

ДИЛАТАНСИЯ ГЕОМАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ РАЗУПРОЧНЕНИЯ¹

© 2004 Е.И. Кондратьева, Ж.Ы. Маматов, Б.А. Рычков²

С позиции концепции скольжения и разрыхления рассмотрены кинематические и прочностные характеристики горных пород на примере поведения цилиндрических образцов при трехосном сжатии. Получены соотношения для определения ориентации плоскости среза при разрушении. Расчетные значения угла среза достаточно хорошо соответствуют известным экспериментальным данным при сложном напряженном состоянии.

Наиболее существенной особенностью в поведении горных пород является эффект увеличения объема (дилатансия) в процессе необратимой деформации в условиях трехосного неравнокомпонентного сжатия [1].

Кинематика неупругой деформации горных пород заключается в том, что ее можно моделировать как некоторые смещения прослоек материала в определенных направлениях $\mathbf{l}$, которые сопровождаются удалением их друг от друга в направлении $\mathbf{n}$, ортогональном $\mathbf{l}$. В результате при элементарном скольжении прослоек материала в направлении $\mathbf{l}$ наряду с пластической деформацией сдвига [2] возникает и относительное удлинение $d\Gamma_n$, что приводит к разрыхлению материала.

Согласно упрощенной концепции скольжения [3], вначале рассматриваются локальные сдвиги как плоскопараллельные смещения прослоек материала в условиях плоскопластической деформации.

Следуя Мору, будем считать, что скольжения возникают, если на некоторой площадке касательное τ_η и нормальное σ_η напряжения удовлетворяют условию

$$\tau_\eta = S_0 - \mu\sigma_\eta, \quad (1)$$

где μ и S_0 — материальные константы, определяемые из эксперимента. Правая часть формулы (1) называется начальным сопротивлением сдвигу S_0 .

В плоскости, повернутой относительно площадки действия максимального касательного напряжения T на угол β , нормальное и касательное на-

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

²Кондратьева Елена Николаевна, Маматов Жаныбек Ысакович, Рычков Борис Александрович (djanibek@mail.ru), кафедра механики, Кыргызский государственный университет строительства, транспорта и архитектуры (КГУСТА), Кыргызстан, 720020, ул. Мылдыбаева, 34.

пряжения определяются формулами

$$\begin{aligned}\sigma_\beta &= \sigma_0 + T \sin 2\beta; \quad \tau_\beta = T \cos 2\beta; \\ \sigma_0 &= (\sigma_1 + \sigma_2)/2; \quad T = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 \quad (\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 > 0).\end{aligned}\quad (2)$$

Учитывая (2), условие текучести (1) представим в виде

$$S_0 - \mu(\sigma_0 + T \sin 2\beta_0) = T \cos 2\beta_0, \quad (3)$$

где β_0 — неизвестный угол, определяющий направление первого сдвига, отсчитываемый от направления действия максимального касательного напряжения T .

При первом скольжении касательные к кривым $S_\eta = S_\eta(\beta)$ и $\tau_\eta = \tau_\eta(\beta)$ совпадут, т.е.

$$dS_\eta/d\beta = d\tau_\eta/d\beta, \quad \text{при } \beta = \beta_0, \quad (4)$$

$$S_\eta = S_0 - \mu(\sigma_0 + T \sin 2\beta_0), \quad (5)$$

отсюда вытекает

$$\tan 2\beta_0 = \mu. \quad (6)$$

Таким образом, величина угла β_0 , характеризующего направление первого сдвига, определяется параметром μ . Его величину будем считать зависящей от вида напряженного состояния, который будем задавать отношением $\sigma_2/\sigma_1 = c$. Из соотношений (3) и (6) следует

$$T = (S_0 - \mu\sigma_0)/\sqrt{1 + \mu^2}, \quad (7)$$

где T и σ_0 даются формулами (2); сжимающие напряжения здесь считаются положительными.

В плоскости первых скольжений всегда имеет место также некоторое соотношение между нормальным и касательным напряжением:

$$\sigma_{\beta_0} = k\tau_{\beta_0}, \quad (8)$$

где k — пока неизвестный коэффициент пропорциональности.

Если параметр k каким-либо образом задать, то из соотношения (8) с учетом формул (2) получим уравнение для определения угла β_0 :

$$(1 + k^2)(1 - c)^2 \sin^2 2\beta_0 + (1 - c)^2 \sin 2\beta_0 + (1 + c)^2 + k^2(1 - c)^2 = 0. \quad (9)$$

Решением этого уравнения, удовлетворяющим рассматриваемой задаче, является

$$\sin 2\beta_0 = [-(1 + c) + k\sqrt{(1 + k^2)(1 - c)^2 - (1 + c)^2}]/[(1 + k^2)(1 - c)]^{-1}. \quad (10)$$

Таким образом, угол β_0 является функцией параметра и вида напряженного состояния c ; если известна функция $\beta_0 = \beta_0(c)$, то из соотношений (5) и (8) нетрудно получить выражение для параметра k :

$$k = ((1 + c) + (1 - c) \sin 2\beta_0)/((1 - c) \cos 2\beta_0). \quad (11)$$

С другой стороны, согласно (1), имеем

$$\tau_{\beta_0} = S_0 - \mu\sigma_{\beta_0}. \quad (12)$$

Из приведенных соотношений можно найти коэффициент k и параметр S_0 , учитывая еще следующее. При пропорциональном нагружении с ростом уровня напряжений интенсивность скольжений в плоскости, определяемой углом $\beta = \beta_0$, наибольшая, следовательно, можно полагать, что эта плоскость (при достижении предела прочности) окажется плоскостью среза. Это обстоятельство дает возможность использовать для определения величины k экспериментально найденные значения угла среза α . Угол α отсчитывается от направления σ_1 , так что

$$\alpha = \pi/4 - \beta_0. \quad (13)$$

Считая, таким образом, угол β_0 известным, исключая из (12) параметр μ , согласно зависимости (6) и разрешая (8) и (12) относительно k и S_0 с учетом формул (2), получим

$$S_0/T = [(1 - c) + (1 + c) \cos 2\alpha]/[(1 - c) \sin 2\alpha]. \quad (14)$$

Из последней формулы вытекает

$$k = [(1 + c) + (1 - c) \cos 2\alpha]/[(1 - c) \sin 2\alpha]. \quad (15)$$

Для вычисления по формуле (15) значения параметра k были использованы экспериментальные данные [4] для девяти горных пород, для которых угол α найден не менее чем для четырех видов напряженного состояния c (поскольку угол α колеблется в пределах от 20° до 45°).

Усредненное значение оказалось равным следующему:

$$k = 2. \quad (16)$$

Максимальные отклонения от этой величины средних значений k для различных пород составляют $\pm 9\%$. Следовательно, можно принять, что с некоторой погрешностью коэффициент k в соотношении (8) равен значению (16). Подставляя данное значение k в формулу (15), получим следующее уравнение для определения угла α :

$$5(1 - c)^2 \cos^2 2\alpha + 2(1 - c^2) \cos 2\alpha + (1 + c)^2 - 4(1 - c)^2 = 0. \quad (17)$$

Решением уравнения (17), удовлетворяющим рассматриваемой задаче, является:

$$\cos 2\alpha = [-(1 + c) + 2\sqrt{5(1 - c)^2 - (1 + c)^2}]/[5(1 - c)]. \quad (18)$$

Соотношение (18) справедливо, пока дискриминант не обратится в нуль, что произойдет при $c = 0.382$. При $c = 0$ имеем $\cos 2\alpha = 0.6$, что дает значение $\alpha = 26.6^\circ$, согласно (14), $S_0 = 2T$, т.е.

$$S_0|_{c=0} = \sigma_{1y}|_{c=0}. \quad (19)$$

При $c = 1/3$ из формулы (18) следует $\cos 2\alpha = 0$, т.е. $\alpha = \pi/4$, а из формулы (14) в этом случае имеем $S_0 = T$. Такой вид напряженного состояния является особым: горная порода превращается в пластический материал, а критерий Кулона—Мора переходит в критерий Треска [5].

Таким образом, если при каком-либо виде напряженного состояния c известен предел упругости $\sigma_{1y}(c)$, то по формуле (14) можно вычислить соответствующее значение параметра S_0 . Как правило, обычно бывает известна диаграмма одноосного сжатия $c_0 = 0$. Тогда зависимость (14) дает нам первое значение S_0 . Если еще будет известен предел упругости при каком-либо трехосном сжатии $c^* > 0$, то для определения S_0 при произвольном c можно применить линейную интерполяцию:

$$S_0 = [S_0^0(c^* - c) + S_0^*(c - c_0)]/(c^* - c_0), \quad (20)$$

где $S_0^0 = S_0|_{c=c_0}$, $S_0^* = S_0|_{c=c^*}$, причем необязательно $c = 0$ (но $c^* > c_0$).

Далее возникает вопрос об определении пределов текучести и ориентации плоскости среза при напряженных состояниях, когда $c > 1/3$. Согласно опытным данным (как указано Б.Г.Тарасовым), при $c \leq 1/3$ критерий Кулона—Мора переходит в критерий Треска. Иначе говоря, при этих напряженных состояниях в формуле (7) надо положить $T = T^* = \text{const}$. Но тогда, как показано в работе [2], угол β_0 , определяемый по формуле (10) при $k = 2$, становится отрицательным при $c > 1/3$, причем эта формула может иметь место только для значений $c \geq 0.382$. В предельном случае, когда $c \geq 0.382$, получается (согласно (6)), что $\mu \rightarrow -1/2$, а согласно зависимости (1) должно выполняться условие, при котором $S_0 \rightarrow 0$. Столь резкое изменение параметра S_0 в таком малом диапазоне варьирования параметра c кажется неестественным. Поэтому рассмотрим другую возможную ситуацию.

Полагая, что $T = T^*$ при $c \geq 1/3$ (т.е. принимая критерий Треска для определения пределов текучести), из соотношений (6) и (7) выразим

$$S_0 = (1 + [(1 + c)/(1 - c)] \sin 2\beta_0) \sigma_{1y}^*/(3 \cos 2\beta_0) \quad (c \geq 1/3). \quad (21)$$

Можно показать, что это значение S_0 будет отличным от нуля при $c \geq 0.382$, если в соотношении (8) $k = 2$. Считая, что при соответствующем изменении угла β_0 параметр k возрастает, т.е. $k' = (\sigma_{\beta_0}/\tau_{\beta_0})'_{\beta_0} > 0$, получим следующее неравенство:

$$\sin 2\beta_0 > -(1 - c)/(1 + c) \quad (c \geq 1/3). \quad (22)$$

Если же в формуле (22) заменить знак неравенства на знак равенства при каком-либо $c \geq 0.382$, то, согласно (21), $S_0 = 0$. Следовательно, процесс уменьшения параметра S_0 с ростом c ($c \geq 1/3$) можно "растянуть". При этом угол β_0 , становясь отрицательным, будет монотонно уменьшаться.

Условимся, например, что знак равенства в формуле (22) можно ввести при $c = 0.5$. Тогда из этой формулы получим

$$\beta_0|_{c=0.5} = -(1/2) \arcsin(1/3) = \beta_0^*. \quad (23)$$

Используя опять линейную интерполяцию, но теперь для значений угла β_0 при $1/3 \leq c \leq 0.5$, найдем

$$\beta_0 = 2(3c - 1)\beta_0^* \quad (1/3 \leq c \leq 0.5). \quad (24)$$

Параметр k , определяемый по прежнему формулой (11), при $\beta = \beta_0$ будет равен 2.828.

Угол среза α в этом случае надо определять [6] по формуле

$$\alpha = \pi/2 - (\pi/4 + |\beta_0|) \quad (c \geq 1/3), \quad (25)$$

поскольку на этой площадке действует такое же касательное напряжение, как и на площадке $\alpha = \pi/4 + |\beta_0|$, а нормальное напряжение на первой из этих площадок меньше, чем на второй. Следовательно, и в этих случаях угол среза α меньше 45° . Это подтверждается экспериментальными данными для сланцев [6].

Литература

- [1] Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Механика деформирования и разрушения горных пород. М.: Недра, 1992.
- [2] Рычков Б.А. О деформационном упрочнении горных пород // Изв. РАН. МТТ. 1999. №2.
- [3] Леонов М.Я., Нисневич Е.Б., Рычков Б.А. Плоская теория пластичности, основанная на синтезе скольжений // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. №6. С. 43–49.
- [4] Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Прочность горных пород и устойчивость выработок на больших глубинах. М.: Недра, 1985.
- [5] Тарасов Б.Г. О статистической природе деформационных процессов в горных породах // ФТПРПИ, 1991. №6.
- [6] Макламура Р., Грей К.Е. Механические свойства анизотропных осадочных пород // Конструирование и технология машиностроения: Тр. америк. общ. инж.-мех. М.: Мир, 1967. Т. 89. Сер. В. №1. С. 75–92.

Поступила в редакцию 16/III/2004;
в окончательном варианте — 16/III/2004.

DILATANCY OF GEOMATERIALS DUE TO LOSS OF STRENGTH³

© 2004 E.I. Kondrateva, Zh.I. Mamatov, B.A. Riychkov⁴

Kinematic and strength properties of the rock from viewpoint of the sliding and loosening concepts on example of the cylindrical specimens behaviour under triaxial compression are considered. The relations for determination of the shear planes orientation at fracture state are obtained. The values of the shear angle are shown to be in good agreement with known experimental data at complex stress state.

Paper received 16/III/2004.

Paper accepted 16/III/2004.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Y.N. Radayev.

⁴Kondrateva Elena Nikolayevna, Mamatov Zhanybek Iysakovich, Riychkov Boris Alexandrovich (djanibek@mail.ru), Dept. of Mechanics, Kyrgyz State University of Construction, Transport and Architecture, 720020, Kyrgyzstan.