt, \int_{t_j}^{t_{j+1}} F_0(t, x_j) dt \right).$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}
\rho\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j^1(t) dt, \int_{t_j}^{t_{j+1}} F_0(t, x_j) dt\right) &\leq \beta\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} F(t, x_j, 0) dt, \int_{t_j}^{t_{j+1}} F_0(t, x_j) dt\right) \leq \\
&\leq \alpha\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} F(t, x_j, 0) dt, \int_{t_j}^{t_{j+1}} F_0(t, x_j) dt\right) \leq \\
&\leq \alpha\left(\int_0^{t_{j+1}} F(t, x_j, 0) dt, \int_0^{t_{j+1}} F_0(t, x_j) dt\right) + \alpha\left(\int_0^{t_j} F(t, x_j, 0) dt, \int_0^{t_j} F_0(t, x_j) dt\right) = \\
&= t_{j+1} \alpha\left(\frac{1}{t_{j+1}} \int_0^{t_{j+1}} F(t, x_j, 0) dt, \frac{1}{t_{j+1}} \int_0^{t_{j+1}} F_0(t, x_j) dt\right) + \\
&+ t_j \alpha\left(\frac{1}{t_j} \int_0^{t_j} F(t, x_j, 0) dt, \frac{1}{t_j} \int_0^{t_j} F_0(t, x_j) dt\right),
\end{aligned}$$

используя условие (1.6) о близости средних от F и F_0 , получаем

$$\left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j^1(t) dt - \int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j^2(t) dt \right\| < t_{j+1} \frac{\gamma}{N} + t_j \frac{\gamma}{N} \leq \frac{\gamma}{\mu N} + \frac{\gamma}{\mu N} = 2\gamma\Delta \quad \forall j = \overline{0, N-1}. \quad (3.12)$$

Введем теперь на $[0, 1/\mu]$ функцию

$$v^2(t) = \begin{cases} v_j^2(t), & \text{если } t \in [t_j, t_{j+1}) \quad (j = \overline{0, N-1}); \\ v_{N-1}^2(1/\mu), & \text{если } t = 1/\mu \end{cases}$$

и функцию $a_\mu(t) = x_0 + \mu \int_0^t v^2(s) ds$.

С целью дальнейшего применения теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши для дифференциального включения от исходных данных введем на отрезке $[0, 1]$ вспомогательную задачу

$$\dot{b} \in G_0(s, b), \quad b(0) = x_0, \quad (3.13)$$

в которой отображение $G_0 : [0, 1] \times \mathbb{R}^m \rightarrow Kv(\mathbb{R}^m)$ определяется равенством

$$G_0(s, b) = F_0\left(\frac{s}{\mu}, b\right) \quad (s \in [0, 1]).$$

Заметим, что если функция $b(s)$ — решение на $[0, 1]$ задачи (3.13), то функция $u_\mu(t) = b(\mu t)$ является решением на $[0, 1/\mu]$ задачи (1.2).

Покажем, что для задачи (3.13) выполняется условие упомянутой выше теоремы о непрерывной зависимости, состоящее в существовании

абсолютно непрерывной на $[0, 1]$ функции $z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, для которой выполняется неравенство

$$\rho(\dot{z}(s), G_0(s, z(s))) \leq g(s) \quad (3.14)$$

для почти всех $s \in [0, 1]$ с интегрируемой на $[0, 1]$ функцией $g(s)$.

В качестве этой функции $z(s)$ возьмем

$$z(s) = a_\mu(s/\mu) = x_0 + \mu \int_0^{s/\mu} v^2(\alpha) d\alpha = x_0 + \int_0^s v^2(\beta/\mu) d\beta.$$

Это и будет функция, удовлетворяющая условию (3.14). Действительно, каждое $s \in [0, 1]$ попадает в один из промежутков $[\mu t_j, \mu t_{j+1})$ ($j = \overline{0, N-1}$), а тогда для расстояния $\rho(\dot{z}(s), G_0(s, z(s)))$ для почти всех $s \in [0, 1]$ имеем:

$$\begin{aligned} \rho(\dot{z}(s), G_0(s, z(s))) &= \rho(v^2(s/\mu), G_0(s, z(s))) = \rho(v_j^2(s/\mu), F_0(s/\mu, a_\mu(s/\mu))) \leq \\ &\leq \beta(F_0(s/\mu, x_j), F_0(s/\mu, a_\mu(s/\mu))) \leq \alpha(F_0(t, x_j), F_0(t, a_\mu(t))), \end{aligned}$$

где $t = s/\mu \in [t_j, t_{j+1})$.

Чтобы теперь использовать условие (3.2) для F_0 , оценим норму $\|x_j - a_\mu(t)\| \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1})$ ($j = \overline{0, N-1}$). Для этого сначала оценим эту норму в узлах сетки. С учетом (3.11) и (3.12) $\forall j = \overline{0, N}$ имеем

$$\begin{aligned} \|x_j - a_\mu(t_j)\| &= \left\| x_0 + \mu \int_0^{t_j} v(\tau) d\tau - x_0 - \mu \int_0^{t_j} v^2(\tau) d\tau \right\| = \\ &= \left\| \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(\tau) d\tau - \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i^2(\tau) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \left\| \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(\tau) d\tau - \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i^1(\tau) d\tau \right\| + \left\| \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i^1(\tau) d\tau - \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i^2(\tau) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|v(\tau) - v_i^1(\tau)\| d\tau + \mu \sum_{i=0}^{j-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} (v_i^1(\tau) - v_i^2(\tau)) d\tau \right\| < \\ &< \mu \gamma \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma_F(\tau) d\tau + 2\mu j \Delta \gamma \leq \mu j \Delta \gamma c + 2\mu j \Delta \gamma \leq \gamma(c+2) \leq \frac{\delta_{F_0}(\varepsilon)}{2}. \end{aligned}$$

Ниже понадобится также оценка

$$\|x_j - a_\mu(t_j)\| \leq \gamma(c+2) \quad \forall j = \overline{0, N}. \quad (3.15)$$

Далее, для всех $t \in [t_j, t_{j+1})$ ($j = \overline{0, N-1}$) имеем

$$\|x_j - a_\mu(t)\| \leq \|x_j - a_\mu(t_j)\| + \|a_\mu(t_j) - a_\mu(t)\| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\delta_{F_0}(\varepsilon)}{2} + \|x_0 + \mu \int_0^{t_j} v^2(\tau) d\tau - x_0 - \mu \int_0^t v^2(\tau) d\tau\| \leq \\
&\leq \frac{\delta_{F_0}(\varepsilon)}{2} + \mu \int_{t_j}^t \|v_j^2(\tau)\| d\tau \leq \frac{\delta_{F_0}(\varepsilon)}{2} + \mu \int_{t_j}^{t_j+\Delta} \lambda_{F_0}(\tau) d\tau \leq \frac{\delta_{F_0}(\varepsilon)}{2} + \mu c \Delta = \\
&= \frac{\delta_{F_0}(\varepsilon)}{2} + \frac{c}{N} < \frac{\delta_{F_0}(\varepsilon)}{2} + \frac{\delta_{F_0}(\varepsilon)}{2} = \delta_{F_0}(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Так как число $\delta_{F_0}(\varepsilon)$ выбиралось по числу $\varepsilon > 0$ из выполнения условия (3.2) для F_0 , то

$$\alpha(F_0(t, x_j), F_0(t, a_\mu(t))) < \varepsilon \sigma_{F_0}(t) \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad (j = \overline{0, N-1}).$$

Следовательно,

$$\rho(\dot{z}(s), G_0(s, z(s))) < \varepsilon \sigma_{F_0}(s/\mu)$$

для почти всех $s \in [0, 1]$, то есть для задачи (3.13) выполняется условие (3.14) с интегрируемой на $[0, 1]$ функцией $g(s) = \varepsilon \sigma_{F_0}(s/\mu)$.

Нетрудно проверить, что для задачи (3.13) выполняются и остальные условия теоремы о непрерывной зависимости, причем функция $L_{G_0}(s)$ из условия OSL для отображения G_0 совпадает с $L_{F_0}(s/\mu)$, где L_{F_0} — функция из условия OSL для отображения F_0 .

Тогда, согласно этой теореме, на $[0, 1]$ найдется решение $b(s)$ задачи (3.13), для которого на $[0, 1]$ выполняется

$$\|b(s) - z(s)\| \leq \int_0^s \exp(m_{G_0}(s) - m_{G_0}(\tau)) g(\tau) d\tau, \quad (3.16)$$

где

$$\begin{aligned}
m_{G_0}(s) &= \int_0^s L_{G_0}(\tau) d\tau = \int_0^s L_{F_0}\left(\frac{\tau}{\mu}\right) d\tau = \\
&= \mu \int_0^{s/\mu} L_{F_0}(\beta) d\beta \leq \mu \int_0^{1/\mu} L_{F_0}(\beta) d\beta \leq \mu \frac{1}{\mu} c = c \quad \forall s \in [0, 1].
\end{aligned}$$

Учитывая последнее неравенство, из (3.16) получаем

$$\begin{aligned}
\|b(s) - z(s)\| &\leq \int_0^s \exp(c) g(\tau) d\tau = \exp(c) \varepsilon \int_0^s \sigma_{F_0}(\tau/\mu) d\tau = \exp(c) \varepsilon \mu \times \\
&\times \int_0^{s/\mu} \sigma_{F_0}(\alpha) d\alpha \leq \exp(c) \varepsilon \mu \int_0^{1/\mu} \sigma_{F_0}(\alpha) d\alpha \leq \exp(c) \varepsilon \mu \frac{1}{\mu} c = \exp(c) c \varepsilon \quad \forall s \in [0, 1].
\end{aligned}$$

Следовательно, $\forall t \in [0, 1/\mu]$ выполняется

$$\|b(\mu t) - z(\mu t)\| \leq \exp(c) c \varepsilon.$$

Вспоминая, что $b(\mu t) = u_\mu(t)$ — решение на $[0, 1/\mu]$ задачи (1.2), а $z(\mu t) = a_\mu(t)$, получаем отсюда:

$$\|u_\mu(t) - a_\mu(t)\| \leq \exp(c)c\varepsilon \quad \forall t \in [0, 1/\mu]. \quad (3.17)$$

Таким образом, на $[0, 1/\mu]$ найдено решение $u_\mu(t)$ задачи (1.2), для которого выполняется оценка (3.17).

Оценим теперь норму $\|x_\mu(t) - u_\mu(t)\|$ в произвольной точке $t \in [0, 1/\mu]$. Обозначая через t_j ближайший слева к точке t узел сетки и учитывая (3.15) и (3.17), находим

$$\begin{aligned} \|x_\mu(t) - u_\mu(t)\| &\leq \|x_\mu(t) - x_j\| + \|x_j - a_\mu(t_j)\| + \|a_\mu(t_j) - a_\mu(t)\| + \|a_\mu(t) - u_\mu(t)\| \leq \\ &\leq \left\| x_0 + \mu \int_0^t v(s) ds - x_0 - \mu \int_0^{t_j} v(s) ds \right\| + \gamma(c+2) + \left\| x_0 + \mu \int_0^{t_j} v^2(s) ds - x_0 - \right. \\ &\quad \left. - \mu \int_0^t v^2(s) ds \right\| + \exp(c)c\varepsilon \leq \mu \int_{t_j}^t \|v(s)\| ds + \varepsilon + \mu \int_{t_j}^t \|v_j^2(s)\| ds + \exp(c)c\varepsilon \leq \\ &\leq \mu \int_{t_j}^{t_j+\Delta} \lambda_F(s) ds + \varepsilon + \mu \int_{t_j}^{t_j+\Delta} \lambda_{F_0}(s) ds + \exp(c)c\varepsilon \leq \\ &\leq \mu c\Delta + \varepsilon + \mu c\Delta + \exp(c)c\varepsilon = 2\frac{c}{N} + \varepsilon + \exp(c)c\varepsilon < \varepsilon(\exp(c)c + 3) \quad \forall t \in [0, 1/\mu]. \end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что задача (1.2) аппроксимирует сверху задачу (1.1).

Таким образом, задача (1.2) аппроксимирует задачу (1.1) как снизу, так и сверху. Это и означает, что задача (1.2) аппроксимирует задачу (1.1) взаимно. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки РФ для поддержки научно-исследовательской работы аспирантов государственных образовательных учреждений высшего профессионального образования, находящихся в ведении Федерального агентства по образованию №А04-2.8-1113.

Литература

- [1] Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение систем дифференциальных включений. М.: Изд-во МГУ, 1998. 160 с.
- [2] Плотников В.А., Плотников А.В., Витюк А.Н. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. Одесса: Астропринт, 1999. 356 с.
- [3] Красносельский М.А., Крейн С.Г. Нелокальные теоремы существования и теоремы единственности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1955. Т. 102. №1. С. 13–16.

- [4] Donchev T., Farkhi E. Stability and Euler approximation of one-sided Lipschitz differential inclusions. SIAM J. Control OPTIM. 1998. V. 36. No. 2. P. 780–796.
- [5] Deimling K. Multivalued differential equations. Berlin: De Gruyter, 1992. P. 260.
- [6] Соколовская Е.В. Об аппроксимации снизу дифференциальных включений с нелипшицевой правой частью // Вестник Самарского государственного университета. 2004. Специальный выпуск. С. 50–63.

Поступила в редакцию 8/X/2004;
в окончательном варианте — 8/X/2004.

**GENERALIZATION OF THE KRYLOV—BOGOLYUBOV
AVERAGING PRINCIPLE FOR DIFFERENTIAL
INCLUSIONS WITH NON-LIPSCHITZ RIGHT-HAND SIDE⁴**

© 2004 E.V. Sokolovskaya⁵

In the paper a theorem about reciprocal approximation of the systems of differential inclusions with one-sided Lipschitz right-hand side without rapid variables is proved. The range of problems for which the Krylov—Bogolybov principle of averaging can be applied to is then extended.

Paper received 8/X/2004.
Paper accepted 8/X/2004.

⁴Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. O.P. Filatov.

⁵Sokolovskaya Elena Valerievna (solena@ssu.samara.ru), Dept. of Partial Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russia.