

ГРАДУИРОВАННЫЕ ТОЖДЕСТВА ПРОСТОЙ ТРЕХМЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

© 2004 Д.В. Репин¹

Пусть K — поле нулевой характеристики и sl_2 — алгебра Ли матриц второго порядка со следом 0 над полем K . Хорошо известны 3 классические нетривиальные градуировки на sl_2 : $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ и $\mathbf{Z}_3$ -градуировки. В случае этих градуировок описано строение векторного пространства полилинейных градуированных тождеств на языке теории представления симметрической группы и диаграмм Юнга.

Введение

Характеристика основного поля K предполагается равной нулю. В левых элементах договоримся опускать скобки при их левонормированной расстановке, то есть $abc = ((ab)c)$. Введем необходимые понятия и обозначения.

Пусть G — конечная группа. Алгебра A называется G -градуированной, если она раскладывается в прямую сумму своих подпространств, индексированных элементами группы G , и при этом выполнено условие $A_g A_h \subset A_{gh}$. Подпространства A_g называются однородными компонентами A .

Для каждого $g \in G$ рассмотрим счетное множество

$$X_g = \{x_1^{(g)}, x_2^{(g)}, \dots\}$$

и обозначим через X объединение всех X_g . Тогда свободная алгебра Ли $F(X)$ над полем K , порожденная множеством X , обладает естественной G -градуировкой. Пронумеруем элементы группы G : $e = g_1, g_2, \dots, g_s$. Полином

$$f = f(x_1^{(g_1)}, \dots, x_{t_1}^{(g_1)}, x_1^{(g_2)}, \dots, x_{t_2}^{(g_2)}, x_1^{(g_s)}, \dots, x_{t_s}^{(g_s)}) \in F(X)$$

является градуированным тождеством алгебры Ли $L = \bigoplus_{g \in G} L_g$, если $f(a_1^{(g_1)}, \dots, a_{t_1}^{(g_1)}, a_1^{(g_2)}, \dots, a_{t_2}^{(g_2)}, a_1^{(g_s)}, \dots, a_{t_s}^{(g_s)}) = 0$ для любых $a_1^{(g_i)}, \dots, a_{t_i}^{(g_i)} \in L_{g_i}$.

Рассмотрим алгебру $L = sl_2$ — алгебру Ли матриц второго порядка со следом 0 над полем K . Обозначим $h = e_{11} - e_{22}$, $e = e_{12}$, $f = e_{21}$. Хорошо известны 4 классические градуировки на sl_2 :

¹Репин Дмитрий Владимирович (re80@mail.ru), кафедра алгебро-геометрических вычислений Ульяновского государственного университета, 432700, Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42.

1. Тривиальная градуировка. $L = L_0$.
2. $\mathbf{Z}_2$ -градуировка. $L = L_0 \oplus L_1$, где $L_0 = \langle h \rangle$, $L_1 = \langle e, f \rangle$.
3. $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ -градуировка. $L = L_{00} \oplus L_{10} \oplus L_{01} \oplus L_{11}$, где

$$L_{00} = \langle 0 \rangle, \quad L_{10} = \langle h \rangle, \quad L_{01} = \langle e + f \rangle, \quad L_{11} = \langle e - f \rangle.$$

4. $\mathbf{Z}_3$ -градуировка. $L = L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1$, где

$$L_{-1} = \langle e \rangle, \quad L_0 = \langle h \rangle, \quad L_1 = \langle f \rangle.$$

Обозначим через V_0 , $V_0^{\mathbf{Z}_2}$, $V_0^{\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2}$, $V_0^{\mathbf{Z}_3}$ многообразия, порожденные алгеброй L с соответствующими градуировками. Известно, что в случае поля нулевой характеристики многообразие задается своими полилинейными тождествами. В статье [1] В.С. Дренски описал строение относительно свободных алгебр многообразия V_0 , порожденного алгеброй sl_2 с тривиальной градуировкой. В данной работе будет описано строение полилинейных частей относительно свободных алгебр многообразий, порожденных алгеброй sl_2 с $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ и $\mathbf{Z}_3$ -градуировками.

1. Тождества $\mathbf{Z}_2$ -градуированной алгебры sl_2

Пусть $X = Y \cup Z$ — счетное множество переменных, разбитых на два непересекающихся подмножества. Рассмотрим $F(X, V_0^{\mathbf{Z}_2})$ — относительно свободную $\mathbf{Z}_2$ -градуированную алгебру многообразия $V_0^{\mathbf{Z}_2}$ и $P_{k,n-k}(V_0^{\mathbf{Z}_2})$ — пространство полилинейных многочленов из $F(X, V_0^{\mathbf{Z}_2})$ от k четных переменных $y_1, \dots, y_k \in Y$ и $n - k$ нечетных переменных $z_1, \dots, z_{n-k} \in Z$. На пространстве $P_{k,n-k}(V_0^{\mathbf{Z}_2})$ естественным образом задано действие группы $S_k \times S_{n-k}$:

$$(\sigma, \tau)f(y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_{n-k}) = f(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(k)}, z_{\tau(1)}, \dots, z_{\tau(n-k)}),$$

которое задает на $P_{k,n-k}(V_0^{\mathbf{Z}_2})$ структуру $S_k \times S_{n-k}$ -модуля. Обозначим соответствующий характер через $\chi_{k,n-k}(V_0^{\mathbf{Z}_2})$.

Из теории представлений симметрической группы известно, что существует взаимоднозначное соответствие между неприводимыми S_k -характерами и всеми разбиениями $\lambda \vdash k$ числа k . Обозначим через χ_λ неприводимый S_n -характер, соответствующий разбиению λ числа n . Имеет место следующее разложение:

$$\chi_{k,n-k}(V_0^{\mathbf{Z}_2}) = \chi(P_{k,n-k}(V_0^{\mathbf{Z}_2})) = \sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ \mu \vdash n-k}} m_{\lambda,\mu} (\chi_\lambda \otimes \chi_\mu), \quad (1.1)$$

где $\chi_\lambda \otimes \chi_\mu$ — неприводимый $S_k \times S_{n-k}$ -характер, соответствующий паре разбиений (λ, μ) , а $m_{\lambda,\mu}$ — соответствующие кратности.

Предложение 1. Если первая диаграмма, отвечающая паре разбиений (λ, μ) , состоит более чем из одной строчки, или вторая диаграмма состоит более чем из двух строчек, тогда $m_{\lambda,\mu} = 0$.

Доказательство. Предположим что пара разбиений (λ, μ) такая, что длина первого столбца первой диаграммы больше одного, или длина первого столбца второй диаграммы больше двух.

Рассмотрим элемент f , порождающий неприводимый модуль, соответствующий паре разбиений (λ, μ) . Согласно работе [2], элемент f равен линейной комбинации слагаемых, каждое из которых либо содержит, по крайней мере, один кососимметрический набор из двух переменных, принадлежащих Y , либо содержит не менее одного кососимметрического набора из трех переменных, принадлежащих Z .

Достаточно показать, что в $L = sl_2$ тождественно равен нулю любой полилинейный лиевский многочлен, который либо кососимметричен по двум переменным из четной компоненты, либо кососимметричен по трем переменным из нечетной компоненты. Так как размерность четной компоненты алгебры L равна 1, а размерность нечетной равна 2, то и в первом, и во втором случаях мы подставим один базисный элемент L вместо пары кососимметрических переменных. Очевидно, что все эти значения — нулевые. Предложение доказано.

Для доказательства следующей теоремы нам понадобится лемма 4.4 из статьи [1].

Лемма 4.4. Пусть $f(x_1, x_2, x_3)$ — однородный степени d_i по x_i многочлен в свободной ассоциативной алгебре и $d_i \equiv \sigma_i \pmod{2}$, $\sigma_i = 0, 1$, $i = 1, 2, 3$. Тогда

$$f(h, e + f, e - f) = \epsilon h^{\sigma_1} (e + f)^{\sigma_2} (e - f)^{\sigma_3}, \quad \epsilon \in K.$$

Теорема 1. Для каждого $n > 1$ $S_k \times S_{n-k}$ -модуль $P_{k,n-k}(V_0^{Z_2})$ разлагается в сумму неприводимых $S_k \times S_{n-k}$ -модулей, соответствующих парам разбиений $\lambda \vdash k$ и $\mu \vdash n - k$, где $\lambda = (k)$, $\mu = (q + r, q)$, причем $m_{\lambda, \mu} = 1$, если выполнены следующие условия:

- 1) $k \neq n$;
- 2) $r \neq n$;
- 3) $r \equiv 1$ или $k + q \equiv 1 \pmod{2}$.

В остальных случаях $m_{\lambda, \mu} = 0$.

Доказательство. По предложению 1 достаточно рассматривать только тождества от трех переменных, при этом одна переменная принадлежит Y , а две другие принадлежат Z . Пусть c, d — пара таблиц, соответствующая паре разбиений $\lambda = (k)$, $\mu = (q + r, q)$, $f_{c,d}(y, z_1, z_2)$, $y \in Y$, $z_1, z_2 \in Z$ — многочлен, полученный путем "склеивания" многочлена, построенного по паре таблиц c, d [3]. Рассмотрим алгебру матриц второго порядка Λ_2 над алгебраическим замыканием Λ поля рациональных функций от коммутирующих переменных ξ_{ij} , η_{ij} , ζ_{ij} , $i, j = 1, 2$; $f(y, z_1, z_2) = 0$ является тождеством в L тогда и только тогда, когда $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ для любых матриц ξ, η, ζ из Λ_2 с алгебраически независимыми коэффициентами следующего вида:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} & 0 \\ 0 & -\xi_{11} \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 & \eta_{12} \\ \eta_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_{12} \\ \zeta_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы ξ, η, ζ невырожденные. Обозначение $A^C = C^{-1}AC$. Существует матрица $C = c_{11}e_{11} + c_{22}e_{22}$, где $c_{11}/c_{22} = \sqrt{\eta_{12}/\eta_{21}}$ из Λ_2 , переводящая $\eta_{12}e + \eta_{21}f$ к виду $\beta(e + f)$, такая, что $h^C = h$, то есть

$$\eta^C = C^{-1}\eta C = \begin{pmatrix} c_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & c_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \eta_{12} \\ \eta_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$h^C = C^{-1}hC = \begin{pmatrix} c_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & c_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\xi^C = \alpha h, \quad \eta^C = \beta(e + f), \quad \zeta^C = \gamma_1(e + f) + \gamma(e - f),$$

$\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma$ алгебраически независимы. В силу кососимметричности и по лемме 4.4

$$f_{c,d}(\xi, \eta, \zeta)^C = f_{c,d}(\alpha h, \beta(e + f), \gamma(e - f)) = \alpha^{d_1} \beta^{d_2} \gamma^{d_3} \epsilon_{c,d} h^{\sigma_1} (e + f)^{\sigma_2} (e - f)^{\sigma_3},$$

где α, β, γ алгебраически независимы. Для любых двух пар таблиц c_1, d_1 и c_2, d_2 , соответствующих одной и той же паре разбиений,

$$\epsilon_{c_2, d_2} f_{c_1, d_1}(y, z_1, z_2) - \epsilon_{c_1, d_1} f_{c_2, d_2}(y, z_1, z_2) = f(y, z_1, z_2)$$

является тождеством в L . Поэтому модуль $P_{k, n-k}(V_0^{Z_2})$ разлагается в сумму неизоморфных неприводимых $S_k \times S_{n-k}$ -модулей, т.е. $m_{\lambda, \mu} \leq 1$.

Очевидно, что подмодуль, соответствующий таблице Юнга, построенной по разбиению $n = (n)$, является нулевым в любой алгебре Ли в силу тождества антикоммутативности. Следовательно, $m_{\lambda, \mu} = 0$ при $k = n$ и при $r = n$.

Пусть $k, q \equiv 1, r \equiv 0 \pmod{2}$. Рассмотрим элемент $f(y, z_1, z_2)$, отвечающий паре разбиений $\lambda = (k), \mu = (q + r, q)$, где

$$2q + r + k = n, \quad y \in Y, \quad z_1, z_2 \in Z.$$

Степени относительно y, z_1, z_2 равны соответственно $k, q + r, q$. По лемме 4.4, так как все степени нечетные,

$$f(h, e + f, e - f) = \epsilon h(e + f)(e - f) = \epsilon(e - f)(e - f) = -\epsilon E.$$

Поэтому $f(y, z_1, z_2)$ не является лиевым многочленом. Следовательно, $m_{\lambda, \mu} = 0$.

Далее пусть $k, q, r \equiv 0 \pmod{2}$. Аналогично с предыдущим случаем получаем

$$f(h, e + f, e - f) = \epsilon h^0(e + f)^0(e - f)^0 = \epsilon E.$$

Отсюда $m_{\lambda, \mu} = 0$.

Для доказательства теоремы осталось построить ненулевые многочлены $f_{kqr}(y, z_1, z_2)$ во всех случаях, для которых $m_{\lambda, \mu} = 1$. Обозначим $g_0(z_1, z_2) = z_1 z_2, z_1, z_2 \in Z$;

$$d(z_1, z_2) = \bar{Z}_1 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \bar{Z}_2, \quad Z_1 = adz_1, \quad Z_2 = adz_2;$$

$$g_l(z_1, z_2) = g_0(z_1, z_2)[d(z_1, z_2)]^l.$$

1 случай: $k = 0$:

- а) $q = 2l + 1$, r — любое $f_{0qr}(y, z_1, z_2) = g_l(z_1, z_2)z_1^r$,
 б) $q = 2l$, $r = 2s + 1$ $f_{0qr}(y, z_1, z_2) = g_{l-1}(z_1, z_2)z_1^r \bar{z}_1 \bar{z}_2$;

2 случай: $k > 0$, $r = 2s + 1$:

- в) $q = 2l + 1$, $f_{kqr}(y, z_1, z_2) = g_l(z_1, z_2)z_1^r y^k$,
 г) $q = 2l$, $f_{kqr}(y, z_1, z_2) = y[d(z_1, z_2)]^l z_1^r y^{k-1}$;

3 случай: $r = 2s$:

- д) $q = 2l + 1$, k — четное $f_{kqr}(y, z_1, z_2) = y[d(z_1, z_2)]^l \bar{z}_1 y^{k-1} \bar{z}_2 z_1^r$,
 е) $q = 2l$, k — нечетное $f_{kqr}(y, z_1, z_2) = g_{l-1}(z_1, z_2) \bar{z}_1 y^k \bar{z}_2 z_1^r$.

Замечание.

$$hehf - hfhe = -8h, \quad h\bar{e}\bar{e}\bar{f}\bar{f} = -8h, \quad h(e + f)^2 = 4h.$$

Докажем, что $f_{kqr}(h, e + f, f) \neq 0$ во всех случаях. Из замечания получаем:

$$g_l(e + f, f) = g_0(e + f, f)[d(e + f, f)]^l = h[d(e, f)]^l = (-8)^l h.$$

а) $f_{0qr}(h, e + f, f) = g_l(e + f, f)(e + f)^r =$

i) при $r = 2s$ $f_{0qr}(h, e + f, f) = (-8)^l 4^s h \neq 0$,

ii) при $r = 2s + 1$ $f_{0qr}(h, e + f, f) = (-8)^l 4^s 2(e - f) \neq 0$;

б) $f_{0qr}(h, e + f, f) =$

$$\begin{aligned} &= g_{l-1}(e + f, f)(e + f)^r(e + f)f - g_{l-1}(e + f, f)(e + f)^r f(e + f) = \{\text{по а).ii}\} = \\ &= (-8)^{l-1} 4^s 2((e - f)(e + f)f - (e - f)f(e + f)) = (-8)^{l-1} 4^s (-4)(e + f) \neq 0; \end{aligned}$$

в) $f_{kqr}(h, e + f, f) = g_l(e + f, f)(e + f)^r h^k = h[d(e + f, f)]^l (e + f)^r h^k =$

$$= \{\text{по а).ii}\} = (-8)^l 4^s 2(e - f)h^k =$$

i) k — четное $f_{kqr}(h, e + f, f) = (-8)^l 4^s 2(-2)^k (e - f) \neq 0$,

ii) k — нечетное $f_{kqr}(h, e + f, f) = (-8)^l 4^s 2(-2)^k (e + f) \neq 0$;

г) $f_{kqr}(h, e + f, f) = h[d(e + f, f)]^l (e + f)^r h^{k-1} =$

$$= \{\text{по а).ii}\} = (-8)^l 4^s 2(e - f)h^{k-1} =$$

i) k — четное $f_{kqr}(h, e + f, f) = (-8)^l 4^s 2(-2)^{k-1} (e + f) \neq 0$,

ii) k — нечетное $f_{kqr}(h, e + f, f) = (-8)^l 4^s 2(-2)^{k-1} (e - f) \neq 0$;

д) $f_{kqr}(h, e + f, f) = h[d(e + f, f)]^l (e + f)h^{k-1} \bar{f}(e + f)^r =$

$$= (-8)^l h(e + f)h^{k-1} \bar{f}(e + f)^r = (-8)^l (-2)^{2k} h(e + f)^r = (-8)^l (-2)^{2k} 4^s h \neq 0;$$

е) $f_{kqr}(h, e + f, f) = g_{l-1}(e + f, f)(e + f)h^k \bar{f}(e + f)^r = (-8)^{l-1} h(e + f)h^k \bar{f}(e + f)^r =$

$$+ f)^r = (-8)^{l-1} (-2)^{2k+1} h(e + f)^r = (-8)^{l-1} (-2)^{2k+1} 4^s h \neq 0.$$

Теорема доказана.

2. Тождества $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ -градуированной алгебры sl_2

Пусть $X = X_{00} \cup X_{10} \cup X_{01} \cup X_{11}$ — счетное множество переменных, разбитых на четыре непересекающихся подмножества. Обозначим $P_{p,q,r,t}(V_0^{\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2})$ — пространство полилинейных многочленов из относительно свободной алгебры $F(X, V_0^{\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2})$ многообразия $V_0^{\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2}$ от переменных $u_1, \dots, u_p, x_1, \dots, x_q, y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_t$, где $u_i \in X_{00}, x_j \in X_{10}, y_k \in X_{01}, z_l \in X_{11}$ и $p + q + r + t = n$.

Рассмотрев действие группы S_p на переменных $u_1, \dots, u_p$, действие группы S_q на переменных $x_1, \dots, x_q$, действие группы S_r на переменных $y_1, \dots, y_r$ и действие группы S_t на переменных $z_1, \dots, z_t$, мы получим действие группы $S_p \times S_q \times S_r \times S_t$ на пространстве $P_{p,q,r,t}(V_0^{\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2})$:

$$\begin{aligned} & (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)f(u_1, \dots, u_p, x_1, \dots, x_q, y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_t) = \\ & = f(u_{\sigma_1(1)}, \dots, u_{\sigma_1(p)}, x_{\sigma_2(1)}, \dots, x_{\sigma_2(q)}, y_{\sigma_3(1)}, \dots, y_{\sigma_3(r)}, z_{\sigma_4(1)}, \dots, z_{\sigma_4(t)}). \end{aligned}$$

Пространство $P_{p,q,r,t}(V_0^{\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2})$ является $S_p \times S_q \times S_r \times S_t$ -модулем. Напомним, что χ_λ — характер неприводимого S_n -представления, соответствующего $\lambda \vdash n$, и рассмотрим для многообразия $V_0^{\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2}$ разложение

$$\chi_{p,q,r,t}(V_0^{\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2}) = \chi(P_{p,q,r,t}(V_0^{\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2})) = \sum_{\substack{\lambda \vdash p, \mu \vdash q \\ \nu \vdash r, \pi \vdash t}} m_{\lambda, \mu, \nu, \pi} (\chi_\lambda \otimes \chi_\mu \otimes \chi_\nu \otimes \chi_\pi), \quad (2.1)$$

где $\chi_\lambda \otimes \chi_\mu \otimes \chi_\nu \otimes \chi_\pi$ — неприводимый $S_p \times S_q \times S_r \times S_t$ -характер, соответствующий четверке разбиений (λ, μ, ν, π) , а $m_{\lambda, \mu, \nu, \pi}$ — соответствующие кратности.

Теорема 2. Для каждого $n = p + q + r + t > 1$ $S_p \times S_q \times S_r \times S_t$ -модуль $P_{p,q,r,t}(V_0^{\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2})$ разлагается в сумму неприводимых $S_p \times S_q \times S_r \times S_t$ -модулей, соответствующих четверке разбиений $(p), (q), (r), (t)$, причем $m_{\lambda, \mu, \nu, \pi} = 1$, если выполнены следующие условия:

- 1) $p = 0$;
- 2) $q \neq n, r \neq n, t \neq n$;
- 3) $q - r \equiv 1 \pmod{2}$ или $r - t \equiv 1 \pmod{2}$.

В остальных случаях $m_{\lambda, \mu, \nu, \pi} = 0$.

Доказательство. Так как размерность компоненты L_{00} равна 0, то любой элемент, зависящий от переменной, принадлежащей X_{00} , равен 0 в L , следовательно, $m_{\lambda, \mu, \nu, \pi} = 0$, если $p > 0$. Размерность остальных компонент равна 1, поэтому достаточно рассматривать только тождества от трех переменных x, y, z , где $x \in X_{10}, y \in X_{01}, z \in X_{11}$. Рассмотрим четверку таблиц $\emptyset, b, c, d$, первая из которых пустая, соответствующая четверке разбиений $(0), (q), (r), (t)$, и многочлен $f_{\emptyset, b, c, d}(x, y, z)$, который порождает неприводимый модуль, соответствующий этой четверке таблиц. После "склеивания" [3] этого многочлена получим многочлен $g_{\emptyset, b, c, d}(x, y, z)$, однородный степени q по x , степени r по y и степени t по z ; $f(x, y, z) = 0$ является тождеством в L тогда и только тогда, когда $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ для любых матриц ξ, η, ζ из Λ_2 , где Λ_2 — алгебра, введенная в доказательстве теоремы 1, с алгебраически независимыми коэффициентами следующего вида:

$$\xi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

По лемме 4.4 [1] получаем

$$g_{0,b,c,d}(\xi, \eta, \zeta) = g_{0,b,c,d}(\alpha h, \beta(e+f), \gamma(e-f)) = \alpha^q \beta^r \gamma^t \epsilon_{0,b,c,d} h^{\sigma_1} a^{\sigma_2} b^{\sigma_3},$$

α, β, γ алгебраически независимы.

Для любых двух четверок таблиц $\emptyset, b_1, c_1, d_1$ и $\emptyset, b_2, c_2, d_2$, соответствующих одной и той же четверке разбиений,

$$\epsilon_{\emptyset, b_2, c_2, d_2} g_{\emptyset, b_1, c_1, d_1}(x, y, z) - \epsilon_{\emptyset, b_1, c_1, d_1} g_{\emptyset, b_2, c_2, d_2}(x, y, z) = f(x, y, z)$$

является тождеством в L . Поэтому $m_{\lambda, \mu, \nu, \pi} \leq 1$.

Докажем, что если одно из условий в формулировке теоремы не выполняется, то $m_{\lambda, \mu, \nu, \pi} = 0$.

1) $p > 0$. Было доказано выше;

2) $q = n$. Следует из того, что разбиению (n) в случае алгебры Ли соответствует нулевой модуль. Аналогично при $r = n$ и при $t = n$;

3) $q - r \equiv 0 \pmod{2}$ и $r - t \equiv 0 \pmod{2}$, то есть q, r и t имеют одинаковую четность. Рассмотрим многочлен $g_{0,q,r,t}(x, y, z)$, соответствующий четверке разбиений $(0), (q), (r), (t)$. Пусть q, r, t — четные, тогда по лемме 4.4 имеем

$$g_{0,q,r,t}(h, e+f, e-f) = \epsilon h^0 (e+f)^0 (e-f)^0 = \epsilon E.$$

Откуда следует, что $g_{0,q,r,t}(x, y, z)$ не является левым многочленом. Следовательно, соответствующая кратность равна 0.

Аналогично, если q, r, t нечетные, получаем

$$g_{0,q,r,t}(h, e+f, e-f) = \epsilon h^1 (e+f)^1 (e-f)^1 = -\epsilon E.$$

Отсюда $m_{\lambda, \mu, \nu, \pi} = 0$. Доказательство теоремы будет завершено, если мы построим ненулевые многочлены $g_{0,q,r,t}(x, y, z)$ во всех случаях, когда выполнены условия теоремы.

1 случай: $q = 0$.

а) r — нечетное, так как $r \neq n$, то $t > 0$:

$$g_{0,0,r,t}(x, y, z) = zy^r z^{t-1};$$

б) r — четное, t — нечетное. $r > 0$, потому что $t \neq n$:

$$g_{0,0,r,t}(x, y, z) = yz^t y^{r-1}.$$

2 случай: $q > 0$ — четное.

в) r — нечетное, t — любое:

$$g_{0,q,r,t}(x, y, z) = xy^r x^{q-1} z^t;$$

г) r — четное, t — нечетное:

$$g_{0,q,r,t}(x, y, z) = xz^t x^{q-1} y^r;$$

3 случай: q — нечетное.

д) $r = 0$, так как $q \neq n$, то $t > 0$:

$$g_{0,q,0,t}(x, y, z) = zx^q z^{t-1};$$

е) $r > 0$ — четное, t — любое:

$$g_{0,q,r,t}(x, y, z) = yx^q y^{r-1} z^t;$$

ж) r — нечетное, t — четное:

$$g_{0,q,r,t}(x, y, z) = xz^t y^r x^{q-1}.$$

Подставляя базисные элементы $h, e + f, e - f$, получаем, что $g_{0,q,r,t}(h, e + f, e - f) \neq 0$, и поэтому $g_{0,q,r,t}(x, y, z) \neq 0$ в $F(X, V_0^{Z_2 \times Z_2})$. Теорема доказана.

3. Тождества Z_3 -градуированной алгебры sl_2

Рассмотрим счетное множество переменных $X = X_{-1} \cup X_0 \cup X_1$, разбитых на три непересекающихся подмножества и относительно свободную алгебру $F(X, V_0^{Z_3})$ многообразия $V_0^{Z_3}$. Обозначим через $P_{p,q,r}(V_0^{Z_3})$ пространство полилинейных многочленов из алгебры $F(X, V_0^{Z_3})$ от переменных $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q, z_1, \dots, z_r$, где $x_i \in X_{-1}, y_j \in X_0, z_k \in X_1$ и $p + q + r = n$.

На пространстве $P_{p,q,r}(V_0^{Z_3})$ естественным образом задано действие группы $S_p \times S_q \times S_r$:

$$\begin{aligned} &(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q, z_1, \dots, z_r) = \\ &= f(x_{\sigma_1(1)}, \dots, x_{\sigma_1(p)}, y_{\sigma_2(1)}, \dots, y_{\sigma_2(q)}, z_{\sigma_3(1)}, \dots, z_{\sigma_3(r)}). \end{aligned}$$

Пространство $P_{p,q,r}(V_0^{Z_3})$ является $S_p \times S_q \times S_r$ -модулем, и имеет место следующее разложение

$$\chi_{p,q,r}(V_0^{Z_3}) = \chi(P_{p,q,r}(V_0^{Z_3})) = \sum_{\substack{\lambda \vdash p, \mu \vdash q \\ \nu \vdash r}} m_{\lambda, \mu, \nu} (\chi_\lambda \otimes \chi_\mu \otimes \chi_\nu), \quad (3.1)$$

где $\chi_\lambda \otimes \chi_\mu \otimes \chi_\nu$ — неприводимый $S_p \times S_q \times S_r$ -характер, соответствующий тройке разбиений (λ, μ, ν) , а $m_{\lambda, \mu, \nu}$ — соответствующие кратности.

Для доказательства основного результата этой главы нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $f(x_1, x_2, x_3)$ — однородный степени d_i по x_i многочлен в свободной ассоциативной алгебре. Тогда

$$f(e, h, f) = \begin{cases} 0, & \text{если } |d_1 - d_3| > 1, \\ \epsilon_1 e, & \text{если } d_1 - d_3 = 1, \\ \epsilon_2 f, & \text{если } d_3 - d_1 = 1, \\ \epsilon_3 e_{11} + \epsilon_4 e_{22}, & \text{если } d_1 = d_3, \end{cases}$$

где $\epsilon_i \in K$.

Доказательство. Распишем наш многочлен на сумму одночленов

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^k f_i(x_1, x_2, x_3)$$

и подставим в них e, h, f . Так как $he = -eh$, $hf = -fh$, мы можем "протаскать" все h вперед. Получаем

$$f_i(e, h, f) = \alpha_i \underbrace{h \dots h}_{d_2} w_i,$$

где $\alpha_i \in K$, а w_i — это одночлен, содержащий только e и f . Так как $h^2 = E$, то h^{d_2} равняется либо E , либо h в зависимости от четности d_2 . Заметим, что $Ee = he = e$ и $Ef = -hf = f$, следовательно, $h^{d_2}w_i = \pm w_i$. Мы получили

$$f(e, h, f) = \sum_{i=1}^k f_i(e, h, f) = \sum_{i=1}^k \alpha_i h^{d_2} w_i = \sum_{i=1}^k \beta_i w_i.$$

Рассмотрим все случаи, указанные в формулировке леммы.

Пусть $|d_1 - d_3| > 1$, тогда в w_i встретится две подряд идущие e или f . Из тождеств $e^2 = 0$ и $f^2 = 0$ следует, что $f_i(e, h, f) = 0$ для любого i . Следовательно, $f(e, h, f) = 0$.

Рассмотрим следующий случай. Пусть $d_1 - d_3 = 1$, тогда количество e на единицу больше количества f . Легко заметить, что $f_i(e, h, f) \neq 0$ тогда и только тогда, когда w_i имеет следующий вид:

$$w_i = ef \dots efe,$$

в остальных случаях $f_i(e, h, f) = 0$, так как в w_i встретится две подряд идущие e . Очевидно, что

$$w_i = ef \dots efe = e_{11} \dots e_{11} e = e.$$

Обозначим через I множество тех индексов, для которых $f_i(e, h, f) \neq 0$. Получаем

$$f(e, h, f) = \sum_{i=1}^k f_i(e, h, f) = \sum_{i=1}^k \beta_i w_i = \sum_{i \in I} \beta_i ef \dots efe = \sum_{i \in I} \beta_i e = \epsilon_1 e.$$

Предположим теперь, что $d_3 - d_1 = 1$. Аналогично с предыдущим случаем получаем, что $f_i(e, h, f) \neq 0$ тогда, когда w_i имеет следующий вид:

$$w_i = fe \dots fef,$$

иначе встретятся две подряд идущие f и тогда $f_i(e, h, f) = 0$. Так как

$$w_i = fe \dots fef = e_{22} \dots e_{22} f = e_{22} f = f,$$

то мы имеем

$$f(e, h, f) = \sum_{i=1}^k f_i(e, h, f) = \sum_{i=1}^k \beta_i w_i = \sum_{i \in I} \beta_i fe \dots fef = \sum_{i \in I} \beta_i f = \epsilon_2 f.$$

Пусть $d_1 = d_3$. Из тождеств $e^2 = 0$ и $f^2 = 0$ получаем, что $f_i(e, h, f) \neq 0$ тогда и только тогда, когда w_i имеет один из следующих видов

$$w_i = ef \dots ef, \quad w_i = fe \dots fe,$$

в остальных случаях встретятся или две подряд идущие e , или две подряд идущие f , и тогда $f_i(e, h, f) = 0$. Обозначим через I_1 множество тех индексов, для которых w_i имеет 1-й вид, а через I_2 множество тех индексов, для которых w_i имеет 2-й вид. Получаем

$$\begin{aligned} f(e, h, f) &= \sum_{i=1}^k f_i(e, h, f) = \sum_{i=1}^k \beta_i w_i = \sum_{i \in I_1} \beta_i e f \dots e f + \sum_{i \in I_2} \beta_i f e \dots f e = \\ &= \sum_{i \in I_1} \beta_i e_{11} \dots e_{11} + \sum_{i \in I_2} \beta_i e_{22} \dots e_{22} = \sum_{i \in I_1} \beta_i e_{11} + \sum_{i \in I_2} \beta_i e_{22} = \epsilon_3 e_{11} + \epsilon_4 e_{22}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Заметим, что в лиевском случае в условиях леммы, если $d_1 = d_3$, то $f(e, h, f) = \epsilon_3 h$, так как элемент $\epsilon_3 e_{11} + \epsilon_4 e_{22}$ принадлежит L тогда и только тогда, когда $\epsilon_4 = -\epsilon_3$. Основным результатом данной главы является следующая теорема.

Теорема 3. Для каждого $n = p + q + r > 1$ $S_p \times S_q \times S_r$ -модуль $P_{p,q,r}(V_0^{Z_3})$ разлагается в сумму неприводимых $S_p \times S_q \times S_r$ -модулей, соответствующих тройке разбиений $(p), (q), (r)$, причем $m_{\lambda, \mu, \nu} = 1$, если выполнены следующие условия:

- 1) $p \neq n, q \neq n, r \neq n$;
- 2) $|p - r| \leq 1$.

В остальных случаях $m_{\lambda, \mu, \nu} = 0$.

Доказательство. Так как размерность каждой компоненты равна 1, то достаточно рассматривать только тождества от трех переменных x, y, z , где $x \in X_{-1}$, $y \in X_0$, $z \in X_1$. Пусть b, c, d — тройка таблиц, соответствующая тройке разбиений $(p), (q), (r)$, и $f_{b,c,d}(x, y, z)$ — многочлен, полученный путем "склеивания" многочлена, построенного по тройке таблиц b, c, d .

Многочлен $f(x, y, z) = 0$ является тождеством в L тогда и только тогда, когда $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ для любых матриц ξ, η, ζ из Λ_2 , где Λ_2 — алгебра, введенная выше, с алгебраически независимыми коэффициентами следующего вида:

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}, \quad \zeta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Из леммы 1 следует

$$f_{b,c,d}(\xi, \eta, \zeta) = f_{b,c,d}(ae, \beta h, \gamma f) = \alpha^p \beta^q \gamma^r \epsilon_{b,c,d} \begin{cases} 0, & \text{если } |p - r| > 1, \\ \epsilon_1 e, & \text{если } p - r = 1, \\ \epsilon_2 f, & \text{если } r - p = 1, \\ \epsilon_3 h, & \text{если } p = r, \end{cases}$$

где α, β, γ алгебраически независимы.

Для любых двух троек таблиц b_1, c_1, d_1 и b_2, c_2, d_2 , соответствующих одной и той же тройке разбиений,

$$\epsilon_{b_2, c_2, d_2} f_{b_1, c_1, d_1}(x, y, z) - \epsilon_{b_1, c_1, d_1} f_{b_2, c_2, d_2}(x, y, z) = f(x, y, z)$$

является тождеством в L . Следовательно, модуль $P_{p,q,r}(V_0^{\mathbb{Z}^3})$ разлагается в сумму неизоморфных неприводимых $S_p \times S_q \times S_r$ -модулей, т.е. кратности $m_{\lambda,\mu,\nu} \leq 1$.

Докажем, что $m_{\lambda,\mu,\nu} = 0$, если хотя бы одно из условий теоремы не выполнено.

1) $p = n$. Легко следует из тождества антикоммутативности и того, что размерность компоненты L_{-1} равна 1, $q = n$ и $r = n$ аналогично;

2) $|p - r| > 1$. Рассмотрим многочлен $f_{p,q,r}(x, y, z)$, соответствующий четверке разбиений $(p), (q), (r)$. Из леммы 1 следует, что $f_{p,q,r}(e, h, f) = 0$. Следовательно, линеаризация $f_{p,q,r}(e, h, f)$ порождает нулевой модуль, то есть кратность равна 0.

Теорема будет доказана, если мы построим ненулевые многочлены $f_{p,q,r}(x, y, z)$ во всех случаях, когда выполнены условия теоремы.

а) $p - r = 1$. Имеем

$$f_{p,q,r}(x, y, z) = x(xz)^r y^q.$$

б) $p - r = 0$. Так как $q \neq n$, то $p = r \neq 0$.

$$f_{p,q,r}(x, y, z) = x(xz)^{p-1} y^q z.$$

в) $r - p = 1$. Имеем

$$f_{p,q,r}(x, y, z) = z(xz)^p y^q.$$

Подставляя базисные e, h, f , мы видим, что $f_{p,q,r}(e, h, f) \neq 0$, и поэтому $f_{p,q,r}(e, h, f)$ не равен нулю в относительно свободной алгебре многообразия $V_0^{\mathbb{Z}^3}$. Теорема доказана.

Литература

- [1] Дренски В.С. Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр // Мат. сб. 1981. Т. 115. №1. С. 98–115.
- [2] Мищенко С.П. Цветные диаграммы Юнга // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1993. №1. С. 90–91.
- [3] Мищенко С.П. Рост многообразий алгебр Ли // Успехи математических наук. 1990. Т. 45. Вып. 6(276). С. 25–45.

Поступила в редакцию 19/XI/2004;
в окончательном варианте 19/XI/2004.

GRADED IDENTITIES OF A SIMPLE THREE-DIMENSIONAL LIE ALGEBRA

© 2004 D.V. Repin²

Let K be a field of characteristic zero and sl_2 be the Lie algebra of 2×2 matrices with zero trace over a field F . It is well known three classic non-trivial gradings on sl_2 : $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ and $\mathbf{Z}_3$ – gradings. In the case of these gradings a complete description of the vector space of multilinear graded identities in the terms of representation theory of symmetric group and the Young diagrams is given.

Paper received 19/XI/2004.

Paper accepted 19/XI/2004.

²Repin Dmitriy Vladimirovich (re80@mail.ru), Dept. of Algebraic and Geometric Computations, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, 432700, Russia.