

КЛАССИЧЕСКИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ПОЛЯ: МОДЕЛЬ ВНЕ ЛАГРАНЖЕВОЙ ФОРМУЛИРОВКИ¹

© 2004 С.В. Талалов²

На примере конкретной модели рассмотрена общая схема построения теории взаимодействующих полей в двумерном пространстве-времени, (нелинейные) уравнения движения которых не являются уравнениями Лагранжа-Эйлера для какого-либо функционала действия. Решена задача Коши в классе начальных данных, имеющих ненулевые пределы на пространственных бесконечностях и, вообще говоря, изолированные особенности.

1. Введение

В работах [1, 2] рассматривалась нелинейная система дифференциальных уравнений для действительных функций $\Phi_i = \Phi_i(\xi^0, \xi^1)$:

$$\partial_+ \partial_- \Phi_i - \exp\left(\sum_j k_{ij} \Phi_j\right) = 0, \quad i = 1 \dots n, \quad (1.1)$$

где k_{ij} — некоторая $n \times n$ матрица (в цитированных работах матрица k_{ij} являлась матрицей Картана). Здесь и далее $\partial_{\pm} = \partial/\partial \xi_{\pm}$, $\xi_{\pm} = \xi^1 \pm \xi^0$. В том случае, если $n = 1$, система (1.1) вырождается в известное уравнение Лиувилля (УЛ). Последнее рассматривалось многими авторами как модель классического поля с нелинейным самодействием в двумерном пространстве-времени, причем изучались модели как в классе регулярных решений (см., например, [3]), так и в классе сингулярных [4]. Возникает вопрос, возможно ли рассматривать уравнения (1.1) как уравнения взаимодействующих полей? Если да, то в каком смысле? Проблема здесь связана с тем, что при $n > 1$ система (1.1) не является системой экстремалей для некоторого функционала действия $S = S(\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Phi_{1,\mu}, \dots)$, где Φ_i — независимые переменные. Действительно, обозначив левые части (1.1) как L_i , находим,

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором В.А. Салеевым.

²Талалов Сергей Владимирович (svtalalov@visit.ru), кафедра теоретической и прикладной физики Тольяттинского государственного университета, 445667, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14.

что

$$\frac{\delta L_i}{\delta \Phi_j} \neq \frac{\delta L_j}{\delta \Phi_i};$$

это означает [5], что $L_i \neq \delta S / \delta \Phi_i$ ни при каком S . Интерес такой интерпретации мотивирован как нетривиальностью собственно системы (1.1) при $n > 1$, так и нетривиальностью соответствующей полевой модели уже при $n = 1$.

Предлагаемая статья посвящена исследованию данного вопроса. Для того чтобы сделать вводимые конструкции наглядными, мы ограничимся случаем $n = 2$, заметив, что приведенная здесь схема построения теории работает и при $n > 2$. Вначале обратим внимание на тот факт, что для теории поля, связанной с УЛ, существует нетривиальное обобщение, основанное на мультипликативном объединении лиувиллевского лагранжиана взаимодействия и лагранжиана взаимодействия безмассовой модели Тирринга:

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{i}{2} \bar{\Psi} \overleftrightarrow{\gamma}^\nu \partial_\nu \Psi - 2J_\mu J^\mu \exp \Phi. \quad (1.2)$$

Здесь и далее $\gamma^0 = \sigma_1$, $\gamma^1 = i\sigma_2$, Ψ — комплексный спинор в двумерном пространстве-времени с компонентами $\Psi^\pm$, а J_μ — спинорный ток. Модель с лагранжианом (1.2) впервые исследована в работе [6] как развитие методов, предложенных ранее в работе [7]. Подчеркнем, что модель, основанная на лагранжиане (1.2), не является тривиальным расширением теории Лиувилля, обусловленным лишь добавлением дополнительного поля. Действительно, модель (1.2) отличается от указанной теории, во-первых, гамильтоновой структурой [8] и, во-вторых, наличием семейства трансляционно-инвариантных решений [6] $\Phi \equiv \text{const}$, $\Psi \equiv 0$. Напомним, УЛ таковых не имеет, что является одной из причин, по которой соответствующая (явно решаемая на классическом уровне) полевая модель имеет большое число квантовых версий — различных у разных авторов.

2. Общий подход к проблеме

Таким образом, с точки зрения последующей интерпретации теории как теории взаимодействующих полей, представляется более интересным рассматривать не систему (1.1) при $n = 2$, а систему

$$-4\partial_+\partial_-\Phi_i + J_{\mu i} J_i^\mu \exp(2\Phi_i - \Phi_{3-i}) = 0, \quad (2.1)$$

$$i\gamma^\rho \partial_\rho \Psi_i - 4\gamma^\mu J_{\mu i} \Psi_i \exp(2\Phi_i - \Phi_{3-i}) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.2)$$

где (при каждом значении "изотопического" индекса $i = 1, 2$) Φ_i — действительное скалярное поле, Ψ_i — комплексный 2-спинор, а $J_i^\mu = \bar{\Psi}_i \gamma^\mu \Psi_i$ — соответствующий спинорный ток. Такая система является прямым обобщением уравнений движения для лагранжиана (1.2), однако сама, как и (1.1),

лагранжевой не является. Введем по аналогии с работой [6] обозначения для модулей и фаз компонент двумерных спиноров:

$$\Psi_i^\pm = \sqrt{\rho_i^\pm} \exp(4i\alpha_i^\pm).$$

В таких обозначениях рассматриваемая система переписывается в виде:

$$\partial_+ \partial_- \Phi_i - \rho_i^+(\xi_+) \rho_i^-(\xi_-) \exp(2\Phi_i - \Phi_{3-i}) = 0, \quad (2.3)$$

$$\partial_\pm \alpha_i^\mp \mp \rho_i^\pm(\xi_\pm) \exp(2\Phi_i - \Phi_{3-i}) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.4)$$

Здесь мы явно учли решения тривиальных уравнений $\partial_\pm \rho_i^\mp = 0$, которые, так же, как и (2.4), следуют из (2.2). Если далее мы потребуем выполнения строгих неравенств $\rho_i^\pm > 0$, $i = 1, 2$, множители $\rho_i^\pm$ в уравнениях (2.3) могут быть обращены в единицы преобразованием

$$\Phi_i \longrightarrow \tilde{\Phi}_i = \Phi_i - \frac{1}{3} \ln(\rho_1^+ \rho_1^-)^{3-i} (\rho_2^+ \rho_2^-)^i, \quad i = 1, 2. \quad (2.5)$$

В нашем случае функции $\rho_i^\pm = |\Psi_i^\pm|^2$ являются не "параметрами", а динамическими переменными. Поэтому естественно считать

$$\rho_i^\pm(\xi_\pm) \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.6)$$

причем равенство нулю данных величин может иметь место не только в точках, но и на множествах ненулевой меры. Действительно, трансляционно-инвариантные решения (т.е. "классические вакуумы") системы (2.1)–(2.2) таковы:

$$\Phi_i \equiv C_i = \text{const}, \quad \Psi_i \equiv 0.$$

Поэтому представляется естественным рассматривать решения системы (2.1)–(2.2) в классе функций, обладающих таким асимптотическим поведением:

$$\Phi_i(\xi^0, \xi^1) - C_i^{[\pm]} \xrightarrow[\xi^1 \rightarrow \pm\infty]{} 0, \quad \Psi_i(\xi^0, \xi^1) \xrightarrow[|\xi^1| \rightarrow \infty]{} 0, \quad (2.7)$$

где $C_i^{[\pm]}$ — некоторые константы, а стремление к нулю при $|\xi| \rightarrow \infty$ происходит быстрее любой степени $|\xi|^{-n}$. Такое поведение означает, что сколь угодно малыми вариациями $\delta\Psi_i$ мы можем сделать $\rho_i^\pm \equiv 0$, например, вне некоторого конечного отрезка. Таким образом, далее везде мы считаем, что выполнены неравенства не сильнее, чем (2.6). Чтобы окончательно фиксировать функциональный класс $\mathfrak{F}$, в котором мы намерены исследовать решения системы (2.3)–(2.4), укажем, что функции $\rho_i^\pm$ являются регулярными (по крайней мере, непрерывно-дифференцируемыми), а функции Φ_i и $\alpha_i^\pm$, кроме ненулевых асимптотик, могут иметь, вообще говоря, изолированные (по переменной ξ^1) особенности. Интерпретация такого рода сингулярностей как классических взаимодействующих частиц, предложенная в [4] на примере уравнения Лиувилля, делает указанный класс решений особенно привлекательным для исследования. К уточнению структуры особенностей решений мы вернемся ниже.

Преобразования (2.5) — частный случай более общих преобразований, образующих группу инвариантности уравнений (2.3)–(2.4).

Предложение 1. Пусть функции $\Phi_i(\xi_+, \xi_-)$, $\rho_i^\pm(\xi_\pm)$, $\alpha_i^\pm(\xi_\pm)$ удовлетворяют системе (2.3)–(2.4), а дифференцируемые функции $f_i^\pm(\xi)$, $a_i^\pm(\xi)$ ($i = 1, 2$) и $A_\pm(\xi)$, где $A'_+A'_- > 0$, произвольны. Тогда преобразование

$$\left(\Phi_i, \rho_i^\pm, \alpha_i^\pm\right) \longrightarrow \left(\tilde{\Phi}_i, \tilde{\rho}_i^\pm, \tilde{\alpha}_i^\pm\right) \quad (2.8)$$

вновь дает решение данной системы, если

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\xi_+, \xi_-) &= \Phi(A_+(\xi_+), A_-(\xi_-)) + f^+_i(\xi_+) + f^-_i(\xi_-), \\ \tilde{\rho}_i^\pm(\xi_\pm) &= \rho_i^\pm(A_\pm(\xi_\pm))A'_\pm(\xi_\pm) \exp\left(-2f_i^\pm(\xi_\pm) + f_{3-i}^\pm(\xi_\pm)\right), \\ \tilde{\alpha}_i^\pm(\xi_+, \xi_-) &= \alpha_i^\pm(A_+(\xi_+), A_-(\xi_-)) \exp\left(2f_i^\pm(\xi_\pm) - f_{3-i}^\pm(\xi_\pm)\right) + a_i^\pm(\xi_\pm). \end{aligned}$$

Доказательство заключается в прямой проверке сделанного утверждения.

Дифференциальные уравнения (2.1)–(2.2) задают в выбранном классе $\mathfrak{F}$ некоторую ξ^0 -динамику. Будем считать, что данная ξ^0 -динамика определяет в $1+1$ -мерном пространстве-времени *классические взаимодействующие поля*, если выполнены следующие условия.

- 1) Система ковариантна при соответствующих $2D$ преобразованиях Пуанкаре.
- 2) Динамика является гамильтоновой. Последнее означает, что в теории существуют такие объекты, как фазовое пространство $\mathcal{H}$, координаты которого однозначно параметризуют функции из рассматриваемого класса $\mathfrak{F}$, а также гамильтониан $H : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ и скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$, такие, что

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \xi^0} = \{H, \Phi_i\}, \quad \frac{\partial \Psi_i}{\partial \xi^0} = \{H, \Psi_i\}. \quad (2.9)$$

Обратим внимание, что скобки Пуассона, которые, конечно, должны быть антисимметричными и удовлетворять тождеству Якоби, могут быть вырожденными. Если это так, то гамильтоновость теории следует понимать в "в слабом смысле" [9], что вполне достаточно, например, для последующего канонического квантования. Кроме этого, в фазовом пространстве $\mathcal{H}$ могут быть те или иные связи.

- 3) В теории существуют динамические переменные $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$, имеющие смысл соответственно генераторов пространственных сдвигов и бустов. Скобки Пуассона величин H , $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ образуют "2D алгебру Пуанкаре" — алгебру пространственно-временной симметрии пространства $E_{1,1}$.
- 4) Рассеяние в теории не тривиально. Это означает, что существуют классические *in*- и *out*-поля, причем $\Phi_i^{out} \neq \Phi_i^{in}$ и т.д.. В этом случае мы определяем классическую S -матрицу как лиев оператор $L_S : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$, $L_S \Phi = \{L_S, \Phi\}$, такой, что

$$\Phi_i^{out} = e^{L_S} \Phi_i^{in}, \quad \Psi_i^{out} = e^{L_S} \Psi_i^{in}. \quad (2.10)$$

Для рассматриваемой динамической системы пункт 1, конечно, имеет место, так как уравнения (2.1)–(2.2) являются релятивистски инвариантными в двумерном пространстве-времени. Что же касается гамильтоновости системы (2.1)–(2.2), то существование гамильтоновой структуры — даже в указанном слабом смысле — на соответствующем множестве решений здесь не является тривиальным. Причины этого таковы.

- Рассматриваемая система, как отмечалось, не является лагранжевой. Следовательно, гамильтониан и канонические гамильтоновы переменные здесь нельзя ввести стандартным способом — преобразованием Лежандра.
- Выбранный класс функций $\mathfrak{F}$ не позволяет рассматривать поля $\Phi_i, \dots$ в качестве независимых переменных, параметризующих фазовое пространство, и определять в их терминах скобки Пуассона. Действительно, сделав это, мы должны иметь корректно определенные производные $\delta F / \delta \Phi_i$ для произвольного функционала F . Варьируя в классе $\mathfrak{F}$, например, функцию Φ_i , мы обязаны варьировать как точки особенностей $\zeta_k, k = 1, \dots, N$ (допустим, что их N штук), так и константы $C_i^\pm$. Это, в свою очередь, означает, что вариация $\delta \Phi_i$ имеет уже не N , а $2N$ точек особенностей и, кроме этого, ненулевые пределы при $|\xi| \rightarrow \infty$. Таким образом, введение понятия "малой вариации", на котором основано понятие вариационной производной [5], представляется здесь проблематичным.

3. Задача Коши

Затем мы построим решение задачи Коши для системы (2.1)–(2.2). Сразу заметим, что далее представляется более удобным работать не с уравнениями данной исходной системы, а с уравнениями (2.3)–(2.4). Вначале докажем следующее

Предложение 2. Рассмотрим киральное поле $K = K(\xi^0, \xi^1)$, принимающее значения в группе $SL(3, R)$ и удовлетворяющее уравнению

$$\partial_- (K^{-1} \partial_+ K) = 0. \quad (3.1)$$

Пусть матрицы $\mathcal{F} = \text{diag} (e^{-\Phi_1}, e^{\Phi_1 - \Phi_2}, e^{\Phi_2})$,

$$\mathcal{A}_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_-^{-1} & 1 & 0 \\ \alpha_-^{-3} & \alpha_-^{-2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_+^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_+^{-1} & \alpha_+^{-3} \\ 0 & 1 & \alpha_+^{-2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

задают для матрицы K разложение Гаусса так, что в каждой точке (ξ^0, ξ^1) выполнено

$$K = \mathcal{A}_- \mathcal{F} \mathcal{A}_+^{-1}. \quad (3.2)$$

Определим по функциям $\alpha_i^\pm$ и Φ_i функции $\rho_i^\pm$ посредством формул

$$\rho_i^\pm = \pm \partial_\pm \alpha_i^\mp \exp(2\Phi_i - \Phi_{3-i}), \quad i = 1, 2. \quad (3.3)$$

Тогда уравнение (3.1), дополненное уравнениями

$$\partial_{\pm}\alpha_3^{\mp} - \alpha_2^{\mp}\partial_{\pm}\alpha_1^{\mp} = 0, \quad (3.4)$$

эквивалентно системе (2.3)–(2.4).

Доказательство утверждения хотя и громоздко, но достаточно просто. Оно заключается в подстановке разложения Гаусса для матрицы $K(\xi^0, \xi^1)$ в уравнение (3.1) с учетом равенств (3.4).

Следствие 1. Из доказанного предложения 2 следует, что по заданным решениям $\Phi_i(\xi^0, \xi^1)$, $\rho_i^{\pm}(\xi_{\pm})$ и $\alpha_i^{\pm}(\xi^0, \xi^1)$, где $i = 1, 2$, системы (2.3)–(2.4) матрица $K = K(\xi^0, \xi^1)$ восстанавливается с точностью до преобразований

$$K(\xi^0, \xi^1) \longrightarrow \tilde{K}(\xi^0, \xi^1) = \mathcal{G}_{-,3}(\xi_-)K(\xi^0, \xi^1)\mathcal{G}_{+,3}^{-1}(\xi_+), \quad (3.5)$$

в которых матрицы $\mathcal{G}_{\pm,3}$ построены по произвольным функциям $a_3^{\pm}(\xi_{\pm})$ так:

$$\mathcal{G}_{-,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_3^- & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}_{+,3}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_3^+ \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, для восстановления матрицы $K = K(\xi^0, \xi^1)$ необходимы также и функции $\alpha_3^{\pm}(\xi^0, \xi^1)$, которые восстанавливаются по заданным $\alpha_1^{\pm}$ и $\alpha_2^{\pm}$ в соответствии с (3.4) с точностью до сдвигов

$$\alpha_3^{\pm}(\xi^0, \xi^1) \longrightarrow \tilde{\alpha}_3^{\pm}(\xi^0, \xi^1) = \alpha_3^{\pm}(\xi^0, \xi^1) + a_3^{\pm}(\xi_{\pm}).$$

Легко проверить, что такой произвол эквивалентен (3.5).

Замечание. Известно, что разложение Гаусса (3.2) существует и единственно (с точностью до замены верхне-треугольных матриц на нижне-треугольные) для всех матриц $K \in SL(3, R)$, за исключением тех, у которых главные миноры M_i , $i = 1, 2$ обращаются в ноль. В нашем случае $M_i = \exp(-\Phi_i)$. Таким образом, разложение (3.2) определяет по заданному киральному полю $K = K(\xi^0, \xi^1)$ регулярные поля Φ_i и $\alpha_i^{\pm}$ во всех точках (ξ^0, ξ^1) -плоскости за исключением тех, в которых

$$\exp(-\Phi_i(\xi^0, \xi^1)) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.6)$$

Далее мы будем считать, что разложение Гаусса справедливо при всех (ξ^0, ξ^1) , расширив класс регулярных функций до класса $\mathfrak{F}$ сингулярных. Таким образом, структура разложения (3.2) делает естественным существование особенностей у функций Φ_i — таких, что равенства (3.6) могут иметь место на некоторых подмножествах. При этом, если у функции Φ_i в некоторой точке ζ имеется особенность, то соответствующие функции $\alpha_i^{\pm}$ также должны быть сингулярны в этой точке. Что касается конкретного вида разложения указанных величин в окрестности точки ζ , то он должен быть выбран так, чтобы все элементы матрицы $K \in SL(3, R)$, построенной по сингулярным функциям Φ_i и $\alpha_i^{\pm}$, имели не более чем устранимые точки разрыва. В настоящей работе мы не будем обсуждать ни структуру, ни динамику таких особенностей, ограничившись лишь констатацией допустимости их существования.

Перейдем теперь собственно к задаче Коши для исследуемой системы.

Предложение 3. Пусть даны произвольные функции $\rho_i^\pm(\xi)$, $\Phi_i(\xi)$, $\dot{\Phi}_i(\xi)$ и $\alpha_i^\pm(\xi)$, которые имеют следующие свойства.

- 1) Функции $\rho_i^\pm(\xi) \geq 0$ определены и непрерывно-дифференцируемы всюду, а функции $\Phi_i(\xi)$, $\dot{\Phi}_i(\xi)$ и $\alpha_i^\pm(\xi)$ — всюду за исключением, быть может, конечного числа точек ζ_k , $k = 1, \dots, N$.
- 2) Структура особенностей в точках ζ_k такова, что построенные с использованием (3.2) по данным функциям элементы матриц

$$Q_+(\xi) = K^{-1} \partial_+ K, \quad Q_- = -(\partial_- K) K^{-1} \quad (3.7)$$

имеют не более чем устранимые точки разрыва. При построении матриц $Q_\pm(\xi)$ необходимо считать, что $\partial_{\xi^0} \Phi_i(\xi) = \dot{\Phi}_i(\xi)$, а величины $\partial_{\xi^0} \alpha_i^\pm(\xi)$ определены по функциям $\rho_i^\pm(\xi)$, $\Phi_i(\xi)$ и $(\alpha_i^\pm(\xi))'$ в соответствии с (2.4) формулами

$$\partial_{\xi^0} \alpha_i^\pm(\xi) = \pm (\alpha_i^\pm(\xi))' + 2\rho_i^\mp(\xi) \exp(2\Phi_i(\xi) - \Phi_{3-i}(\xi)).$$

- 3) При $\xi \rightarrow +\infty$ все рассматриваемые функции убывают быстрее любой степени ξ^{-1} ; при $\xi \rightarrow -\infty$ функции $\dot{\Phi}_i(\xi)$ и $\rho_i^\pm(\xi)$ также убывают быстрее любой степени ξ^{-1} , а для функций $\Phi_i(\xi)$ и $\alpha_i^\pm(\xi)$ существуют константы c_i и $a_i^\pm$ такие, что

$$\lim_{\xi^1 \rightarrow -\infty} \xi^n [\Phi_i(\xi) - c_i] = 0, \quad \lim_{\xi^1 \rightarrow -\infty} \xi^n [\alpha_i^\pm(\xi) - a_i^\pm] = 0 \quad \forall n.$$

Тогда решение задачи Коши для системы (2.3)–(2.4) с начальными данными $\Phi_i(\xi)$, $\dot{\Phi}_i(\xi)$, $\rho_i^\pm(\xi)$ и $\alpha_i^\pm(\xi)$ существует и является единственным.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{E}$ есть множество регулярных функций $K = K(\xi)$, принимающих значения в группе $SL(3, R)$. Общая схема решения рассматриваемой задачи Коши такова:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F} & \xrightarrow{\xi^0=0} & \mathfrak{E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{F} & \xleftarrow{\xi^0 \neq 0} & \mathfrak{E} \end{array}$$

Рассмотрим отдельные элементы данной диаграммы. Отображение

$$\mathfrak{F} \xrightarrow{\xi^0=0} \mathfrak{E}$$

рассмотрено выше (см. следствие 1) при любом ξ^0 . Так, матрицы (3.7) могут быть построены по начальным данным $\rho_i^\pm(\xi)$, $\Phi_i(\xi)$, $\dot{\Phi}_i(\xi)$ и $\alpha_i^\pm(\xi)$ с точностью до преобразований

$$Q \longrightarrow \tilde{Q} = \mathcal{G}_3 Q \mathcal{G}_3^{-1} - \mathcal{G}_3' \mathcal{G}_3^{-1}, \quad (3.8)$$

где матрицы $\mathcal{G}_3$ определены при формулировке следствия 1.

Решим задачу Коши для уравнения второго порядка (3.1) в классе регулярных полей. Общее решение данного уравнения, очевидно, есть $K(\xi^0, \xi^1) = C_-(\xi_-) C_+(\xi_+)$, где $C_\pm(\xi)$ — произвольные регулярные функции со

значениями в группе $SL(3, R)$. Пусть, далее, $Q_{\pm}(\xi)$ — матрицы, построенные в соответствии с (3.7) по начальным данным $K(\xi)$ и $\dot{K}(\xi)$. Заметим, что из определения (3.7) следует, что матричные элементы $K_{ij}(\xi)$ удовлетворяют системе девяти уравнений 1-го порядка:

$$K' = KQ_+ - Q_-K. \quad (3.9)$$

Рассмотрим пару вспомогательных линейных систем первого порядка 3×3 :

$$T'_{\pm}(\xi) + Q_{\pm}(\xi)T_{\pm}(\xi) = 0, \quad \det T_{\pm} = 1. \quad (3.10)$$

Произвол в выборе матриц решений $T_{\pm}(\xi)$ данных систем фиксируем условием $T_{\pm}(+\infty) = I_3$, где I_n означает единичную матрицу $n \times n$. Решение рассматриваемой регулярной задачи Коши дается формулой

$$K(\xi^0, \xi^1) = T_-(\xi_-)T_+^{-1}(\xi_+).$$

Действительно, построенная таким способом матрица при $\xi^0 = 0$ удовлетворяет, как и $K(\xi)$, системе (3.9). Поскольку

$$\lim_{\xi^1 \rightarrow +\infty} K(\xi^1) = \lim_{\xi^1 \rightarrow +\infty} K(0, \xi^1) = I_3,$$

в силу единственности начальной задачи для систем 1-го порядка имеем $K(\xi) = K(0, \xi)$. Далее, дифференцируя построенную матрицу по переменной ξ^0 и вновь полагая $\xi^0 = 0$, находим $\dot{K}(\xi) = \partial_{\xi^0} K(\xi^0, \xi)|_{\xi^0=0}$. Рассматриваемая регулярная задача Коши (отображение $\mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{E}$ в диаграмме) решена. Далее, в соответствии со следствием 1, необходимо построить отображение

$$\mathfrak{E} \xrightarrow{\xi^0} \mathfrak{F}$$

и восстановить решения системы (2.3)–(2.4) при $\xi^0 \neq 0$. Легко убедиться, что возникающий произвол скажется здесь только на восстановленных (попутно) функциях $\alpha_3^{\pm}(\xi^0, \xi^1)$, которые, напомним, удовлетворяют дополнительным уравнениям (3.4), а не исследуемой системе.

Таким образом, задача Коши для исходной системы нелинейных уравнений (2.3)–(2.4) решена. К доказательству гамильтоновости соответствующей динамики, а также к вопросу о рассеянии, которое эта динамика порождает, автор планирует вернуться в дальнейшем.

Литература

- [1] Лезнов А.Н. О полной интегрируемости одной нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных в двумерном пространстве. Препринт ИФВЭ 79–12. Серпухов, 1979.
- [2] Лезнов А.Н., Савельев М.В. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985. 280 с.
- [3] D'Hoker E., Jackiw R. Classical and quantal Liouville field theory // Phys. Rev. D. 1882. V. 26. No. 12. P. 3517–3542.
- [4] Джорджадзе Г.П., Погребков А.К., Поливанов М.К. Сингулярные решения уравнения $\square\varphi + (m^2/2)\exp\varphi$ и динамика особенностей // ТМФ. 1979. Т. 40. №2. С. 221–234.

- [5] Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.
- [6] Погребков А.К., Талалов С.В. Модель "ТиррингхЛиувиль" // ТМФ. 1987. Т. 70. №3. С. 342–350.
- [7] Погребков А.К. Двумерная классически решаемая модель с нетривиальным рассеянием // ТМФ. 1972. Т. 12. №2. С. 209–213.
- [8] Талалов С.В. Гамильтонова структура модели "ТиррингхЛиувиль" // ТМФ. 1987. Т. 71. №3. С. 357–370.
- [9] Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. Гамильтоновский формализм для нелинейных волн // УФН. 1997. Т. 167. №11. С. 1137–1167.

Поступила в редакцию 15/IV/2004;
в окончательном варианте — 15/IV/2004.

CLASSICAL INTERACTED FIELDS: NON-LAGRANGIAN FORMULATION MODEL³

© 2004 S.V. Talalov⁴

The general scheme of interacted field theory in two-dimensional time-space, which field equations are not Lagrange-Euler equations for any action function is considered. The Cauchy problem for initial data which admit both non-zero limits on the space infinity and singularities at some points is resolved.

Paper received 15/IV/2004.

Paper accepted 15/IV/2004.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math) Prof. V.A. Saleev.

⁴Talalov Sergey Vladimirovich (svtalalov@visit.ru), Dept. of Theoretical and Applied Physics, Togliatti State University, Togliatti, 445667, Russia.