

УДК 517.9

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ И ВКЛЮЧЕНИЙ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ¹

© 2004 Н.П. Балабаева²

Рассматривается вопрос об устойчивости системы дифференциальных неравенств и включений с быстрыми и медленными переменными. Доказана теорема об устойчивости на бесконечном промежутке.

1. Постановка задачи и определения

Рассмотрим систему дифференциальных неравенств и включений вида

$$\begin{cases} \dot{x} \leq \mu f(t, x, y, \mu), & x(t_0) = x_0, \\ \dot{y} \in G(t, y, \mu) + \mu R(t, x, y, \mu), & y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор из нормированного пространства $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|\cdot\|$; $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$; $f = (f_1, \dots, f_n)$ — векторнозначная функция, $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{B}^n(r_0) \times Q \times [0, \mu_*] \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $\mathbb{B}^n(r_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r_0\}$, $r_0 > 0$; Q — область из нормированного пространства $\mathbb{R}^m$ с нормой, которая обозначается так же, как и в пространстве $\mathbb{R}^n$; $G : \mathbb{R}_+ \times Q \times [0, \mu_*] \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$, где $Kv(\mathbb{R}^n)$ — множество всех непустых компактных выпуклых множеств из пространства $\mathbb{R}^n$; $R : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{B}^n(r_0) \times Q \times [0, \mu_*] \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$; μ — малый параметр, $0 \leq \mu \leq \mu_*$, $\mu_* > 0$.

Знак " $\leq$ " в (1.1) понимается в смысле покоординатной частичной упорядоченности векторов из $\mathbb{R}^n$.

Необходимость в рассмотрении задачи о качественном поведении решений системы дифференциальных неравенств возникает при исследовании на устойчивость систем дифференциальных уравнений или включений с использованием техники вектор-функций Ляпунова и теорем сравнения [1].

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором О.П. Филатовым.

²Балабаева Наталья Петровна (vao@samara.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

В [2] для дифференциальных неравенств с малым параметром μ установлена связь со свойствами решений системы дифференциальных уравнений, полученной методом усреднения, доказаны теоремы об устойчивости системы дифференциальных неравенств.

В настоящей работе рассматривается вопрос об устойчивости на бесконечном промежутке системы дифференциальных неравенств более общего вида, когда быстрые переменные определяются уже не дифференциальным уравнением, а удовлетворяют включению.

Предположим, что выполняются условия:

- а) отображение f измеримо по t ;
- б) функция f ограничена почти при всех t : $\|f\| \leq c$, c — постоянная;
- в) функция f удовлетворяет условию

$$\|f(t, x_1, y_1, \mu) - f(t, x_2, y_2, 0)\| \leq l\|x_1 - x_2\| + \sigma_1(\|y_1 - y_2\|) + \sigma_2(\mu),$$

где l — постоянная; $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{K}$ — класс непрерывных строго монотонных функций, определенных на $\mathbb{R}_+$ и равных 0 в точке 0;

г) отображение G ограничено почти при всех t , т.е. $|G(t, y, \mu)| = \sup\{\|g\| : g \in G(t, y, \mu)\} \leq c$, c — постоянная;

д) отображение G удовлетворяет условию Липшица по переменной y , т.е. $\alpha(G(t, y_1, \mu), G(t, y_2, \mu)) \leq l\|y_1 - y_2\|$ почти при всех t и $\forall y, \mu$, где $\alpha(A, B)$ — отклонение множества A от множества B , определяемое по формуле $\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\}$, где $\beta(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset [B]^\varepsilon\}$;

е) функция $G(t, y, \mu)$ равномерно непрерывна по μ в точке $\mu = 0$ почти $\forall t$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \mu_0 > 0$ такое, что при $0 \leq \mu \leq \mu_0$ и любом y почти всюду по t выполняется неравенство

$$\alpha(G(t, y, \mu), G(t, y, 0)) \leq \varepsilon;$$

ж) отображение $R : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{B}^n(r_0) \times Q \times [0, \mu_*] \rightarrow K\nu(\mathbb{R}^m)$ измеримо по t , ограничено почти при всех t и удовлетворяет условию Липшица по переменным x и y .

Под решением системы (1.1) с начальными условиями $x(t_0) = x_0 \geq 0$, $y(t_0) = y_0 \in Q$ понимается абсолютно непрерывная функция $w(t) = (x(t), y(t))$, $x(t) \geq 0$, удовлетворяющая системе (1.1) почти при всех $t \geq 0$ из промежутка определения $I(w)$, который допускается и конечным.

Пусть $\mathbb{B}_+^n(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \delta, x \geq 0\}$, $W(t_0, w_0, \mu)$ — совокупность всех решений системы (1.1) с начальными условиями $w(t_0) = w_0 = (x_0, y_0)$.

Определение. Систему (1.1) будем называть x, μ -устойчивой, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \mu_0 > 0 \exists \delta > 0$: для любых начальных условий $(t_0, w_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{B}_+^n(\delta) \times Q$, $\forall \mu \in (0, \mu_0]$, $\forall t \in I$, для любого решения системы (1.1) выполняется неравенство $\|x(t)\| < \varepsilon$. Если последнее неравенство выполняется только в промежутке $I \cap [0, \mu^{-1}]$, то систему (1.1) будем называть x, μ -устойчивой на асимптотически большом отрезке.

Системе (1.1) поставим в соответствие систему дифференциальных включений

$$\begin{cases} \dot{z} = \mu f(t, z, v, \mu), & z(t_0) = x_0; \\ \dot{v} \in G(t, v, \mu) + \mu R(t, z, v, \mu), & v(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

и усредним ее по схеме, изложенной в [3]. В результате получим систему дифференциальных включений

$$\dot{\xi} \in \mu F_0(t, \xi), \quad \xi(t_0) = \xi_0 = x_0. \quad (1.3)$$

При этом используется порождающее дифференциальное включение, полученное из (1.2) при $\mu = 0$:

$$\begin{cases} \dot{\bar{z}} = 0, & \bar{z}(t_0) = \bar{x}_0 \in \mathbb{B}^n(r_0); \\ \dot{\bar{v}} \in G(t, \bar{v}, 0), & \bar{v}(t_0) = \bar{y}_0 \in Q, \end{cases} \quad (1.4)$$

которое будем рассматривать с произвольными начальными условиями.

Множество всех решений задачи (1.4), определенных при $t \geq t_0$, обозначим $W_0(t_0, \bar{x}_0, \bar{y}_0)$.

Основным условием, которое нужно наложить на отображение F_0 , является соотношение

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \beta \left(\bigcup_{\bar{y}} \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} f(t, z(t), \bar{y}(t), 0) dt, \quad \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} F_0(t, x_0) dt \right) = 0, \quad (1.5)$$

которое выполняется равномерно по t_0, x_0, y_0 ; объединение проводится по всем решениям порождающей задачи (1.4).

Тогда, согласно [3, теорема 2.3.1], система (1.3) будет аппроксимировать сверху систему (1.2), т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \mu_0 > 0$ такое, что $\forall \mu \in (0, \mu_0]$, и для любого решения $z(t)$ задачи (1.2) существует решение $\xi(t)$ задачи (1.3) такое, что $\|z(t) - \xi(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, \mu^{-1}]$.

В работе [4] были доказаны лемма и теорема о x, μ -устойчивости системы (1.1) на асимптотически большом отрезке $T(t_0, \mu) = [t_0, t_0 + \mu^{-1}]$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $\mu \rightarrow 0$, которые для полноты изложения приводятся ниже.

Лемма 1. Система (1.1) x, μ -устойчива на асимптотически большом отрезке тогда и только тогда, когда система (1.2) z, μ -устойчива на асимптотически большом отрезке.

Теорема 1. Пусть выполняются условия а-ж и соотношение (1.5), и усредненная система (1.3) является ξ, μ -устойчивой на асимптотически большом отрезке. Тогда система (1.1) x, μ -устойчива на асимптотически большом отрезке.

Отметим, что в данной теореме не требуется, чтобы функция $f(t, x, y, \mu)$ удовлетворяла условию Важевского. Однако оказывается существенным то, что в системе (1.1) имеется слабая связь между медленными и быстрыми переменными, то есть функция G в системе (1.1) не зависит от переменной x .

Приведем пример, показывающий, что на системы с сильной связью быстрых и медленных переменных вида

$$\begin{cases} \dot{x} \leq \mu f(t, x, y, \mu), \\ \dot{y} \in G(t, x, y, \mu) \end{cases}$$

теорема 1 не обобщается.

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \leq \mu f_1(t, y, \mu), & x_1(0) = x_1^0 \in \mathbb{B}_+(\delta); \\ \dot{x}_2 \leq \mu f_2(t, \mu), & x_2(0) = x_2^0 \in \mathbb{B}_+(\delta); \\ \dot{y} = g(t, x, \mu), & y(0) = y^0 \in [-0.5, +\infty), \end{cases} \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(t, y, \mu) &= \begin{cases} 0, & \text{если } y \geq 0; \\ \mu e^{t-\frac{0.7}{\mu}} \left(10 - \frac{10}{y^2 + 1}\right), & \text{если } y < 0 \text{ и } t \leq \frac{0.7}{\mu}; \\ e^{\mu(t-\frac{0.7}{\mu})} \left(10 - \frac{10}{y^2 + 1}\right), & \text{если } y < 0 \text{ и } t > \frac{0.7}{\mu}; \end{cases} \\ f_2(t, \mu) &= \mu e^{-\mu t}; \\ g(t, x, \mu) &= \frac{x_2 + \mu(e^{-\mu t} - 1) + \mu^{1.05}}{x_2 + e^{-\mu t}}. \end{aligned}$$

Заменим знак " $\leq$ " в (1.6) на " $=$ " и получим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu f_1(t, y, \mu), & x_1(0) = x_1^0 \in \mathbb{B}_+(\delta), \\ \dot{x}_2 = \mu f_2(t, \mu), & x_2(0) = x_2^0 \in \mathbb{B}_+(\delta), \\ \dot{y} = g(t, x, \mu), & y(0) = y^0 \in [-0.5, +\infty). \end{cases} \quad (1.7)$$

Покажем, что система (1.7) x, μ -устойчива на асимптотически большом отрезке. Из (1.7) следует, что

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_2^0 - \mu(e^{-\mu t} - 1), \\ y(t) &= y^0 + \frac{x_2^0 + \mu^{1.05}}{\mu(x_2^0 + \mu)} \left[\mu t - \ln \left(\frac{x_2^0 + 1}{x_2^0 + \mu + (1 - \mu)e^{-\mu t}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Вид дифференциального уравнения для первой координаты $x_1(t)$ зависит от знака функции $y(t)$, причем $\dot{x}_1 > 0$ при $y(t) < 0$.

Функция $y(t)$ возрастает по x_2^0 и по y^0 . Пусть $x_2^0 = 0$ и $y^0 = -0.5$, тогда

$$y(t) = -0.5 + \mu^{-0.95} [\mu t + \ln(\mu + (1 - \mu)e^{-\mu t})].$$

Так как непрерывная функция $y(t)$ меняет свой знак на отрезке $[t_1, t_2]$, где $t_1 = 0.63/\mu$, $t_2 = 0.64/\mu$, то в некоторой точке $t_* \in [t_1, t_2]$ выполняется равенство $y(t_*) = 0$. Поэтому дифференциальное уравнение для первой координаты имеет вид

$$\dot{x}_1 = \begin{cases} \mu^2 e^{t-0.7\mu^{-1}} \left(10 - \frac{10}{(y(t))^2 + 1}\right), & \text{если } t \leq t_*; \\ 0, & \text{если } t > t_*. \end{cases}$$

На отрезке $[0, t_*]$ выполняется неравенство $|y(t)| \leq 0.5$, следовательно, $\dot{x}_1 \leq 2\mu^2 e^{t-0.7/\mu} \leq 2\mu^2$. Тогда

$$x_1(t) \leq x_1^0 + \int_0^{t_*} 2\mu^2 dt \leq x_1^0 + 2\mu^2 t_* \leq x_1^0 + 2\mu.$$

Покажем, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \mu_0 > 0, \exists \delta > 0 : \forall \mu \in [0, \mu_0], \forall x^0 \in \mathbb{B}_+^2(\delta)$ выполняется неравенство $\|x(t)\| < \varepsilon$ при $t \in [0, 1/\mu]$. Положим, например, $\delta = \varepsilon/2$ и $\mu_0 = \varepsilon/8$. Тогда $\forall \mu \in [0, \mu_0]$ и $\forall t \in [0, 1/\mu]$ будет выполнено неравенство

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{(x_1^0 + 2\mu)^2 + (x_2^0 + \mu(1 - e^{-\mu t}))^2} < \varepsilon.$$

Следовательно, система (1.7) x, μ -устойчива на асимптотически большом отрезке.

Рассмотрим теперь задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu f_1(t, y, \mu), & x_1^0 = 0, \\ \dot{x}_2 = 0, & x_2^0 = 0, \\ \dot{y} = g(t, x, \mu), & y^0 = -0.5, \end{cases} \quad (1.8)$$

решение которой является одновременно и решением исходной системы дифференциальных неравенств (1.6). Покажем, что система (1.8) x, μ -неустойчива.

Так как $x_2(t) = x_2^0 = 0$, то

$$\dot{y} = \mu - \mu(1 - \mu^{0.05})e^{\mu t}.$$

Тогда $y(t) = -0.5 + \mu t + (1 - \mu^{0.05})(1 - e^{-\mu t})$.

Поскольку $\dot{y} = 0$ при $t_* = -(1/\mu) \ln(1 - \mu^{0.05})$, то максимальное значение функции

$$y(t_*) = -\ln(1 - \mu^{0.05}) - 0.5 - \mu^{0.05}.$$

Для $\mu < 10^{-6}$ выполняется неравенство $\ln(1 - \mu^{0.05}) > -0.45$. Следовательно $y(t_*) < -0.05$. Тогда

$$x_1 = \begin{cases} \mu^2 e^{t-0.7\mu^{-1}} \left(10 - \frac{10}{(y(t))^2 + 1} \right), & \text{если } t \leq 0.7/\mu, \\ \mu e^{\mu t - 0.7} \left(10 - \frac{10}{(y(t))^2 + 1} \right), & \text{если } t > 0.7/\mu. \end{cases}$$

Так как $x_1 > 0$, то функция $x_1(t)$ возрастает на $[0, 1/\mu]$. Оценим $x_1(1/\mu)$. Для $\forall t \in (0.7/\mu, 1/\mu]$ справедливо неравенство $\dot{x}_1(t) \geq 0.02\mu e^{-0.7}$. Тогда

$$x_1(1/\mu) \geq x_1(0.7/\mu) + 0.02\mu e^{-0.7} \int_{0.7/\mu}^{1/\mu} dt \geq 0.006e^{-0.7}.$$

Это означает, что система (1.8) x, μ -неустойчива. Решение системы (1.8) является также решением системы (1.6), следовательно, система (1.6) x, μ -неустойчива.

2. Основной результат

Установим связь между устойчивостью системы (1.1) и устойчивостью системы (1.2) на бесконечном промежутке.

Если дополнительно к условиям теоремы 1 потребовать, чтобы точка $\xi = 0$ была μ -устойчивой или даже асимптотически μ -устойчивой для системы (1.3), то оценку $\|x(t)\| < \varepsilon$, как показывают простые примеры [2], вообще говоря, нельзя распространить на промежуток $I(x(\cdot), y(\cdot))$. В задаче устойчивости на бесконечном промежутке будем предполагать существование функции Ляпунова с определенными свойствами.

Прежде чем приступить к формулировке и доказательству основного результата, приведем лемму, которая является следствием из известной теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциального включения от исходных данных. Доказательство имеется, например, в [5, теорема 14.1].

Лемма 2. Пусть $x(t)$ — непрерывная функция, определенная на $[t_0, t_0 + \mu^{-1}]$. Тогда, каково бы ни было решение y дифференциального включения $\dot{y} \in G(t, y, \mu) + \mu R(t, x(t), y, \mu)$, найдется решение $\bar{y}$ дифференциального включения $\dot{\bar{y}} \in G(t, \bar{y}, 0)$, для которого выполняется неравенство $\|y(t) - \bar{y}(t)\| \leq \beta(t, \mu)$, где непрерывная функция $\beta(t, \mu) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\beta(t, 0) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$, строго возрастающая по t .

Введем обозначение для производной в силу системы (1.2)

$$\dot{u}(z) \Big|_{(1.2)} \equiv \mu \langle \nabla u(z), f \rangle.$$

Основным результатом работы является следующая теорема:

Теорема 2. Пусть выполняются условия а-ж и существует функция Ляпунова $u : \mathbb{B}_+^n(r_0) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $u \in C^1$, $\nabla u(z) \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{B}_+^n(r_0)$, $\|\nabla u\| \leq c_1$, $\chi_1(\|z\|) \leq u(z) \leq \chi_2(\|z\|)$, $\chi_1, \chi_2 \in \mathbb{K}$, производная в силу системы (1.2) допускает оценку $\dot{u}(z) \Big|_{(1.2)} \leq -\mu \chi_3(\|z\|)$, $\chi_3 \in \mathbb{K}$. Тогда система (1.1) x, μ -устойчива.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Возьмем произвольное $\mu_0 \in (0, \mu_*)$.

Пусть $x(t)$ — решение системы (1.1), тогда

$$\dot{x}(t) = \mu h(t, x(t), y(t), \mu),$$

где функция h допускает оценку

$$h(t, x(t), y(t), \mu) \leq f(t, x(t), y(t), \mu). \quad (2.1)$$

Выберем число u_0 из промежутка $0 < u_0 < \chi_1(\varepsilon)$ и число δ из промежутка $0 < \delta < \chi_2^{-1}(u_0)$.

Пусть $\delta \leq \|x(t)\| < \varepsilon$. Возьмем произвольное $0 < \mu \leq \mu_0$ и для $t \in [t_0, t_0 + \frac{1}{\mu_0}]$ оценим разность

$$u(x(t)) - u(x(t_0)) = \mu \int_{t_0}^t \langle \nabla u(x), h(t, x(t), y(t), \mu) \rangle dt. \quad (2.2)$$

Запишем (2.2) в виде

$$\begin{aligned}
u(x(t)) - u(x(t_0)) &= \mu \int_{t_0}^t \langle \nabla u(z), f(t, z(t), v(t), \mu) \rangle dt + \\
&+ \mu \int_{t_0}^t \langle \nabla u(x), h(t, x(t), y(t), \mu) - f(t, x(t), y(t), \mu) \rangle dt + \\
&+ \mu \int_{t_0}^t \langle \nabla u(x), f(t, x(t), y(t), \mu) - f(t, z(t), y(t), \mu) \rangle dt + \\
&+ \mu \int_{t_0}^t \langle \nabla u(x), f(t, z(t), y(t), \mu) - f(t, z(t), v(t), \mu) \rangle dt.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Для первого интеграла в правой части (2.3) справедлива оценка

$$J_1 \leq -\mu \chi_3(\delta)(t - t_0) \leq -\frac{\mu}{\mu_0} \chi_3(\delta).$$

Второй интеграл, согласно (2.1), неположителен: $J_2 \leq 0$.

Для третьего интеграла имеем

$$\|J_3\| \leq \mu \ell \int_{t_0}^t c_1 n \|x(t) - z(t)\| dt.$$

Оценим норму разности

$$\begin{aligned}
\|x(t) - z(t)\| &\leq \left\| \mu \int_{t_0}^t [f(t, x(t), y(t), \mu) - \right. \\
&\quad \left. - f(t, z(t), v(t), \mu)] dt \right\| \leq \|M_1\| + \|M_2\|,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где

$$\begin{aligned}
M_1 &= \mu \int_{t_0}^t [f(t, x(t), y(t), \mu) - f(t, z(t), y(t), \mu)] dt, \\
M_2 &= \mu \int_{t_0}^t [f(t, z(t), y(t), \mu) - f(t, z(t), v(t), \mu)] dt.
\end{aligned}$$

Для интеграла M_1 имеем оценку

$$\|M_1\| \leq \mu \ell \int_{t_0}^t \|x(t) - z(t)\| dt. \tag{2.5}$$

Положим $t_i = t_0 + i\Delta$, $i = 0, 1, \dots$, где число Δ выбирается в зависимости от значения малого параметра μ и числа $\chi = \sigma_1^{-1}(\epsilon_1)$.

Пусть $\Delta_1(\mu, \chi)$ — решение уравнения $\beta(\Delta, \mu) = \chi$. Тогда шаг сетки $\{t_i\}$ определим равенством $\Delta = \Delta(\mu, \chi_0) = \min \{\mu^{1/2}, \Delta_1(\mu, \chi)\}$.

Пусть q — номер ближайшего к $t \in I$ узла $t_q \leq t$; $z(t_i) = z_i$; $y(t_i) = y_i$; $v(t_i) = v_i$; $\bar{y}(t_i) = \bar{y}_i$, где $\bar{y}(t)$ — решение порождающей задачи.

Второй интеграл M_2 в правой части (2.4) представим в виде $M_2 = M_{21} + M_{22} + M_{23}$, где

$$\begin{aligned} M_{21} &= \mu \sum_{i=0}^{q-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [f(t, z_i, y_i, \mu) - f(t, z_i, \bar{y}_i, 0)] dt; \\ M_{22} &= \mu \sum_{i=0}^{q-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [f(t, z_i, \bar{y}_i, 0) - f(t, z_i, v_i, \mu)] dt; \\ M_{23} &= \mu \int_{t_q}^t [f(t, z(t), y(t), \mu) - f(t, z(t), v(t), \mu)] dt. \end{aligned}$$

Тогда из свойств функции f и леммы 2 следуют оценки

$$\begin{aligned} \|M_{21}\| &\leq \mu (\sigma_1(\chi) + \sigma_2(\mu)) \frac{1}{\mu_0} \leq \varepsilon_1 + \sigma_2(\mu); \\ \|M_{22}\| &\leq \mu (\sigma_1(\chi) + \sigma_2(\mu)) \frac{1}{\mu_0} \leq \varepsilon_1 + \sigma_2(\mu); \\ \|M_{23}\| &\leq 2\mu c\Delta. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|M_2\| \leq 2P, \quad (2.6)$$

где $P = \mu c\Delta + \varepsilon_1 + \sigma_2(\mu)$.

Из (2.4)–(2.6) следует

$$\|x(t) - z(t)\| \leq \mu \ell \int_{t_0}^t \|x(t) - z(t)\| dt + 2P,$$

откуда по лемме Гронуолла получим

$$\|x(t) - z(t)\| \leq 2Pe^{\mu \ell (t-t_0)} \leq 2Pe^\ell.$$

Тогда

$$\|J_3\| \leq 2\mu \ell c_1 n P e^\ell (t - t_0) \leq 2\mu \ell c_1 n P e^\ell \frac{1}{\mu_0}.$$

Четвертый интеграл в (2.3) представим в виде $J_4 = J_{41} + J_{42} + J_{43}$, где на введенной сетке имеем равенства

$$\begin{aligned}
J_{41} &= \mu \sum_{i=0}^{q-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle \nabla u(z), f(t, z_i, y_i, \mu) - f(t, z_i, \bar{y}_i, 0) \rangle dt, \\
J_{42} &= \mu \sum_{i=0}^{q-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle \nabla u(z), f(t, z_i, \bar{y}_i, 0) - f(t, z_i, v_i, \mu) \rangle dt, \\
J_{43} &= \mu \int_{t_q}^t \langle \nabla u(z), f(t, z(t), y(t), \mu) - f(t, z(t), v(t), \mu) \rangle dt.
\end{aligned}$$

Тогда из условий теоремы, свойств функции f и леммы 2 следуют оценки

$$\begin{aligned}
\|J_{41}\| &\leq \mu c_1 n (\sigma_1(\chi) + \sigma_2(\mu)) \frac{1}{\mu_0}, \\
\|J_{42}\| &\leq \mu c_1 n (\sigma_1(\chi) + \sigma_2(\mu)) \frac{1}{\mu_0}, \\
\|J_{43}\| &\leq 2c_1 n \mu c \Delta.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\|J_4\| \leq 2\mu c_1 n \left(c\Delta + (\varepsilon_1 + \sigma_2(\mu)) \frac{1}{\mu_0} \right)$.

Тогда

$$\begin{aligned}
J &= J_1 + J_2 + J_3 + J_4 < -\mu \chi_3(\delta) \frac{1}{\mu_0} + 2\mu \ell c_1 n P e^\ell \frac{1}{\mu_0} + \\
&+ 2\mu c_1 n P_0 \frac{1}{\mu_0} = \frac{\mu}{\mu_0} \left(2\ell c_1 n P e^\ell + 2c_1 n P_0 - \chi_3(\delta) \right),
\end{aligned}$$

где $P_0 = \mu_0 c \Delta + \varepsilon_1 + \sigma_2(\mu)$.

Пусть ε_1 и μ_1 таковы, что $\forall \mu < \min\{\mu_0, \mu_1\}$ выполняются неравенства

$$2\ell c_1 n P e^\ell + 2c_1 n P_0 < \chi_3(\delta),$$

$$P \leq \frac{\chi_1(\varepsilon) - u_0}{2c_1 n (1 + \ell e^\ell)}.$$

Тогда на $[t_0, t_0 + 1/\mu_0]$ при априорной оценке $\delta \leq \|x(t)\| < \varepsilon$ справедливо соотношение

$$u\left(x\left(t_0 + \frac{1}{\mu_0}\right)\right) - u(x(t_0)) \leq 0. \quad (2.7)$$

Если в начальный момент времени $t = t_0$ справедливо неравенство $\|x(t_0)\| < \delta$, то

$$u(x_0) \leq \chi_2(\delta) < u_0.$$

Предположим, что в некоторый момент времени t_* решение пересекает сферу радиуса ε , то есть $\|x(t_*)\| = \varepsilon$.

Рассмотрим отрезок $[t_1, t_2]$, где

$$\begin{aligned}
t_1 &= \sup \{t : u(t) = u_0, \quad t \in [t_0, t_*]\}, \\
t_2 &= \inf \{t : \|x(t)\| = \varepsilon, \quad t \in [t_1, t_*]\}.
\end{aligned}$$

На отрезке $[t_1, t_2]$ будет выполняться неравенство $\delta \leq \|x(t)\| \leq \varepsilon$, причем

$$u(x(t_2)) \geq \chi_1(\varepsilon). \quad (2.8)$$

Если $t_2 - t_1 > 1/\mu_0$, то к отрезку $[t_1, t_1 + 1/\mu_0]$ применима оценка (2.7), где нужно положить $t_0 = t_1$. В результате получим, что $u(x(t_1 + \frac{1}{\mu_0})) < u(x(t_1))$. Это противоречит определению числа t_1 .

Если же $t_2 - t_1 < 1/\mu_0$, то

$$\begin{aligned} u(x(t_2)) - u(x(t_1)) &< 2\mu c_1 \ell n P e^\ell (t_2 - t_1) + \\ &+ 2c_1 n (\mu c \Delta + \mu(\varepsilon_1 + \sigma_2(\mu))(t_2 - t_1)) - \mu \chi_3(\delta)(t_2 - t_1) \leq \\ &\leq 2c_1 n P (1 + \ell e^\ell) \leq \chi_1(\varepsilon) - u_0, \end{aligned}$$

что эквивалентно $u(x(t_2)) < \chi_1(\varepsilon)$ и противоречит (2.8).

Следовательно, $\forall t \in I(x(\cdot), y(\cdot))$ выполняется неравенство $\|x(t)\| < \varepsilon$.

Теорема доказана.

Приведем пример, иллюстрирующий применение доказанной теоремы.

Пример. Рассмотрим систему дифференциальных неравенств и включений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \leq -\mu \left(x_1 - \frac{x_2}{1+y^2} + x_1 x_2^2 |\sin x_2| \right), & x_1(0) = x_1^0 \in \mathbb{B}_+(\delta); \\ \dot{x}_2 \leq -\mu \left(x_2 + \frac{x_1}{1+y^2} \right), & x_2(0) = x_2^0 \in \mathbb{B}_+(\delta); \\ \dot{y} \in [-1, 1], & y(0) = y^0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.9)$$

Заменив знак " $\leq$ " на "=", получим систему дифференциальных включений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\mu \left(x_1 - \frac{x_2}{1+y^2} + x_1 x_2^2 |\sin x_2| \right), & x_1(0) = x_1^0, \\ \dot{x}_2 = -\mu \left(x_2 + \frac{x_1}{1+y^2} \right), & x_2(0) = x_2^0, \\ \dot{y} \in [-1, 1], & y(0) = y^0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Для системы (2.10) существует функция Ляпунова $u(x) = x_1^2 + x_2^2$, производная которой в силу этой системы вычисляется в виде

$$\begin{aligned} \dot{u}(x) &= -2x_1 \mu \left(x_1 - \frac{x_2}{1+y^2} + x_1 x_2^2 |\sin x_2| \right) - 2x_2 \mu \left(x_2 + \frac{x_1}{1+y^2} \right) = \\ &= -2\mu(x_1^2 + x_2^2) - 2\mu x_1^2 x_2^2 |\sin x_2| \leq -\mu \chi(\|x\|), \end{aligned}$$

где $\chi(\|x\|) = 2\|x\|^2$.

Все остальные условия теоремы 2 также выполняются. Следовательно, система (2.9) x, μ -устойчива.

Литература

- [1] Матросов В.М. К теории устойчивости движения // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26. Вып. 6. С. 992–1002.
- [2] Филатов О.П. О дифференциальных неравенствах в теории устойчивости // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. Вып. 12. С. 2077–2084.
- [3] Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение систем дифференциальных включений. М.: Изд-во МГУ, 1998. 160 с.
- [4] Балабаева Н.П. Устойчивость систем дифференциальных неравенств и включений // Научные труды ежегодной межвузовской 55-й научной конференции СГПУ. Самара: СГПУ, 2002. С. 7–13.
- [5] Филатов О.П. Лекции по многозначному анализу и дифференциальным включениям. Самара: Изд-во "Самарский университет", 2000. 116 с.

Поступила в редакцию 25/XI/2004;
в окончательном варианте — 25/XI/2004.

STABILITY OF SYSTEMS OF DIFFERENTIAL INEQUALITIES AND INCLUSIONS WITHIN AN INFINITE INTERVAL³

© 2004 N.P. Balabayeva⁴

In the paper the problem of stability of a system of differential inequalities and inclusions with slow and rapid variables is considered. A stability theorem within an infinite interval is proved.

Paper received 25/XI/2004.

Paper accepted 25/XI/2004.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. O.P. Filatov.

⁴Balabaeva Nataliya Petrovna (vao@samara.ru), Dept. of Partial Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russia.