

УДК 517.9

**ОБ ОЦЕНКАХ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦ В МЕТОДЕ
ВЕЙВЛЕТ-ГАЛЕРКИНА ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**© 2004 И.А. Блатов,¹ Н.В. Бубнова²

Рассматривается метод Бубнова—Галеркина на базе сплайновых вейвлет для сингулярных интегральных уравнений. Изучены свойства матриц систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при их численной реализации. На основе отсечения по барьеру получены разреженные аппроксимации этих матриц. Экспериментально исследована зависимость разреженности матрицы и точности приближенного решения от величины барьера.

Введение

Вейвлет-системы представляют собой ортогональные системы функций, появившиеся сравнительно недавно (в конце 80-х годов) и завоевавшие популярность в связи с рядом преимуществ, которые они имеют для широкого круга задач перед классическими ортогональными системами функций (включая тригонометрические полиномы, анализ Фурье, алгебраические полиномы). Математическая теория вейвлет-систем была заложена в работах [16–19], но там изучаются в основном фундаментальные вопросы, относящиеся к теории функций, и их непосредственное применение к решению прикладных задач затруднительно. Появившиеся в последнее время монографии [3, 5, 12] частично восполняют имеющийся пробел, но посвящены в основном вопросам анализа сигналов. Вместе с тем несомненные достоинства вейвлет-систем делают их эффективным средством решения значительно более широкого класса проблем.

Настоящая статья посвящена применению полуортогональных сплайновых вейвлет к численному решению интегральных уравнений. Классиче-

¹Игорь Анатольевич Блатов (blatov@essu.samara.ru), кафедра дифференциальных уравнений и теории управления Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

²Наталья Вячеславовна Бубнова (bubnova@yandex.ru), кафедра высшей математики Поволжской государственной академии телекоммуникаций и информатики, 443090, Самара, Московское шоссе, 77.

ские методы их решения [4] приводят к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с заполненными матрицами. В случае двух и более независимых переменных это приводит к неприемлемым вычислительным затратам их решения. В [6] было показано, что матрицы соответствующих СЛАУ в вейвлет-базисах содержат много очень малых по модулю элементов, т.е. являются псевдоразреженными [21]. В настоящей статье получены точные асимптотические оценки элементов матриц в методе Галеркина для сингулярных интегральных уравнений Фредгольма второго рода в случае полуортогональных сплайновых вейвлет. На основе этих оценок получены разреженные аппроксимации матриц СЛАУ, позволяющие при их решении применять технологию разреженных матриц.

1. Построение систем полуортогональных сплайновых вейвлет

Применение сплайновых вейвлет Лемарье—Бэтла [16] к численному решению интегральных уравнений не вполне удобно из-за отсутствия финитности. В настоящем разделе мы строим и изучаем полную систему сплайновых полуортогональных вейвлет на конечном отрезке.

Пусть $[a, b]$ — произвольный отрезок, m — натуральное число и n_0 — такое целое число, что $2^{n_0} < 2m - 1 < 2^{n_0+1}$. Рассмотрим семейство $\Delta = \{\Delta_n, n = n_0, n_0 + 1, \dots\}$ разбиений отрезка $[a, b]$ $\Delta_n : a = x_0^n < x_1^n < \dots < x_{2^n}^n = b$ с постоянным шагом $h = h_n = (b - a)/2^n$. На каждом из разбиений Δ_n рассмотрим пространство сплайнов $L_n = S(\Delta_n, m - 1, 1)$. Тогда для каждого $k \geq n_0$ пространство $S(\Delta_k, m - 1, 1)$ можно представить в виде прямой суммы $L_k = L_{n_0} \oplus W_{n_0+1} \oplus W_{n_0+2} \oplus \dots \oplus W_k$, где через W_k обозначено ортогональное дополнение пространства L_{k-1} до пространства L_k . Искомый вейвлет-базис будем строить как объединение базиса в L_{n_0} и всех базисов в пространствах $W_n, n_0 \leq n \leq k$.

Вначале построим базис в ортогональном дополнении W_n пространства L_{n-1} до пространства L_n . Зафиксируем $n \geq n_0 + 1$. В случае необходимости будем считать, что каждое из разбиений Δ_n продолжено с тем же шагом на всю числовую ось узлами $x_i^n, -\infty < i < +\infty$. Нормализованные B -сплайны на разбиении Δ_n будем обозначать $N_{m-1, j, n}$.

Зафиксируем некоторое целое $i \geq 0$ такое, что $i + 2m - 1 \leq 2^{n-1}$, т.е. отрезок $[x_i^{n-1}, x_{i+2m-1}^{n-1}]$ целиком содержится в $[a, b]$. Будем искать функцию $\psi_{i, n}(x) \in W_n$ в виде

$$\psi_{i, n}(x) = \sum_{j=2i}^{2i+3m-2} \alpha_j N_{m-1, j, n}. \quad (1.1)$$

Для того чтобы $\psi_{i, n} \in W_n$, достаточно потребовать выполнения условий

$$(\psi_{i, n}, N_{m-1, k, n-1}) = 0, \quad k = i - m + 1, i - m + 2, \dots, i + 2m - 2, \quad (1.2)$$

поскольку остальные условия ортогональности выполняются автоматически в силу дизъюнктивности носителей.

Подставляя представление (1.1) в (1.2), получим однородную систему $3m - 2$ уравнений с $3m - 1$ неизвестными,

$$\sum_{j=2i}^{2i+3m-2} \alpha_j(N_{m-1, j, n-1}, N_{m-1, k, n-1}) = 0, \\ k = i - m + 1, i - m + 2, \dots, i + 2m - 2, \quad (1.3)$$

которая всегда имеет нетривиальное решение. Находя это нетривиальное решение, получаем искомый набор коэффициентов и функцию $\psi_{i, n}(x)$ в виде (1.1).

Из представления (1.1) и определения B -сплайнов вытекает, что $\text{supp}(\psi_{i, n}) \subset [x_{2i}^n, x_{2i+4m-2}^n]$, т.е. содержит $4m - 2$ смежных частичных отрезка. Возникает вопрос, нельзя ли построить вейвлет с меньшей длиной носителя? Следующая теорема показывает, что это не так.

Теорема 1. Пусть $p < m - 1$, и функция $\psi_{i, n}(x)$ вида

$$\psi_{i, n}(x) = \sum_{j=2i}^{2i+m+2p} \alpha_j N_{m-1, j, n} \quad (1.4)$$

удовлетворяет условиям

$$(\psi_{i, n}, N_{m-1, k, n-1}) = 0, \quad k = i - m + 1, i - m + 2, \dots, i + m + p - 1. \quad (1.5)$$

Тогда $\psi_{i, n}(x) \equiv 0$.

Доказательство. Очевидно, что теорему достаточно доказать в случае $p = m - 2$, так как при меньших p функцию всегда можно продолжить нулем на более широкий отрезок. Пусть $p = m - 2$. Предположим противное: найдется отличная от тождественного нуля функция (1.4), удовлетворяющая (1.5). Тогда для любого сплайна $\chi(x) \in S(\Delta_{n-1}, m - 1, 1)$ имеем

$$\int_a^b \psi_{i, n}(x) \chi(x) dx = 0. \quad (1.6)$$

Интегрируя в (1.6) по частям $m - 1$ раз и учитывая, что $\psi_{i, n}^{(j)}(x_{2i}^n) = \psi_{i, n}^{(j)}(x_{2i+4m-4}^n) = 0$, получим, что ненулевая функция $\chi_0(x) = \psi_{i, n}^{(m-1)}(x) \in S(\Delta_n, 0, 1)$, ортогональна на отрезке любому сплайну из $S(\Delta_{n-1}, 2m - 2, 1)$. Но размерность пространства сплайнов степени $2m - 2$ на отрезке $[x_i^{n-1}, x_{i+2m-2}^{n-1}]$ равна $4m - 4$ и совпадает с размерностью пространства сплайнов нулевой степени на этом же отрезке с вдвое более мелким разбиением. Поэтому существует ненулевой сплайн $\phi(x) \in S(\Delta_{n-1}, 2m - 2, 1)$, ортогональный любой функции из $S(\Delta_n, 0, 1)$ на отрезке $[x_{2i}^n, x_{2i+4m-2}^n]$. Но тогда

$$\int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \phi_{i, n}(x) dx = 0, \quad j = 2i, 2i + 1, \dots, 2i + 4m - 3. \quad (1.7)$$

Из (1.7) следует, что внутри каждого отрезка $[x_j^{n-1}, x_{j+1}^{n-1}]$, $i \leq j \leq i + 2m - 2$ функция $\phi(x)$ обращается в ноль не менее двух раз. Но тогда в силу известной теоремы о существовании и единственности интерполяционного сплайна [9, с. 27] функция $\phi(x)$ совпадает с интерполяционным сплайном тождественно равной нулю функции по узлам, где она обращается в ноль. Следовательно, $\phi(x) \equiv 0$. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Следствие. Совокупность функций $\{\psi_{i,n}\}$, $i = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 2m + 1$ линейно независима на каждом отрезке $[x_j^{n-1}, x_{j+m-1}^{n-1}]$, $0 \leq j \leq 2^{n-1}$ (т.е. линейно независимы их сужения на каждый такой отрезок).

Доказательство. Если нетривиальная комбинация функций $\{\psi_{i,n}\}$, $i = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 2m + 1$ равна нулю на каком либо из отрезков $[x_j^{n-1}, x_{j+m-1}^{n-1}]$, то, отбрасывая все слагаемые, носители которых не пересекаются с данным отрезком, получим, что линейная комбинация остальных будет отличной от тождественного нуля вейвлет-функцией, носитель которой состоит из двух групп, разделенных отрезком $[x_j^{n-1}, x_{j+m-1}^{n-1}]$, каждая из них содержит не более $2m - 2$ смежных частичных интервалов разбиения Δ_{n-1} . Но носитель любого B -сплайна из $S(\Delta_{n-1}, m - 1, 1)$ может иметь непустое пересечение лишь с одной из таких групп. Поэтому отличной от тождественного нуля вейвлет-функцией будет и сужение этой вейвлет-функции на любую из таких групп. Но такой вейвлет-функции не может быть в силу теоремы 1.

Замечание 1. Справедлива формула $\psi_{i,n}(x) = \psi_{0,n}(2^{n-n_0}x - i(b-a)/2^{n_0-1})$, т.е. совокупность построенных вейвлет-функций получается сдвигом одной единственной функции $\psi_{0,n}(x)$.

Таким образом мы построили совокупность полуортогональных линейно независимых вейвлет $\{\psi_{i,n}\}$, $i = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 2m + 1$. Однако размерность ортогонального дополнения W_n равна 2^{n-1} , т.е. до базиса в W_n нам не хватает ровно $2(m-1)$ функций. Построим недостающие вейвлет-функции. Для этого рассмотрим функции $\psi_{i,n}(x)$ при $-2m+2 \leq i \leq 2^{n-1}-1$ на расширенном разбиении Δ_n .

Первую группу из $m-1$ недостающих вейвлет будем искать в виде

$$\tilde{\psi}_{i,n}(x) = \psi_{i,n}(x) - \sum_{j=-2m+2}^{-m} \alpha_j \psi_{j,n}(x), \quad -m+1 \leq i \leq -1, \quad (1.8)$$

из условий

$$(\tilde{\psi}_{i,n}, N_{m-1,k,n-1}) = 0, \quad k = -m+1, -m+2, \dots, -1, \quad (1.9)$$

где скалярное произведение понимается в смысле $L_2[a, b]$.

Подставляя (1.8) в (1.9), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=-2m+2}^{-m} \alpha_j (\psi_{j,n}, N_{m-1,k,n-1}) = (\psi_{i,n}, N_{m-1,k,n-1}), \quad k = -m+1, -m+2, \dots, -1 \quad (1.10)$$

для определения α_j . Матрица системы (1.10) невырождена, так как в противном случае существовало бы нетривиальное решение соответствующей однородной системы, что означало бы, что функция $\sum_{j=-2m+2}^{-m} \alpha_j \psi_{j,n}(x)$ является вейвлет-функцией на $[a, b]$ с носителем $[x_0^n, x_{2m-2}^n]$, что невозможно в силу формулы (1). Решая систему (1.10), получаем, что функция (1.8) является искомой вейвлет-функцией, так как ортогональность к B -сплайнам $N_{m-1,k,n-1}$ при $k \geq 0$ имеет место в силу ортогональности им всех вейвлет из линейной комбинации (1.8), а при $-m+1 \leq k \leq -1$ — в силу условий (1.9).

Тем самым мы построили совокупность $m-1$ вейвлет-функций (1.8). Их линейная независимость с ранее построенными функциями вытекает из вида (1.8) и следствия из теоремы 1.

Вторую группу из $m-1$ недостающих вейвлет будем искать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{i,n}(x) &= \psi_{i,n}(x) - \sum_{j=2^{n-1}-m+1}^{2^{n-1}-1} \alpha_j \psi_{j,n}(x), \\ 2^{n-1} - 2m + 2 &\leq i \leq 2^{n-1} - m, \end{aligned} \quad (1.11)$$

из условий

$$\begin{aligned} (\tilde{\psi}_{i,n}, N_{m-1,k,n-1}) &= 0, \\ k &= 2^{n-1} - m + 1, 2^{n-1} - m + 2, \dots, 2^{n-1} - 1, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где скалярное произведение понимается в смысле $L_2[a, b]$.

Подставляя (1.11) в (1.12), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j=2^{n-1}-m+1}^{2^{n-1}-1} \alpha_j (\psi_{j,n}(x), N_{m-1,k,n-1}) &= (\psi_{i,n}, N_{m-1,k,n-1}), \\ k &= 2^{n-1} - m + 1, 2^{n-1} - m + 2, \dots, 2^{n-1} - 1 \end{aligned} \quad (1.13)$$

для определения α_j . Решая систему (1.13), получаем, что функция (1.11) является искомой вейвлет-функцией. Тем самым мы построили совокупность $m-1$ вейвлет-функций (1.11). Вместе с функциями (1.1) и (1.8) они образуют искомый базис в W_n , если $2^{n-1} > 2m-1$.

В качестве базиса в L_{n_0} выберем совокупность "усеченных" B -сплайнов

$$\{\bar{N}_{m-1,k,n_0}, -m+1 \leq k \leq 2^{n_0-1}\}. \quad (1.14)$$

Итак, совокупность функций (1.14) и (1.1), (1.8), (1.11) при $n_0+1 \leq n \leq k$ образует искомый вейвлет-базис в пространстве L_k .

Замечание 2. Для функций (1.8) и (1.11) при $i \in [2^{n-1}-2m+2, 2^{n-1}-m]$ в силу симметрии справедливы формулы

$$\tilde{\psi}_{i,n}(x) = \tilde{\psi}_{n_0+1, 2^{n-1}-2m-i+1}(2^{n-n_0-1}(b-x)).$$

2. Метод Бубнова—Галеркина для сингулярных интегральных уравнений

Зафиксируем некоторую константу $Q > 0$. Пусть $\alpha > 0$. Обозначим через $A(\alpha)$ совокупность всех определенных на квадрате $[a, b] \times [a, b]$ функций $K(x, y)$, каждая из которых m раз непрерывно дифференцируема, причем при $|x-y| \geq \alpha$ для всех ее производных l -го порядка ($0 \leq l \leq m$) справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^l K(x, y)}{\partial x^s \partial y^{l-s}} \right| \leq Q \frac{1}{|x-y|^l}. \quad (2.1)$$

Определение. Функцию $K(x, y)$ будем называть асимптотически m -гладкой функцией, если $K(x, y) \in A(\alpha)$ при некотором $\alpha > 0$.

Замечание 3. Параметр α в определении 3.1 играет роль регуляризующего параметра, предназначенного для сглаживания особенности при $x = y$.

Пусть $K(x, y)$ — асимптотически m -гладкая функция. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$u(x) + \int_a^b K(x, y)u(y)dy = f(x) \quad (2.2)$$

с заданной функцией f и неизвестной функцией u . Сложности численного решения уравнений такого вида (особенно многомерных) традиционными численными методами связаны с тем, что матрицы, получающиеся при их дискретизации, оказываются заполненными, т.е. состоящими из ненулевых элементов.

Рассмотрим для (2.2) метод Бубнова—Галеркина на базе построенных вейвлет-функций степени $m-1$. Зафиксируем некоторое натуральное $k > n_0$ и будем искать решение (2.2) в виде

$$u = \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0}-1} d_{0j} \phi_{j, n_0} + \sum_{i=1}^{k-n_0} \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0+i-1}-m} c_{ij} \psi_{j, n_0+i}. \quad (2.3)$$

Из условий

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_a^b K(x, y) \left(\sum_{j=-m+1}^{2^{n_0}-1} d_{0j} \phi_{j, n_0}(y) + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{k-n_0} \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0+i-1}-m} c_{ij} \psi_{j, n_0+i}(y) \right) \phi_{l, n_0}(x) dy dx = \\ & = \int_a^b f(x) \phi_{l, n_0}(x) dx, \quad -m+1 \leq l \leq 2^{n_0}-1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_a^b K(x, y) \left(\sum_{j=-m+1}^{2^{n_0}-1} d_{0j} \phi_{j, n_0}(y) + \sum_{i=1}^{k-n_0} \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0+i-1}-m} c_{ij} \psi_{j, n_0+i}(y) \right) \psi_{l, n}(x) dy dx = \\ & = \int_a^b f(x) \psi_{l, n_0}(x) dx, \quad -m+1 \leq l \leq 2^{n-1}-m, \quad n_0+1 \leq n \leq k. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Совокупность условий (2.4) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей порядка 2^k+m-1 , элементы которой имеют вид

$$\begin{aligned} & \int_a^b \phi_{j, n_0}(x) \phi_{l, n_0}(x) dx + \int_a^b \int_a^b K(x, y) \phi_{j, n_0}(y) \phi_{l, n_0}(x) dx dy, \\ & \int_a^b \int_a^b K(x, y) \phi_{j, n_0}(y) \psi_{l, n}(x) dx dy, \quad \int_a^b \int_a^b K(x, y) \psi_{j, n}(y) \psi_{l, n+s}(x) dx dy, \quad s \neq 0, \\ & \int_a^b \psi_{j, n}(x) \psi_{l, n}(x) dx + \int_a^b \int_a^b K(x, y) \psi_{j, n}(y) \psi_{l, n}(x) dx dy. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для классических систем функций в методе Галеркина числа (2.5) оказываются, в основном, ненулевыми и недостаточно малыми, чтобы ими можно было пренебречь и рассматривать СЛАУ (2.4) как разреженную. В [6] было показано, что в случае вейвлет большинство элементов матрицы СЛАУ малы по абсолютной величине. В настоящей работе мы получим асимптотически точные оценки этих элементов в случае рассматриваемых сплайновых вейвлет.

Замечание 4. Здесь и в последующих разделах мы будем рассматривать базисные вейвлет-функции, умноженные на нормирующие сомножители, т.е. сделаем для построенных ранее функций замены $\psi_{l, n} \rightarrow 2^{n/2} \psi_{l, n}$, $\phi_{l, n} \rightarrow 2^{n/2} \phi_{l, n}$, чтобы эти базисные функции имели в $L_2[a, b]$ нормы порядка $O^*(1)$.

Теорема 2. Найдется такая константа $C > 0$, не зависящая от k , что при $-m+1 \leq l \leq 2^{n-1}-m$, $-m+1 \leq j \leq 2^{n-1}-m$, $n_0+1 \leq n \leq k$ справедливы оценки

$$\left| \int_a^b \int_a^b K(x, y) \psi_{j, n}(y) \psi_{l, n}(x) dx dy \right| \leq C 2^{-n} (1 + |l - j|)^{-m}, \quad (2.6)$$

а при $-m+1 \leq j \leq 2^{n+s-1}$, $1 \leq s \leq k-n$

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b \int_a^b K(x, y) \psi_{j, n+s}(y) \psi_{l, n}(x) dx dy \right| \leq \\ & \leq C 2^{-(n+s(m+1/2))} (1 + |l - j/2^s|)^{-m}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Точно такие же оценки справедливы при замене $\Psi_{j,n}$ на Φ_{j,n_0} или $\Psi_{l,n}$ на Φ_{l,n_0} .

Доказательство. В дальнейшем константы, не зависящие от k (возможно различные!), будем обозначать одним символом C . Рассмотрим функцию $\mu_{j,n}(x) = \int_a^b K(x, y) \Psi_{j,n}(y) dy$. Пусть $x \in [x_i^n, x_{i+1}^n]$. В силу аппроксимационных свойств пространств сплайнов, финитности $\Psi_{j,n}$ и оценок (2.1) найдется такая функция $v(y) \in S(\Delta_{n-1}, m-1, 1)$, что

$$\max_{x \in \text{supp } \Psi_{j,n}} |K(x, y) - v(y)| \leq C(1 + |j - i|)^{-m}.$$

Но $\Psi_{j,n}$ ортогональна $S(\Delta_{n-1}, m-1, 1)$. Поэтому

$$\begin{aligned} |\mu_{j,n}(x)| &\leq \int_a^b |K(x, y) - v(y)| |\Psi_{j,n}(y)| dy \leq C(1 + |j - i|)^{-m} \int_a^b |\Psi_{j,n}(y)| dy \leq \\ &\leq C2^{-n/2}(1 + |j - i|)^{-m}, \quad x \in [x_i^n, x_{i+1}^n]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Отсюда

$$\left| \int_a^b \int_a^b K(x, y) \Psi_{j,n}(y) \Psi_{l,n}(x) dx dy \right| \leq \int_a^b |\mu_{j,n}(x)| |\Psi_{l,n}(x)| dx \leq C2^{-n}(1 + |l - j|)^{-m},$$

и оценка (2.6) установлена. Оценка (2.7) устанавливается аналогично. Теорема доказана.

Из теоремы следует, что матрица системы (2.4) является псевдоразреженной, т.е. в ней очень много малых по модулю элементов. Учитывая, что СЛАУ для интегральных уравнений Фредгольма второго рода хорошо обусловлены, пренебрегая этими малыми элементами, мы получим хорошую разреженную аппроксимацию этой матрицы, для которой можно применять алгоритмы для разреженных систем [13]. Последующие разделы посвящены более детальному анализу этих аспектов.

3. Разреженные аппроксимации матрицы СЛАУ в методе Бубнова—Галеркина

Обозначим через A матрицу СЛАУ (2.4). Представим ее в блочном виде

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k-n_0-1} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_{k-n_0-11} & \dots & A_{k-n_0-1k-n_0-2} & A_{k-n_0-1k-n_0-1} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Здесь A_{pq} — прямоугольные матрицы размерности $2^{n_0+p-2} \times 2^{n_0+q-2}$ при $p, q \geq 2$, размерности $2^{n_0} + 1 \times 2^{n_0} + 1$ при $p = q = 1$, размерности $2^{n_0} + 1 \times 2^{n_0+q-2}$ при $p = 1, q \geq 2$ и $2^{n_0+p-2} \times 2^{n_0} + 1$ при $q = 1, k \geq 2$. Элементы

блоков A_{pq} обозначим символами a_{ij}^{pq} . Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. Найдется такая константа $C > 0$, не зависящая от k , что при $i \neq j$, $p \leq q$ справедливы оценки

$$|a_{ij}^{pq}| \leq C 2^{-(p+(q-p)(m+1/2))} (1 + |i - j/(2^{q-p})|)^{-m}, \quad (3.2)$$

а при $p > q$ — оценки

$$|a_{ij}^{pq}| \leq C 2^{-(q+(p-q)(m+1/2))} (1 + |i - j/(2^{p-q})|)^{-m}. \quad (3.3)$$

Опираясь на теорему 3, рассмотрим различную разреженную аппроксимацию матрицы A . Зафиксируем некоторое достаточно малое $\varepsilon > 0$ и заменим нулями все элементы матрицы A , по модулю меньшие, чем ε . Обозначим получившуюся матрицу $\tilde{A}$.

Теорема 4. Количество ненулевых элементов матрицы $\tilde{A}$ есть величина $O(2^k \varepsilon^{-1/m})$. Найдется такая константа $C_1 > 0$, что в любой матричной p -норме $1 \leq p \leq \infty$ [2] справедливы оценки

$$\|A - \tilde{A}\|_p \leq C_1 \varepsilon^{(m-1)/m}.$$

Доказательство вытекает из (3.2)–(3.3) и оценок остатков ряда, элементы которого убывают по степенному закону.

Из полученных оценок следует, что при достаточно малых ε матрица $\tilde{A}$ аппроксимирует матрицу A с высокой точностью, сохраняя при этом разреженность.

4. Разреженные аппроксимации обратной матрицы СЛАУ в методе Бубнова—Галеркина

Специфика многих задач электродинамики состоит в том, что СЛАУ с одной и той же матрицей необходимо решать многократно для различных правых частей. В этом случае целесообразно построить точную или приближенную обратную матрицу с тем, чтобы каждый раз получать решение либо простым умножением на эту матрицу, либо с помощью быстроходящегося итерационного процесса. Приводимый ниже результат показывает, что обратная к матрице A матрица A^{-1} содержит очень много малых по модулю элементов и может быть с высокой точностью аппроксимирована разреженной матрицей.

Представим матрицу A^{-1} в блочном виде, аналогичном (3.1)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11,-1} & A_{12,-1} & \dots & A_{1k-n_0-1,-1} \\ A_{21,-1} & A_{22,-1} & A_{23,-1} & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_{k-n_0-11,-1} & \dots & A_{k-n_0-1k-n_0-2,-1} & A_{k-n_0-1k-n_0-1,-1} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Теорема 5. Для любого $\mu > 0$ найдется такая константа $C = C(\mu) > 0$, не зависящая от k , что при $i \neq j$, $p \leq q$ справедливы оценки

$$|a_{ij, -1}^{pq}| \leq C(2 - \mu)^{-(p+(q-p)(m+1/2))} (1 + |i - j/(2^{q-p})|)^{-m}, \quad (4.2)$$

а при $p > q$ — оценки

$$|a_{ij, -1}^{pq}| \leq C(2 - \mu)^{-(q+(p-q)(m+1/2))} (1 + |j - i/(2^{p-q})|)^{-m}. \quad (4.3)$$

Доказательство теоремы вытекает из общей теории операторов с псевдоразреженными матрицами [21].

Из теоремы 5 следует, что элементы матрицы A^{-1} подчиняются почти такому же закону убывания, как и элементы A . Поэтому матрица A^{-1} может быть приближена разреженной матрицей со свойствами, аналогичными матрице $\tilde{A}$ из предыдущего раздела.

Данное свойство делает очень перспективным применение вейвлет-систем для численного решения сингулярных уравнений.

5. Результаты численных экспериментов

С помощью метода вейвлет-Галеркина решалась задача (2.2), где

$$K(x, y) = 1/\sqrt{(x+y)^2 + (\alpha)^2}, \quad f(x) = x + \sqrt{(b-x)^2 + \alpha^2} - \sqrt{(a-x)^2 + \alpha^2} + \frac{1}{2} \ln |b-x + \sqrt{(b-x)^2 + \alpha^2}| - \frac{1}{2} \ln |a-x + \sqrt{(a-x)^2 + \alpha^2}|. \quad (5.1)$$

Точное решение этой задачи имеет вид $u(x) = x$. Матрица A СЛАУ (2.4) заменялась разреженной аппроксимацией $\tilde{A}$, элементы $\tilde{a}_{ij}$ определяются формулами

$$\tilde{a}_{ij} \begin{cases} , a_{ij}, & |a_{ij}| \geq T, \\ 0, & |a_{ij}| < T, \end{cases}$$

и решалась СЛАУ с матрицей $\tilde{A}$. Результаты счета сведены в три таблицы для вейвлет первой, второй и третьей степени соответственно. В каждой из клеток таблиц 1–3 содержатся два числа, первое из которых — отношение числа ненулевых элементов матрицы $\tilde{A}$ к числу всех элементов матрицы, характеризует разреженность матрицы, а второе — погрешность приближенного решения в максимум-норме, характеризует близость матриц A и $\tilde{A}$. В каждой таблице по вертикали указана величина барьера T , а по горизонтали — число узлов самого мелкого разбиения отрезка $[a, b]$.

Таблица 1

	64	128	256
0.1	0.11;0.22	0.03;0.16	0.01;0.08
0.01	0.16;0.03	0.09;0.05	0.03;0.03
0.001	0.18;0.025	0.10;0.03	0.05;0.03
0.0001	0.22;0.006	0.12;0.009	0.07;0.006
0.00001	0.32;0.001	0.17;0.0018	0.09;0.0001

Таблица 2

	64	128	256
0.1	0.17;1.0	0.10;1.0	0.05;1.0
0.01	0.21;0.021	0.13;0.002	0.02;0.02
0.001	0.27;0.0002	0.16;0.0003	0.09;0.005
0.0001	0.35;0.0002	0.19;0.0001	0.10;0.0003
0.00001	0.43;0.0002	0.26;0.0001	0.13;0.00001

Таблица 3

	64	128	256
0.1	0.16;1.0	0.13;1.0	0.09;1.0
0.01	0.22;1.0	0.15;1.0	0.10;1.0
0.001	0.29;1.0	0.17;1.0	0.11;1.0
0.0001	0.32;0.000001	0.19;0.00001	0.12;0.000001
0.00001	0.36;0.0000001	0.22;0.000001	0.13;0.0000001

Литература

- [1] Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. 1996. Т. 166. №11. С. 1145–1170.
- [2] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.
- [3] Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб: Изд-во ВУС, 1999. 204 с.
- [4] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1977.
- [5] Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. М.: СОЛОН-Р, 2002.
- [6] Beylkin G., Coifman R., Rochlin V. Fast wavelet transforms and numerical algorithms // Comm. Pure. Appl. Math. 1991. V. 44. P. 141–183.
- [7] Бор К. де Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985.
- [8] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука. 1984.
- [9] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
- [10] Кравченко В.Ф., Рвачев В.А. Вейвлет-системы и их применение в обработке сигналов // Зарубежная радиоэлектроника. 1996. №4. С. 3–20.
- [11] Новиков И.Я., Стечкин С.Б. Основы теории всплесков // Успехи математических наук. 1998. Т. 53. №6. С. 53–128.
- [12] Петухов А.П. Введение в теорию базисов всплесков. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999.
- [13] Писсанецки С. Технология разреженных матриц. М.: Мир. 1988.
- [14] Блатов И.А., Стрыгин В.В. Элементы теории сплайнов и метод конечных элементов для задач с погранслоем. Воронеж: Изд-во ВГУ. 1997. 406 с.

- [15] Demko S. Inverses of band matrices and local convergence of spline projection // SIAM J. Numer. Anal. 1977. 14. No. 4. P. 616–619.
- [16] Daubechies I. Orthonormal basis of compactly supported wavelets // Comm. Pure Appl. Math. 1988. V. 46. P. 909–996.
- [17] Daubechies I. Ten lectures on wavelets. CBMS-NSF. Regional conference series in applied mathematics, SIAM. 1992.
- [18] Mallat S. Multiresolution approximation and wavelets. Trans. AMS. 1989. 315. P. 69–88
- [19] Meyer Y. Ondelettes et operateurs. Paris: Hermann. 1990.
- [20] Schoneberg I.J. Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions // Quart. Appl. Math., 1946. 4. P. 45–46, 112–141.
- [21] Блатов И.А. Об алгебрах операторов с псевдоразреженными матрицами и их приложениях // Сибирский матем. журнал. 1996. Т. 37. № 1. С. 36–59.

Поступила в редакцию 15/III/2004;
в окончательном варианте — 15/III/2004.

ON ESTIMATIONS OF MATRIX UNITS IN WAVELET-GALERKIN METHOD FOR SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS

© 2004 I.A. Blatov³ N.V. Bubnova⁴

The Bubnov–Galerkin method based on wavelet splines for singular integral equations is considered. Matrices of systems of linear algebraic equations are investigated. Rarefied approximations based on barrier cut applied to these matrices are received. The dependence of rarefaction of a matrix and approximate solution accuracy on magnitude of a barrier is analyzed numerically.

Paper received 15/III/2004.
Paper accepted 15/III/2004.

³Blatov Igor Anatolievich (blatov@ssu.samara.ru), Dept. of Differential Equations and Theory of Control, Samara State University, Samara, 443011, Russia.

⁴Bubnova Nataliya Viacheslavovna, Dept. of Higher Mathematics, Volga State Academy of Telecommunications and Informatics, Samara, 443090, Russia.