

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ОДНОГО N -МЕРНОГО УРАВНЕНИЯ¹

© 2004 Е.А. Уткина²

Для общего линейного гиперболического уравнения порядка $2n$ с более чем двукратным дифференцированием по каждой из независимых переменных построено в терминах функции Римана решение задачи Гурса.

В параллелепипеде

$$D = \{x_{10} < x_1 < x_{11}, \quad x_{20} < x_2 < x_{21}, \dots, x_{n0} < x_n < x_{n1}\}$$

рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} L(u) &\equiv \\ &\equiv \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^2 a_{i_1 i_2 \dots i_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial^{i_1+i_2+\dots+i_n} u}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}} = F(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (1)$$

Его можно считать обобщением уравнений Манжерона [1–2] и Буссинеска—Лява из теории колебаний [3, формула (20)], а также — усложнением уравнения Бианки [4], связанного с интегральным представлением одних дифференциальных операторов через другие [5], и играющего важную роль в теориях аппроксимации и отображений [6, с. 109].

Обозначим через $X_1, X_2, \dots, X_n$ — грани D при $x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, \dots, x_n = x_{n0}$ соответственно. Пусть $a_{222\dots 2} \equiv 1$, а гладкость остальных коэффициентов (1) определяется включениями $a_{i_1 i_2 \dots i_n} \in C^{i_1, i_2, \dots, i_n}(\overline{D})$, $F \in C(\overline{D})$, где $C^{i_1, i_2, \dots, i_n}$ есть класс непрерывных в $\overline{D}$ вместе с их производными

$$\partial^{r_1+r_2+\dots+r_n} / \partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_n^{r_n}$$

($r_1 = 0, \dots, i_1; r_2 = 0, \dots, i_2; \dots; r_n = 0, \dots, i_n$) функций.

Задача Г (Гурса). Найти в классе $C^{2,2,\dots,2}(D)$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u|_{X_k} &= \varphi_k^0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_k}|_{X_k} = \varphi_k^1, \quad (k = 1, \dots, n), \\ \varphi_k^i &\in C^{2,\dots,2}(\overline{X_k}) \quad (i = 0, 1), \end{aligned} \quad (2)$$

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором О.П. Филатовым.

²Уткина Елена Анатольевна (utkina1@yandex.ru), кафедра математики, информатики и методики ее преподавания Казанского государственного педагогического университета, 420021, г. Казань, ул. Межлаук, 34

при этом на ребрах D граничные значения согласуются:

$$\begin{aligned}\varphi_1^0(x_{20}, x_3, \dots, x_n) &= \varphi_2^0(x_{10}, x_3, \dots, x_n), \dots, \\ \varphi_1^0(x_2, x_3, \dots, x_{n0}) &= \varphi_n^0(x_{10}, x_2, \dots, x_{n-1})\end{aligned}$$

и являются непрерывно дифференцируемыми.

Наша цель состоит в получении формулы решения данной задачи. Для этого предлагается некоторое развитие варианта метода Римана из работ [7–8].

Функцией Римана $R(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ назовем решение интегрального уравнения

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^2 (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_n} D_{x_1}^{i_1-2} D_{x_2}^{i_2-2} \dots D_{x_n}^{i_n-2} (a_{i_1 i_2 \dots i_n} R) = 1, \quad (3)$$

где $D_t^k \varphi \equiv \partial^k \varphi / \partial t^k$ при $k = 1, 2, \dots$ и

$$D_t^k \varphi \equiv \int_{t_0}^t \frac{(t-\tau)^{-k-1} \varphi(\tau)}{(-k-1)!} d\tau,$$

если $k = -1, -2, \dots$, D_t^0 — единичный оператор. Решение уравнения (3) существует и единственно [9, с. 180].

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для любой функции u из класса $C^{2+2+\dots+2}(D)$ выполняется тождество:

$$\begin{aligned}D_{x_1}^2 D_{x_2}^2 \dots D_{x_n}^2 (uR) &\equiv RL(u) + \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_n=0 \\ 0 < i_1+i_2+\dots+i_n < 2n}}^2 (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_n} \times \\ &\times D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i_2} \dots D_{x_n}^{i_n} [u \sum_{\alpha_1=i_1}^2 \sum_{\alpha_2=i_2}^2 \dots \sum_{\alpha_n=i_n}^2 (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n} \times \\ &\times D_{x_1}^{\alpha_1-i_1} D_{x_2}^{\alpha_2-i_2} \dots D_{x_n}^{\alpha_n-i_n} (a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} R)] + \Omega, \quad (4)\end{aligned}$$

где

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \left\{ \prod_{p=1}^i \sum_{k_p=k_{p-1}+1}^n S_{k_p} \right\},$$

причем операторы S_k строятся по следующему правилу:

$$S_{i_1} = \sum_{i_2=0}^2 \dots \sum_{i_n=0}^2 D_{x_1}^1 \left\{ D_{x_2}^{i_2} D_{x_3}^{i_3} \dots D_{x_n}^{i_n} (u) D_{x_1}^1 (a_{2i_2 \dots i_n} R) \right\}.$$

Здесь $a_{i_1 i_2 \dots i_n}$ зависят от $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а R и ее производные — от $(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. При проведении указанной проверки следует учесть, что в силу (3) R по первым n аргументам удовлетворяет сопряженному с (1) уравнению:

$$L^*(V) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^2 (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_n} D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i_2} \dots D_{x_n}^{i_n} (a_{i_1 i_2 \dots i_n} V) = 0.$$

Меняя в (4) ролями переменные x_1 с ξ_1 , x_2 с ξ_2 , ..., x_n с ξ_n и вычисляя затем n -кратный интеграл в пределах $x_{10} < \xi_1 < x_1$, $x_{20} < \xi_2 < x_2$, $x_{n0} < \xi_n < x_n$, найдем

$$\begin{aligned}
 D_x^1 D_y^1 D_z^1 u(x, y, z) = & D_x^{-1} D_y^{-1} D_z^{-1} (R(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z) F(\alpha, \beta, \gamma)) + \\
 & + \sum_{i_1=0}^2 \sum_{i_2=0}^2 \dots \sum_{i_n=0}^2 (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_n} \left[\sum_{k_1=1}^n \prod_{p=1}^n \prod_{p \neq k_1}^n \times \right. \\
 & \times D_{x_p}^{i_p-1} \left(\varphi_{k_1}^{i_{k_1}-1} (x_1, \dots, x_{k_1-1}, x_{k_1+1}, \dots, x_{k_n}) \right) \times \\
 & \times Q_{i_1 i_2 \dots i_n} (x_1, \dots, x_{k_1-1}, x_{k_1,0}, x_{k_1+1}, \dots, x_{k_n}) z n(i_{k_1} = 0) - \\
 & - \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=k_1+1}^n \prod_{p=1}^n \prod_{p \neq k_1}^n D_{x_p}^{i_p-1} \left(\varphi_{k_1}^{i_{k_1}-1} (x_1, \dots, x_{k_1-1}, x_{k_1+1}, \dots, x_{k_2,0}, \dots, x_{k_n}) \right) \times \\
 & \times Q_{i_1 i_2 \dots i_n} (x_1, \dots, x_{k_1,0}, \dots, x_{k_2,0}, \dots, x_{k_n}) z n(i_{k_1} = 0) z n(i_{k_2} = 0) + \dots + \\
 & + (-1)^{n+1} \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=k_1+1}^n \dots \sum_{k_n=k_{n-1}+1}^n \prod_{p=1}^n \prod_{p \neq k_1}^n D_{x_p}^{i_p-1} \left(\varphi_{k_1}^{i_{k_1}-1} (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \right) \times \\
 & \times Q_{i_1 i_2 \dots i_n} (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) z n(i_1 = 0) \cdot \dots \cdot z n(i_n = 0) \Big],
 \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
 Q_{i_1 i_2 \dots i_n} (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = & \sum_{\alpha_1=i_1}^2 \sum_{\alpha_2=i_2}^2 \dots \sum_{\alpha_n=i_n}^2 (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n} \times \\
 & \times D_{x_1}^{\alpha_1-i_1} D_{x_2}^{\alpha_2-i_2} \dots D_{x_n}^{\alpha_n-i_n} (a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) R(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, x_1, x_2, \dots, x_n)).
 \end{aligned}$$

При этом $z n(i_1 = 0) = 0$, если $i_1 = 0$ и слагаемое зависит от x_0 и $z n(i_1 = 0) = 1$ в остальных случаях. Аналогично понимаются $z n(i_2 = 0) = 0, \dots, z n(i_n = 0) = 0$, только слагаемые зависят уже от $x_2, \dots, x_n$ соответственно.

Обозначим через $\omega(x_1, x_2, \dots, x_n, x_1, x_2, \dots, x_n)$ правую часть (5) без первого слагаемого. Тогда

$$\begin{aligned}
 u(x_1, x_2, \dots, x_n) = & D_{x_1}^{-2} D_{x_2}^{-2} \dots D_{x_n}^{-2} [R F] + D_{x_1}^{-1} D_{x_2}^{-1} \dots D_{x_n}^{-1} [\omega] + \\
 & + \varphi_1^0(y, z) + \sum_{k_1=1}^n \varphi_{k_1}^0(x_1, \dots, x_{k_1-1}, x_{k_1+1}, \dots, x_{k_n}) - \\
 & - \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=k_1+1}^n \varphi_{k_1}^0(x_1, \dots, x_{k_1-1}, x_{k_1+1}, \dots, x_{k_2,0}, \dots, x_{k_n}) + \dots + \\
 & + (-1)^{n+1} \varphi_1^0(x_{10}, \dots, x_{n0}).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Очевидно, выражения (5)–(6) есть искомая формула решения задачи Г.

Литература

- [1] Mangeron D. New methods for determining solution of mathematical models governing polyvibrating phenomena // Bul. Inst. politehn. Jaci. 1968. V. 14. No. 1–2. P. 433–436.

- [2] Mangeron D. Functional equations in the theory of class of polyvibrating equations // Math. notae, 1968–1969 (1970). 21. No. 3–4. P. 81–86.
- [3] Солдатов А.П., Шхануков М.Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // ДАН СССР. 1987. Т. 297. №3. С. 547–552.
- [4] Фаге М.К. Задача Коши для уравнения Бианки // Матем. сб. 1958. Т. 451(87). №3. С. 281–322.
- [5] Фаге М.К. Операторно-аналитические функции одной независимой переменной // Тр. Моск. матем. о-ва. 1958. Т. 7. С. 227–268.
- [6] Бондаренко Б.А. Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных уравнений в частных производных. Ташкент: ФАН, 1987. 146 с.
- [7] Жегалов В.И. Трехмерный аналог задачи Гурса // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. Новосибирск: СО АН СССР. 1990. С. 94–98.
- [8] Жегалов В.И., Уткина Е.А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Матем. 1999. №10. С. 73–76.
- [9] Мюнтц Г. Интегральные уравнения. Т.1. М.: ГТТИ, 1934. 330 с.

Поступила в редакцию 20/I/2004;
в окончательном варианте — 20/I/2004.

GOURSAT'S PROBLEM FOR AN N -DIMENSIONAL EQUATION³

© 2004 E.A. Utkina⁴

For arbitrary equation of hyperbolic type of $2n$ -order with derivatives on all variables less then or equal to the second order a solution of Goursat's problem is obtained in terms of the Rieman function.

Paper received 20/I/2004.
Paper accepted 20/I/2004.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) O.P. Filatov.

⁴Utkina Elena Anatolevna (utkina1@yandex.ru), Dept. of Mathematics and Informatics, Kazan State Pedagogical University, Kazan, 420021, Russia.