

РАВНОМЕРНАЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© 2004 О.П. Филатов¹

Приводится критерий равномерной экспоненциальной устойчивости дифференциальных включений с медленными переменными на основании дифференциального включения сравнения. В частности, дифференциальное включение сравнения может быть получено методом частичного усреднения исходной задачи. Это приводит к достаточным условиям равномерной экспоненциальной устойчивости данного дифференциального включения.

1. Постановка задачи и определения

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения

$$\dot{x} \in \mu F(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где $t \geq t_0$, $x \in \mathbb{R}^m$, $\mu > 0$ — малый параметр. Начальное время $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Множество допустимых скоростей $\mu F(t, x)$ берется из пространства $\mathbb{R}^m$ с нормой $\|\cdot\|$.

Под решением дифференциального включения (1) понимается функция $x_\mu(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, которая абсолютно непрерывна на любом отрезке из промежутка $[t_0, \infty)$ и почти всюду удовлетворяет соответствующему включению.

Будем предполагать, что $0 \in \mathbb{R}^m$ является неподвижной точкой отображения F , поэтому дифференциальное включение (1) имеет тривиальное решение.

Положение равновесия $0 \in \mathbb{R}^m$ дифференциального включения (1) будем называть равномерно экспоненциально устойчивым, если для некоторых постоянных $A > 0, \alpha > 0, \mu_x > 0$ и произвольных начальных данных $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$ любое решение $x_\mu(t)$ задачи (1) удовлетворяет неравенству

$$\|x_\mu(t)\| \leq A e^{-\mu \alpha (t-t_0)} \|x_0\| \quad \forall (t, \mu) \in [t_0, \infty) \times (0, \mu_x].$$

Известно, что для обыкновенных дифференциальных уравнений необходимые и достаточные условия равномерной экспоненциальной устойчивости

¹Филатов Олег Павлович (filt@ssu.samara.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

тривиального решения можно сформулировать в терминах существования функции Ляпунова с некоторыми свойствами [1].

Другой подход основан на том, что исходной задаче сопоставляется некоторая вспомогательная, для которой свойство равномерной экспоненциальной устойчивости тривиального решения установлено. Если, кроме того, доказана определенная связь между решениями данной и вспомогательной задач, то делается вывод о равномерной экспоненциальной устойчивости исходной системы [1].

Вспомогательную задачу будем называть системой сравнения, в качестве которой возьмем дифференциальное включение того же вида, что и исходная задача,

$$\dot{y} \in \mu G(t, y), \quad y(t_0) = x_0, \quad (2)$$

где $y \in \mathbb{R}^m$, $0 \in G(t, 0)$ для любого $t \geq 0$.

Тривиальное решение дифференциального включения (2) предполагается равномерно экспоненциально устойчивым с соответствующими постоянными $B > 0, \beta > 0, \mu_y > 0$.

Таким образом, для любых начальных данных $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$ и любого решения задачи (2) справедлива оценка

$$\|y_\mu(t)\| \leq B e^{-\mu\beta(t-t_0)} \|x_0\| \quad \forall (t, \mu) \in [t_0, \infty) \times (0, \mu_y]. \quad (3)$$

В данной статье приводится простой критерий (теорема 1), которому должна подчиняться система сравнения в задаче исследования на равномерную экспоненциальную устойчивость дифференциального включения (1).

В частности, на основании теоремы о частичном усреднении делается вывод, что свойство равномерной экспоненциальной устойчивости усредненной задачи может быть перенесено на данное дифференциальное включение (1) (теорема 2) при выполнении условия b (см. п. 2).

Отметим, что условие b , связывающее правые части данного дифференциального включения и системы сравнения, по существу является основным условием в задаче аппроксимации сверху [4–6] преобразованной задачи (1), которая рассматривается в новых переменных $\xi = \|x_0\|^{-1}x$, где $x_0 \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^m$.

Аппроксимирующая система получается из системы сравнения (2) аналогичной заменой переменных $\eta = \|x_0\|^{-1}y$, где $y \in \mathbb{R}^m$ (см. п. 3).

На основании априорных оценок указанные замены переменных позволяют сразу применить теоремы усреднения [4–6] для проверки условия a в теореме 1.

Заметим, что настоящая работа стимулирована исследованиями [2].

2. Условия и обозначения

При формулировке критерия равномерной экспоненциальной устойчивости задачи (1) мы не будем детализировать свойства соответствующих правых частей дифференциальных включений. Потребуем только, чтобы для

некоторой неубывающей функции $\Gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ гарантировалась априорная оценка для любого решения задачи Коши (1) вида

$$\|x_\mu(t)\| \leq \|x_0\| \Gamma(T) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T\mu^{-1}] \quad (4)$$

для произвольных начальных данных $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$.

Например, если выполняется оценка линейного роста

$$\sup_{f \in F(t, x)} \{\|f\|\} \leq l\|x\|$$

для отображения F с некоторой постоянной $l > 0$, то на основании известной леммы Гронсуолла можно принять $\Gamma(T) = \exp(lT)$.

Кроме того, потребуется естественная связь решений задач (1) и (2) на асимптотически большом отрезке $[t_0, t_0 + T/\mu]$ при $\mu \rightarrow 0$, где постоянная $T > 0$ выбирается так, чтобы выполнялось неравенство

$$q_y < 1, \quad q_y = Be^{-\beta T}. \quad (5)$$

Здесь постоянные B и β — из условия (3) равномерной экспоненциальной устойчивости дифференциального включения сравнения относительно полунормы p . Указанная связь сводится к следующему условию:

a) для некоторых постоянных T и q_y , удовлетворяющих соотношениям (5), существуют постоянные $q_{xy} \in [0, 1)$, $\mu_{xy} > 0$ такие, что $q_y + q_{xy} < 1$ и для любых начальных условий $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$ и любого решения $x_\mu(t)$ задачи (1) найдется такое решение дифференциального включения сравнения $y_\mu(t)$, для которого

$$\|x_\mu(t_0 + T/\mu) - y_\mu(t_0 + T/\mu)\| \leq \|x_0\| q_{xy} \quad \forall \mu \in (0, \mu_{xy}]. \quad (6)$$

Условия (4) и *a* используются в общем критерии равномерной экспоненциальной устойчивости (теорема 1).

Для формулировки достаточных условий равномерной экспоненциальной устойчивости (теорема 2) потребуются следующие обозначения и условия.

Пусть $Kv(\mathbb{R}^m)$ — совокупность непустых компактных и выпуклых множеств из пространства $\mathbb{R}^m$; $D = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$; $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - x_0\| < r\}$ — шар с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^m$ радиуса $r > 0$.

Для ограниченных множеств $A, C \subset \mathbb{R}^m$ полуотклонение первого множества от второго обозначим

$$h_0(A, C) = \inf_{r>0} \{A \subset C + B(0, r)\},$$

где $C + B = \{c + b : c \in C, b \in B\}$ — алгебраическая сумма множеств C и B . Отклонение по Хаусдорфу множеств A и C обозначается как

$$h(A, C) = \max\{h_0(A, C), h_0(C, A)\}.$$

Множество всех отображений

$$F : D \rightarrow Kv(\mathbb{R}^m), \quad (t, x) \rightarrow F(t, x)$$

отнесем к классу $Ex(D)$, если:

- 1) отображение $F(t, x)$ является измеримым по t для любого $x \in \mathbb{R}^m$;
- 2) отображение $F(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица по $x \in \mathbb{R}^m$ с общей постоянной $l = l(F)$, то есть для любых $(t, x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ выполняется неравенство

$$h(F(t, x), F(t, y)) \leq l\|x - y\|;$$

- 3) для любого $t \in \mathbb{R}_+$ справедливо равенство $F(t, 0) = \{0\}$.

Введем теперь отображения

$$F_{x_0}(t, \xi) = \frac{1}{\|x_0\|} F(t, \|x_0\|\xi), \quad G_{x_0}(t, \eta) = \frac{1}{\|x_0\|} G(t, \|x_0\|\eta), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^m,$$

где начальный вектор $x_0 \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, и сформулируем следующее основное достаточное условие:

- b) для отображений F_{x_0} и G_{x_0} выполняется предельное соотношение

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} h_0 \left(\frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} F_{x_0}(t, \xi) dt, \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} G_{x_0}(t, \xi) dt \right) = 0$$

равномерно по всем $x_0 \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, $\xi \in B(0, r)$ и любом фиксированном $r > 0$.

3. Теоремы

Следующее утверждение является критерием равномерной экспоненциальной устойчивости дифференциального включения (1), для которого выполняется априорная оценка (4).

Заметим, что в условиях теоремы не указываются свойства правых частей дифференциальных включений (1) и (2), которые гарантировали бы существование решений этих задач. Поэтому делается соответствующее предположение о существовании решений исходной задачи и системы сравнения в бесконечном промежутке $[t_0, \infty)$.

Теорема 1. Пусть существуют решения задач (1), (2) при этом для любого решения задачи (1) имеет место неравенство (4). Дифференциальное включение сравнения (2) является равномерно экспоненциально устойчивым с соответствующей оценкой (3). Тогда для равномерной экспоненциальной устойчивости дифференциального включения (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие a .

Доказательство. Необходимость условия a очевидна. С другой стороны, если выполняется условие a , то по индукции нетрудно получить оценку

$$\|x_\mu(t_n)\| \leq \|x_0\|(q_y + q_{xy})^n, \quad \mu \in (0, \mu_0], \quad (7)$$

для любого решения задачи (1), где

$$t_n = t_0 + nT/\mu, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \mu \in (0, \mu_0], \quad \mu_0 = \min\{\mu_y, \mu_{xy}\}.$$

Обозначим $\gamma = -\ln(q_y + q_{xy})/T$. Тогда для любого $t \in [t_n, t_{n+1}]$ на основании (4), (7) получим

$$\|x_\mu(t)\| \leq \|x_0\| e^{-\mu\gamma(t-t_0)} \Gamma(T) = \|x_0\| e^{-\mu\gamma(t-t_0)} e^{\mu\gamma(t-t_n)} \Gamma(T) = C \|x_0\| e^{-\mu\gamma(t-t_0)},$$

где $C = e^{\gamma T} \Gamma(T)$. Теорема доказана.

Основное условие a из теоремы 1, поскольку оно является необходимым и достаточным, указывает минимальные требования к дифференциальному включению сравнения, чтобы устанавливать равномерную экспоненциальную устойчивость тривиального решения исходного дифференциального включения.

Заметим, что условие a должно выполняться на асимптотически большом отрезке, на котором обычно сравниваются решения исходной задачи Коши и усредненной [3–6], поэтому можно ожидать, что в некоторых случаях роль дифференциального включения сравнения будет играть усредненное (в общем случае частично) дифференциальное включение.

Действительно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть отображения F и G принадлежат классу $Ex(D)$ и выполняется условие b . Тогда из равномерной экспоненциальной устойчивости дифференциального включения сравнения (2) следует равномерная экспоненциальная устойчивость дифференциального включения (1).

Доказательство. Выберем произвольную постоянную $T > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство (5). Тогда определена постоянная $q_y = B \times \exp(-\beta T) < 1$, где B и β определяются из условия равномерной экспоненциальной устойчивости дифференциального включения сравнения (2).

Проверим теперь, что для некоторых постоянных $q_{xy} \in (0, 1)$ и $\mu_{xy} > 0$ выполняется условие a . Для этого зафиксируем произвольный начальный вектор $x_0 \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ и рассмотрим две вспомогательные задачи

$$\dot{\xi} \in \mu F_{x_0}(t, \xi), \quad \xi(t_0) = \|x_0\|^{-1} x_0, \quad (8)$$

$$\dot{\eta} \in \mu G_{x_0}(t, \eta), \quad \eta(t_0) = \|x_0\|^{-1} x_0, \quad (9)$$

где $\xi, \eta \in \mathbb{R}^m$.

Заметим, что задачи (8), (9) получаются из задач (1), (2) заменой переменных $x = \|x_0\| \xi$, $y = \|x_0\| \eta$.

Легко проверить, что отображения $F_{x_0}(t, \xi)$ и $G_{x_0}(t, \eta)$ удовлетворяют условию Липшица по соответствующим переменным $\xi, \eta \in \mathbb{R}^m$ с постоянными $l_1 = l(F)$ и $l_2 = l(G)$. Кроме того, выполняется оценка (4) для любого решения задачи (1) с постоянной $\Gamma(T) = \exp(Tl_1)$, что следует из условий 2, 3 и леммы Гронуолла.

Следовательно, для любого решения $\xi_\mu(t)$ задачи (8) справедливо неравенство

$$\|\xi_\mu(t)\| \leq \|x_0\|^{-1} \|x_\mu(t)\| \leq \exp(Tl_1), \quad t \in [t_0, t_0 + T/\mu].$$

Поэтому

$$h(F_{x_0}(t, \xi_\mu(t)), F_{x_0}(t, 0)) \leq l_1 \|\xi_\mu(t)\| \leq r_1, \quad r_1 = l_1 \exp(Tl_1).$$

Следовательно,

$$F_{x_0}(t, \xi_\mu(t)) \subset B(0, r_1)$$

для любого решения $\xi_\mu(t)$ задачи (8), рассматриваемого на отрезке $t \in [t_0, t_0 + T/\mu]$.

Для отображения G_{x_0} по тем же соображениям получим

$$G_{x_0}(t, \eta_\mu(t)) \subset B(0, r_2)$$

для любого решения $\eta_\mu(t)$ задачи (9) на отрезке $t \in [t_0, t_0 + T/\mu]$, где $r_2 = l_2 \exp(Tl_2)$.

По теореме об аппроксимации сверху [5–6] (в этих работах рассматривается более общий случай систем дифференциальных включений с медленными и быстрыми переменными) делаем вывод о том, что задача (9) аппроксимирует сверху задачу (8). Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\mu_{xy} > 0$ такое, что для любого решения $\xi_\mu(t)$ задачи (8) найдется решение $\eta_\mu(t)$ задачи (9), для которого выполняется неравенство

$$\|\xi_\mu(t) - \eta_\mu(t)\| \leq \varepsilon, \quad \mu \in (0, \mu_{xy}], \quad t \in [t_0, t_0 + T/\mu]. \quad (10)$$

Возвращаясь к переменным $x = \|x_0\|\xi$ и $y = \|x_0\|\eta$, из (10) получим, что для любого решения $x_\mu(t)$ задачи (1) найдется решение $y_\mu(t)$ задачи (2) с оценкой

$$\|x_\mu(t) - y_\mu(t)\| \leq \varepsilon \|x_0\|, \quad \mu \in (0, \mu_{xy}], \quad t \in [t_0, t_0 + T/\mu]. \quad (11)$$

Обозначим $q_{xy} = \varepsilon$ и выберем число $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $q_y + q_{xy} < 1$. Отсюда и (11) следует выполнение условия a в теореме 1. Следовательно, по этой же теореме делаем вывод о равномерной экспоненциальной устойчивости дифференциального включения (1). Теорема доказана.

В качестве примера рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных включений

$$\dot{x}_1 \in -\mu x_1[c_1, c_2] + \mu f(t)|x_2|, \quad x_1(t_0) = x_{1,0},$$

$$\dot{x}_2 \in \mu g(t)|x_1| - \mu x_2[c_1, c_2], \quad x_2(t_0) = x_{2,0},$$

где $f(t), g(t)$ — измеримые функции, определенные при $t \geq 0$; c_1, c_2 — положительные постоянные, $c_1 \leq c_2$.

Что касается функций $f(t)$ и $g(t)$, то потребуем, чтобы они были ограниченными и имели нулевые средние значения

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} f(t) dt = 0, \quad \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} g(t) dt = 0$$

равномерно по $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Например, $f(t) = \sin(t)$, $g(t) = 1/(t+1)$.

В данном случае дифференциальное включение сравнения удобно взять в виде

$$\dot{y}_1 \in -\mu y_1[c_1, c_2], \quad y_1(t_0) = x_{1,0},$$

$$\dot{y}_2 = -\mu y_2[c_1, c_2], \quad y_2(t_0) = x_{2,0}.$$

Положение равновесия $y_1 = 0, y_2 = 0$ этой системы равномерно экспоненциально устойчиво с постоянными $B = \sqrt{2}$, $\beta = c_1$ в неравенстве (3) для евклидовой нормы.

Поскольку средние значения функций f и g равны 0, то выполняется основное условие b из теоремы 2. Общие условия выполнены также. По теореме 2 положение равновесия $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ исходного дифференциального включения будет равномерно экспоненциально устойчивым при достаточно малом значении параметра $\mu > 0$.

Литература

- [1] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Наука, 1959. 212 с.
- [2] Grammel G., Maizurna I. A sufficient condition for the uniform exponential stability of time-varying systems with noise // Nonlinear Analysis. 2003. V. 56. P. 951–960.
- [3] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
- [4] Плотников В.А., Плотников А.В., Витюк А.Н. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. Одесса: Астропринт, 1999. 356 с.
- [5] Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение систем дифференциальных включений. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1998. 160 с.
- [6] Филатов О.П. Доказательство теорем усреднения для дифференциальных включений // Вестник Самарского государственного университета. 2001. №2(20). С. 20–33.

Поступила в редакцию 10/XII/2004;
в окончательном варианте — 10/XII/2004.

UNIFORM EXPONENTIAL STABILITY OF DIFFERENTIAL INCLUSIONS

© 2004 O.P. Filatov²

A criterion of the uniform exponential stability of differential inclusions with slow variables based on a comparative differential inclusion is given. The comparative differential inclusion may be obtained by partial averaging the initial problem. Sufficient conditions for the uniform exponential stability of a given differential inclusion are obtained.

Paper received 10/*XII*/2004.

Paper accepted 10/*XII*/2004.

²Filatov Oleg Pavlovich (filt@ssu.samara.ru), Dept. of Partial Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russia.