

ОБ АППРОКСИМАЦИИ СНИЗУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С НЕЛИПШИЦЕВОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ¹

© 2004 Е.В. Соколовская²

Доказана теорема об аппроксимации снизу дифференциальных включений с односторонне липшицевой (OSL) правой частью и медленными переменными. Аппроксимирующими могут являться дифференциальные включения с нелипшицевой правой частью.

Введение

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения:

$$\dot{x} \in \mu F(t, x, \mu), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где отображение $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times [0, a] \rightarrow Kv(\mathbb{R}^m)$, $Kv(\mathbb{R}^m)$ — совокупность всех непустых выпуклых компактов в $\mathbb{R}^m$; $\mu \in [0, a]$ ($a > 0$) — малый параметр.

При аппроксимации задачи (1) снизу, как и при аппроксимации ее сверху, ей сопоставляется задача Коши для более простого дифференциального включения:

$$\dot{u} \in \mu F_0(t, u), \quad u(0) = x_0; \quad (2)$$

здесь отображение $F_0 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$, $K(\mathbb{R}^m)$ — совокупность всех непустых компактов в $\mathbb{R}^m$.

Определение ([1, с. 25]). Говорят, что задача (2) аппроксимирует снизу задачу (1), если $\forall \varepsilon > 0 \exists \mu_0 > 0$ такое, что для любого $\mu \in (0, \mu_0]$ и для любого решения $u(t)$ задачи (2) найдется решение $x(t)$ задачи (1) такое, что выполняется неравенство:

$$\|x(t) - u(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, 1/\mu];$$

здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^m$.

Возможность аппроксимации снизу задачи (1) задачей (2) при условии липшицевости правых частей дифференциальных включений этих задач

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором О.П. Филатовым.

²Соколовская Елена Валериевна (solena@ssu.samara.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

установлена в работах [1–5]. В них доказано, что при некоторых дополнительных предположениях задача (2) аппроксимирует снизу задачу (1).

В настоящей работе вопрос об аппроксимации снизу задачи (1) задачей (2) рассматривается при существенно более слабых, чем липшицевость, требованиях на отображения F и F_0 .

В частности, отображение F может быть равномерно непрерывным по x на $\mathbb{R}^m$, равномерно по t на $\mathbb{R}$ и по μ в нуле, а отображение F_0 — равномерно непрерывным по u на $\mathbb{R}^m$, равномерно по t на $\mathbb{R}$.

Как известно, отображение $F : \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$ называется равномерно непрерывным на $\mathbb{R}^m$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m : \|x_1 - x_2\| < \delta \Rightarrow \alpha(F(x_1), F(x_2)) < \varepsilon,$$

$(\beta(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\}$ — соответственно полуотклонение и отклонение по Хаусдорфу множества A от множества B). Это условие равносильно такому: $\omega_F(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$, где

$$\omega_F(\delta) = \sup_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m : \|x_1 - x_2\| \leq \delta} \alpha(F(x_1), F(x_2))$$

— модуль непрерывности отображения F . Равномерная непрерывность по x на $\mathbb{R}^m$ отображения $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times [0, a] \rightarrow Kv(\mathbb{R}^m)$, равномерная по t на $\mathbb{R}_+$ и по μ в нуле, означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m \forall t \in \mathbb{R}_+ \forall \mu \in [0, a] :$$

$$\|x_1 - x_2\| < \delta, 0 \leq \mu < \delta \Rightarrow \alpha(F(t, x_1, \mu), F(t, x_2, 0)) < \varepsilon.$$

Можно показать, что это условие равносильно одновременному выполнению двух следующих:

1) $\omega_{F^\circ}(t, \delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$ на $\mathbb{R}_+$, где $\omega_{F^\circ}(t, \delta)$ — модуль непрерывности по x отображения $F^\circ(t, x) = F(t, x, 0)$;

2) $\alpha(F(t, x, \mu), F(t, x, 0)) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$ на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$.

Равномерная непрерывность по u на $\mathbb{R}^m$ отображения $F_0 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$, равномерная по t на $\mathbb{R}_+$, означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^m, \forall t \in \mathbb{R}_+ : \|u_1 - u_2\| < \delta \Rightarrow \alpha(F_0(t, u_1), F_0(t, u_2)) < \varepsilon$. Это условие равносильно выполнению такого: $\omega_{F_0}(t, \delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$ на $\mathbb{R}_+$ (здесь $\omega_{F_0}(t, \delta)$ — модуль непрерывности по u отображения $F_0(t, u)$).

Кроме того, от отображения F требуется выполнение условия односторонней липшицевости (OSL), более слабого, чем липшицевость. Условие односторонней липшицевости для однозначных функций появилось впервые, по-видимому, в работе [6] в связи с вопросом о единственности решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В случае многозначного отображения $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$ условие OSL формулируется так [7]: найдется локально интегрируемая (по Лебегу) на $\mathbb{R}$ функция $L : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что $\forall x, y \in \mathbb{R}^m, \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall v \in F(t, x) \exists w \in F(t, y)$ такой, что $\langle x - y, v - w \rangle \leq L(t)\|x - y\|^2$; здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$.

При решении ряда вопросов теории дифференциальных включений условие липшицевости отображений может быть заменено на это условие

OSL. В частности, в указанной выше работе [7] доказана теорема о непрерывной зависимости от исходных данных решения задачи Коши для дифференциального включения с OSL правой частью:

$$\dot{x} \in H(t, x), \quad x(0) \in K_0, \quad (3)$$

где $H : [0, 1] \times \mathbb{R}^m \rightarrow Kv(\mathbb{R}^m)$, K_0 — компакт из $K(\mathbb{R}^m)$. Эта теорема существенно используется в настоящей работе. Приведем ее.

Теорема ([7, с. 785]). Предположим, что выполняются следующие условия: $H(t, x)$ измеримо по t на $[0, 1]$ для каждого $x \in \mathbb{R}^m$ и полунепрерывно сверху по x для всех $t \in [0, 1]$; найдется интегрируемая на $[0, 1]$ функция $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что $\|H(t, x)\| \leq \lambda(t)(1 + \|x\|)$ для всех $x \in \mathbb{R}^m$ и почти для всех $t \in [0, 1]$; H — OSL непрерывное отображение с интегрируемой на $[0, 1]$ функцией $L(t)$. Пусть $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условию: расстояние $\rho(y(t), H(t, y(t))) \leq g(t)$ для почти всех $t \in [0, 1]$, где $g(t)$ — интегрируемая на $[0, 1]$ функция. Тогда для любого компакта $K_0 \in K(\mathbb{R}^m)$ существует на $[0, 1]$ решение $x(t)$ задачи (3) такое, что $\|x(t) - y(t)\| \leq v(t)$, где

$$v(t) = d \exp(m(t)) + \int_0^t \exp[m(t) - m(s)] g(s) ds,$$

$$d = \rho(y(0), K_0), \quad m(t) = \int_0^t L(s) ds.$$

1. Основной результат

Предположим, что при каждом $\mu \in (0, a]$ задача (2) имеет на $[0, 1/\mu]$ хотя бы одно решение, и пусть для отображений F и F_0 выполняются следующие условия:

- 1) отображения F и F_0 измеримы по t на $\mathbb{R}_+$ соответственно для любых $(x, \mu) \in \mathbb{R}^m \times [0, a]$ и любых $u \in \mathbb{R}^m$;
- 2) отображения F и F_0 ограничены при каждом $t \in \mathbb{R}_+$, то есть $\|F(t, x, \mu)\| \leq \lambda_F(t) \quad \forall (x, \mu) \in \mathbb{R}^m \times [0, a]$; $\|F_0(t, u)\| \leq \lambda_{F_0}(t) \quad \forall u \in \mathbb{R}^m$ с локально интегрируемыми на $\mathbb{R}_+$ функциями $\lambda_F(t)$ и $\lambda_{F_0}(t)$ такими, что средние

$$\frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \lambda_F(t) dt = O(1), \quad \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \lambda_{F_0}(t) dt = O(1) \quad \text{при } \Delta \rightarrow +\infty \quad (4)$$

равномерно по t_0 на $\mathbb{R}_+$;

- 3) модули непрерывности по x и u соответственно отображений $F^\circ(t, x) = F(t, x, 0)$ и $F_0(t, u)$ допускают оценки:

$$\omega_{F^\circ}(t, \delta) \leq \sigma_F(t) \eta_F(t, \delta), \quad \omega_{F_0}(t, \delta) \leq \sigma_{F_0}(t) \eta_{F_0}(t, \delta),$$

в которых неотрицательные функции $\eta_F(t, \delta)$ и $\eta_{F_0}(t, \delta)$ при $\delta \rightarrow +0$ стремятся к нулю равномерно по t на $\mathbb{R}_+$, а положительные локально интегрируемые на $\mathbb{R}_+$ функции $\sigma_F(t)$ и $\sigma_{F_0}(t)$ таковы, что

$$\frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \sigma_F(t) dt = O(1), \quad \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \sigma_{F_0}(t) dt = O(1) \quad \text{при } \Delta \rightarrow +\infty \quad (5)$$

равномерно по t_0 на $\mathbb{R}_+$;

4) отображение $F(t, x, \mu)$ удовлетворяет условию:

$$\alpha(F(t, x, \mu), F(t, x, 0)) \leq \sigma_F(t) \nu(t, x, \mu) \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m,$$

где $\nu(t, x, \mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$ равномерно по $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$;

5) для отображений F и F_0 выполняется условие близости средних

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \beta \left(\frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} F_0(t, \xi_0) dt, \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} F(t, \xi_0, 0) dt \right) = 0$$

равномерно по $(t_0, \xi_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$.

При этих предположениях имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть отображение $F(t, x, \mu)$ при каждом фиксированном $\mu \in [0, a]$ односторонне липшицево (OSL) по x с локально интегрируемой на $\mathbb{R}_+$ функцией $L_F^\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что

$$\frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta L_F^\mu(t) dt = O(1) \quad \text{при } \Delta \rightarrow +\infty \quad (6)$$

равномерно по μ на $[0, a]$.

Тогда задача (2) аппроксимирует снизу задачу (1).

Пример. В качестве задач (1) и (2) рассматриваются соответственно следующие:

$$\dot{x} \in \mu F(t, x, \mu), \quad x(0) = -\pi/2, \quad (7)$$

$$\dot{u} \in \mu F_0(u), \quad u(0) = -\pi/2; \quad (8)$$

здесь отображение $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1 \times [0, a] \rightarrow Kv(\mathbb{R}^1)$ задается равенством

$$F(t, x, \mu) = g(x) \sqrt{\mu} \sin^2(t + \mu) + \sin^2 x [1, 2]$$

с функцией

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 1 - \sqrt{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Отображение $F_0 : \mathbb{R}^1 \rightarrow K(\mathbb{R}^1)$ определяется равенством

$$F_0(u) = \sin^2 u [1, 2].$$

Для задач (7) и (8) выполнены все условия сформулированной выше теоремы. Следовательно, задача (8) аппроксимирует снизу задачу (7). Например, функция $u(t) = -\text{arccctg}(\mu kt)$, где $k \in [1, 2]$ — некоторое число, является решением задачи (8). Аппроксимация снизу задачи (7) задачей (8)

позволяет сделать вывод: для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно малых $\mu > 0$ на $[0, 1/\mu]$ найдется решение $x(t)$ задачи (7), отличающееся по абсолютной величине от $u(t) = -\operatorname{arctg}(\mu kt)$ ($k \in [1, 2]$) на отрезке $[0, 1/\mu]$ меньше, чем на ε .

2. Основные леммы

Для доказательства основной теоремы понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. Выполнение условий 3) и 4) для отображения $F(t, x, \mu)$ равносильно выполнению для него условия:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m, \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall \mu \in [0, a] : \quad (9)$$

$$\|x_1 - x_2\| < \delta, \quad 0 \leq \mu < \delta \Rightarrow \alpha(F(t, x_1, \mu), F(t, x_2, 0)) < \varepsilon \sigma_F(t)$$

с положительной локально интегрируемой на $\mathbb{R}_+$ функцией $\sigma_F(t)$, удовлетворяющей условию (5).

Доказательство. Пусть для F выполнены условия 3), 4). Покажем выполнение условия (9). Возьмем $\varepsilon > 0$ — произвольное. По числу $\varepsilon/2$ найдем число $\delta_1 > 0$ из условия $\eta_F(t, \delta) \Rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$ на $\mathbb{R}_+$. По этому же числу $\varepsilon/2$ найдем число $\delta_2 > 0$ из условия $v(t, x, \mu) \Rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$ на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$. Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Это δ — искомое: если $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$ таковы, что $\|x_1 - x_2\| < \delta$, $t \in \mathbb{R}_+$ — произвольное и $\mu \in [0, a]$ таково, что $0 \leq \mu < \delta$, то $\alpha(F(t, x_1, \mu), F(t, x_2, 0)) \leq \alpha(F(t, x_1, \mu), F(t, x_1, 0)) + \alpha(F(t, x_1, 0), F(t, x_2, 0)) \leq \sigma_F(t)v(t, x, \mu) + \omega_{F^\circ}(t, \delta) \leq \sigma_F(t)v(t, x, \mu) + \sigma_F(t)\eta_F(t, \delta) < \sigma_F(t)(\varepsilon/2 + \varepsilon/2) = \varepsilon \sigma_F(t)$.

Пусть теперь выполняется условие (9). Для проверки выполнения условий 3), 4) для F положим

$$\eta_F(t, \delta) = \frac{\omega_{F^\circ}(t, \delta)}{\sigma_F(t)}, \quad v(t, x, \mu) = \frac{\alpha(F(t, x, \mu), F(t, x, 0))}{\sigma_F(t)},$$

и остается показать, что $\eta_F(t, \delta) \Rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$ на $\mathbb{R}_+$ и $v(t, x, \mu) \Rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$ на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$. Покажем, что $\eta_F(t, \delta) \Rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$, то есть $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_0 > 0 \forall \delta, \forall t \in \mathbb{R}_+ : 0 < \delta < \delta_0 \Rightarrow \eta_F(t, \delta) < \varepsilon$. Возьмем $\varepsilon > 0$ — произвольное и пусть число $\delta_0 > 0$ найдено по числу $\varepsilon_1 < \varepsilon$ из выполнения условия (9). Если теперь δ таково, что $0 < \delta < \delta_0$ и $t \in \mathbb{R}_+$ — произвольное, то для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$ таких, что $\|x_1 - x_2\| < \delta$, выполняется: $\alpha(F^\circ(t, x_1), F^\circ(t, x_2)) = \alpha(F(t, x_1, 0), F(t, x_2, 0)) < \varepsilon_1 \sigma_F(t)$, откуда следует, что $\omega_{F^\circ}(t, \delta) \leq \varepsilon_1 \sigma_F(t)$, то есть

$$\eta_F(t, \delta) = \frac{\omega_{F^\circ}(t, \delta)}{\sigma_F(t)} \leq \varepsilon_1 < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. Аналогично показывается, что $v(t, x, \mu) \Rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$ на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$. Лемма доказана.

Лемма 2. Выполнение условия 3) для отображения $F_0(t, u)$ равносильно выполнению для него условия:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^m, \forall t \in \mathbb{R}_+ : \quad (10)$$

$$\|u_1 - u_2\| < \delta \Rightarrow \alpha(F_0(t, u_1), F_0(t, u_2)) < \varepsilon \sigma_{F_0}(t)$$

с положительной локально интегрируемой на $\mathbb{R}_+$ функцией $\sigma_{F_0}(t)$, удовлетворяющей условию (5).

Доказательство ее аналогично доказательству леммы 1.

3. Доказательство теоремы 1

Найдем константы c и Δ_0 из условий (4), (5) и (6). Это значит, что при $\Delta \geq \Delta_0$ выполняется:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \lambda_F(t) dt &\leq c, \quad \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \lambda_{F_0}(t) dt \leq c; \\ \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \sigma_F(t) dt &\leq c, \quad \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \sigma_{F_0}(t) dt \leq c, \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}_+; \\ \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} L_F^\mu(t) dt &\leq c, \quad \forall \mu \in [0, a]. \end{aligned}$$

Покажем, что задача (2) аппроксимирует снизу задачу (1). Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По нему найдем число $\delta_F(\varepsilon) > 0$ из выполнения условия (9) из леммы 1. По числу $\gamma = \min\{\delta_F(\varepsilon)/2, \varepsilon\}/(1+c)$ найдем число $\delta_{F_0}(\gamma) > 0$ из выполнения условия (10) из леммы 2. По этому же числу γ найдем число $\Delta_1(\gamma) > \Delta_0$ из выполнения условия 5) (о близости средних от F и F_0).

Положим

$$\delta = \min\{\delta_F(\varepsilon)/2, \delta_{F_0}(\gamma), \varepsilon\}$$

и возьмем какое-нибудь $\Delta > \Delta_1(\gamma)$.

В качестве искомого числа $\mu_0 > 0$ возьмем такое $\mu_0 > 0$, что $\mu_0 c \Delta < \delta$ и

$$\mu_0 < \min\{\delta_F(\varepsilon), 1/\Delta\}.$$

Далее возьмем произвольное $\mu \in (0, \mu_0]$ и произвольное решение $u_\mu(t)$ задачи (2).

Разобьем $\mathbb{R}_+$ точками $t_j = j\Delta$ ($j = \overline{0, \infty}$) на частичные отрезки длиной Δ . Значения решения $u_\mu(t)$ в узлах этой сетки обозначим через u_j .

Имеем:

$$u_\mu(t) = x_0 + \mu \int_0^t v(s) ds,$$

где $v(s) \in F_0(s, u_\mu(s))$ — некоторый селектор.

По теореме об измеримом селекторе, на каждом отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ ($j = \overline{0, k-1}$, $k = \lceil 1/\mu\Delta \rceil$) найдется селектор $v_j^1(t) \in F_0(t, u_j)$ такой, что

$$\begin{aligned} \|v(t) - v_j^1(t)\| &= \rho(v(t), F_0(t, u_j)) \leq \\ &\leq \beta(F_0(t, u_\mu(t)), F_0(t, u_j)) \leq \alpha(F_0(t, u_\mu(t)), F_0(t, u_j)) \end{aligned}$$

$$\forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad (j = \overline{0, k-1}).$$

Чтобы теперь использовать условие (10) из леммы 2 для F_0 , оценим сначала $\|u_\mu(t) - u_j\|$ при каждом $t \in [t_j, t_{j+1}]$ ($j = \overline{0, k-1}$). Для любого $t \in [t_j, t_{j+1}]$ ($j = \overline{0, k-1}$) имеем:

$$\begin{aligned} \|u_\mu(t) - u_j\| &\leq \mu \int_{t_j}^t \|v(s)\| ds \leq \mu \int_{t_j}^t \lambda_{F_0}(s) ds \leq \\ &\leq \mu \int_{t_j}^{t_j+\Delta} \lambda_{F_0}(s) ds \leq \mu c \Delta \leq \mu_0 c \Delta < \delta \leq \delta_{F_0}(\gamma). \end{aligned}$$

Так как число $\delta_{F_0}(\gamma)$ выбиралось по числу $\gamma > 0$ из условия (10) из леммы 2 для F_0 , то

$$\alpha(F_0(t, u_\mu(t)), F_0(t, u_j)) \leq \gamma \sigma_{F_0}(t) \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad (j = \overline{0, k-1}).$$

Следовательно,

$$\|v(t) - v_j^1(t)\| \leq \gamma \sigma_{F_0}(t) \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad (j = \overline{0, k-1}).$$

Теперь на каждом отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ ($j = \overline{0, k-1}$) по селектору $v_j^1(t)$ найдем из выполнения условия 5) (о близости средних от F и F_0) селектор $v_j^2(t) \in F(t, u_j, 0)$ такой, что

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (v_j^1(s) - v_j^2(s)) ds \right\| &= \left\| \frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j^1(s) ds - \frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j^2(s) ds \right\| = \\ &= \rho \left(\frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j^1(s) ds, \frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(s, u_j, 0) ds \right) \leq \\ &\leq \beta \left(\frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F_0(s, u_j) ds, \frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(s, u_j, 0) ds \right) < \gamma \quad (\forall j = \overline{0, k-1}). \end{aligned}$$

Введем теперь на $[0, 1/\mu]$ функцию $v^2(t)$ по следующему правилу:

$$v^2(t) = \begin{cases} v_j^2(t), & \text{если } t \in [t_j, t_{j+1}] \quad (j = \overline{0, k-1}), \\ 0, & \text{если } t \in (t_k, 1/\mu] \end{cases}$$

и функцию $a_\mu(t) = x_0 + \mu \int_0^t v^2(s) ds$.

С целью дальнейшего применения теоремы [7] (она применяется в случае, когда временная переменная t изменяется от 0 до 1) введем вспомогательную задачу:

$$\dot{b} \in H(s, b, \mu), \quad b(0) = x_0, \quad (s \in [0, 1]), \quad (11)$$

где $H : [0, 1] \times \mathbb{R}^m \times (0, \mu_0] \rightarrow Kv(\mathbb{R}^m)$ определяется равенством:

$$H(s, b, \mu) = F\left(\frac{s}{\mu}, b, \mu\right).$$

Заметим, что если функция $b(s)$ — решение задачи (11) на $[0, 1]$, то функция $x_\mu(t) = b(\mu t)$ — решение на $[0, 1/\mu]$ задачи (1).

Для задачи (11) при каждом $\mu \in (0, \mu_0]$ выполнены все условия теоремы [7]. При этом функция $L_H^\mu(s)$, фигурирующая в условии OSL для отображения $H(s, b, \mu)$, будет такой:

$$L_H^\mu(s) = L_F^\mu\left(\frac{s}{\mu}\right),$$

где $L_F^\mu(t)$ — функция из условия OSL для отображения $F(t, x, \mu)$.

Покажем теперь, что при каждом $\mu \in (0, \mu_0]$ для задачи (11) выполняется условие теоремы из [7], состоящее в существовании абсолютно непрерывной функции $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ такой, что

$$\rho(\dot{y}(s), H(s, y(s), \mu)) \leq g(s),$$

где $g(s)$ — интегрируемая на $[0, 1]$ функция.

В качестве функции $y(s)$ возьмем

$$y(s) = a_\mu(s/\mu) = x_0 + \int_0^s v^2(\beta/\mu) d\beta. \quad (12)$$

Для $\rho(\dot{y}(s), H(s, y(s), \mu))$ при $s \in [0, 1]$ теперь имеем:

1) если $s \in [\mu t_j, \mu t_{j+1}]$ ($j = 0, k-1$), то

$$\begin{aligned} \rho(\dot{y}(s), H(s, y(s), \mu)) &= \rho(v^2(s/\mu), H(s, a_\mu(s/\mu), \mu)) = \\ &= \rho(v_j^2(s/\mu), H(s, a_\mu(s/\mu), \mu)) = \rho(v_j^2(s/\mu), F(s/\mu, a_\mu(s/\mu), \mu)) = \\ &= \rho(v_j^2(t), F(t, a_\mu(t), \mu)) \leq \\ &\leq \beta(F(t, u_j, 0), F(t, a_\mu(t), \mu)) \leq \alpha(F(t, u_j, 0), F(t, a_\mu(t), \mu)) \end{aligned} \quad (13)$$

($t \in [t_j, t_{j+1}]$ — некоторое число, зависящее от s).

Чтобы теперь применить условие (9) из леммы 1 для F , оценим, насколько $a_\mu(t)$ отклоняется от u_j при $t \in [t_j, t_{j+1}]$. Для этого сначала оценим это отклонение в узлах $t_0, t_1, \dots, t_k$ сетки. Имеем:

$$\begin{aligned} \|u_j - a_\mu(t_j)\| &= \|x_0 + \mu \int_0^{t_j} v(s) ds - x_0 - \mu \int_0^{t_j} v^2(s) ds\| = \\ &= \|\mu \int_0^{t_j} v(s) ds - \mu \int_0^{t_j} v^2(s) ds\| = \|\mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v(s) ds - \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i^2(s) ds\| \leq \\ &\leq \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|v(s) - v_i^1(s)\| ds + \mu \sum_{i=0}^{j-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} (v_i^1(s) - v_i^2(s)) ds \right\| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mu \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma \sigma_{F_0}(s) ds + \mu j \Delta \gamma = \mu \sum_{i=0}^{j-1} \gamma \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma_{F_0}(s) ds + \mu j \Delta \gamma \leq \mu j \Delta \gamma c + \mu j \Delta \gamma = \\
&= \mu j \Delta \gamma (c + 1) = \mu \gamma t_j (c + 1) \leq \mu \gamma \frac{1}{\mu} (c + 1) = \gamma (c + 1) \leq \frac{\delta_F(\varepsilon)}{2} \quad \forall j = \overline{0, k}.
\end{aligned}$$

Отдельно отметим, что

$$\|u_j - a_\mu(t_j)\| \leq \gamma(c + 1) \quad \forall j = \overline{0, k}. \quad (14)$$

Оценим далее норму $\|u_j - a_\mu(t)\|$ в произвольной точке $t \in (t_j, t_{j+1})$.

Имеем:

$$\begin{aligned}
\|u_j - a_\mu(t)\| &\leq \|u_j - a_\mu(t_j)\| + \|a_\mu(t_j) - a_\mu(t)\| \leq \\
&\leq \frac{\delta_F(\varepsilon)}{2} + \mu \left\| \int_{t_j}^t v_j^2(s) ds \right\| \leq \\
&\leq \frac{\delta_F(\varepsilon)}{2} + \mu \int_{t_j}^t \|v_j^2(s)\| ds \leq \frac{\delta_F(\varepsilon)}{2} + \mu \int_{t_j}^t \lambda_F(s) ds \leq \frac{\delta_F(\varepsilon)}{2} + \mu \int_{t_j}^{t_j+\Delta} \lambda_F(s) ds \leq \\
&\leq \frac{\delta_F(\varepsilon)}{2} + \mu c \Delta \leq \frac{\delta_F(\varepsilon)}{2} + \mu_0 c \Delta < \frac{\delta_F(\varepsilon)}{2} + \delta \leq \frac{\delta_F(\varepsilon)}{2} + \frac{\delta_F(\varepsilon)}{2} = \delta_F(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Таким образом, $\|u_j - a_\mu(t)\| < \delta_F(\varepsilon) \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad (j = \overline{0, k-1})$.

Так как число $\delta_F(\varepsilon)$ разыскивалось по числу ε из выполнения условия (9) из леммы 1 для F , то

$$\alpha(F(t, u_j, 0), F(t, a_\mu(t), \mu)) < \varepsilon \sigma_F(t) \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad (j = \overline{0, k-1}).$$

Учитывая это, из (13) находим:

$$\rho(\dot{y}(s), H(s, y(s), \mu)) < \varepsilon \sigma_F(s/\mu) \quad \forall s \in [0, \mu t_k];$$

2) если $s \in (\mu t_k, 1]$, то

$$\begin{aligned}
\rho(\dot{y}(s), H(s, y(s), \mu)) &= \rho\left(v^2\left(\frac{s}{\mu}\right), H\left(s, a_\mu\left(\frac{s}{\mu}\right), \mu\right)\right) = \\
&= \rho\left(0, F\left(\frac{s}{\mu}, a_\mu\left(\frac{s}{\mu}\right), \mu\right)\right) = \left\|F\left(\frac{s}{\mu}, a_\mu\left(\frac{s}{\mu}\right), \mu\right)\right\| \leq \lambda_F(s/\mu).
\end{aligned}$$

Введя теперь на $[0, 1]$ функцию $g(s)$ по следующему правилу:

$$g(s) = \begin{cases} \varepsilon \sigma_F(s/\mu), & \text{если } s \in [0, \mu t_k], \\ \lambda_F(s/\mu), & \text{если } s \in (\mu t_k, 1], \end{cases}$$

будем иметь оценку при $s \in [0, 1]$

$$\rho(\dot{y}(s), H(s, y(s), \mu)) \leq g(s),$$

то есть для задачи (11) и функции (12) выполнено условие теоремы [7].

В силу этой теоремы на $[0, 1]$ существует решение $b(s)$ задачи (11) такое, что $\forall s \in [0, 1]$ выполняется неравенство:

$$\|b(s) - y(s)\| \leq \int_0^s \exp(m_H^\mu(s) - m_H^\mu(\tau)) g(\tau) d\tau; \quad (15)$$

здесь

$$\begin{aligned} m_H^\mu(s) &= \int_0^s L_H^\mu(\alpha) d\alpha = \\ &= \int_0^s L_F^\mu\left(\frac{\alpha}{\mu}\right) d\alpha = \mu \int_0^{s/\mu} L_F^\mu(\beta) d\beta \leq \mu \int_0^{1/\mu} L_F^\mu(\beta) d\beta \leq \mu c \frac{1}{\mu} = c. \end{aligned}$$

Тогда из (15) находим:

$$\begin{aligned} \|b(s) - y(s)\| &\leq \int_0^s \exp(m_H^\mu(s)) g(\tau) d\tau \leq \int_0^s \exp(c) g(\tau) d\tau \leq \\ &\leq \int_0^1 \exp(c) g(\tau) d\tau = \exp(c) \int_0^1 g(\tau) d\tau = \exp(c) \left(\int_0^{\mu_k} \varepsilon \sigma_F(\tau/\mu) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mu_k}^1 \lambda_F(\tau/\mu) d\tau \right) = \exp(c) \left(\mu \varepsilon \int_0^{t_k} \sigma_F(\beta) d\beta + \mu \int_{t_k}^{1/\mu} \lambda_F(\beta) d\beta \right) \leq \\ &\leq \exp(c) \left(\mu \varepsilon \int_0^{1/\mu} \sigma_F(\beta) d\beta + \mu \int_{t_k}^{t_k+\Delta} \lambda_F(\beta) d\beta \right) \leq \exp(c) (\mu \mu^{-1} \varepsilon c + \mu c \Delta) \leq \\ &\leq \exp(c) (\varepsilon c + \mu_0 c \Delta) < \exp(c) (\varepsilon c + \delta) \leq \exp(c) (\varepsilon c + \varepsilon) = \exp(c) \varepsilon (c + 1). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\forall t \in [0, 1/\mu]$ выполняется неравенство:

$$\|b(\mu t) - y(\mu t)\| \leq \exp(c) \varepsilon (c + 1).$$

Но, как отмечалось выше, $b(\mu t) = x_\mu(t)$ — решение задачи (1) на $[0, 1/\mu]$, а $y(\mu t) = a_\mu(t)$. Следовательно,

$$\|x_\mu(t) - a_\mu(t)\| \leq \exp(c) \varepsilon (c + 1) \quad \forall t \in [0, 1/\mu]. \quad (16)$$

Таким образом, на $[0, 1/\mu]$ найдено решение $x_\mu(t)$ задачи (1), для которого выполняется (16).

Чтобы оценить, насколько найденное решение $x_\mu(t)$ задачи (1) отличается от решения $u_\mu(t)$ задачи (2) на $[0, 1/\mu]$, оценим сначала, насколько $u_\mu(t)$ отличается от $a_\mu(t)$ на $[0, 1/\mu]$. В силу (14) это отличие в узлах сетки известно:

$$\|u_j - a_\mu(t_j)\| \leq \gamma(c + 1).$$

Считая, что t_j — ближайший слева к точке $t \in (0, 1/\mu]$ узел сетки, имеем:

$$\|u_\mu(t) - a_\mu(t)\| \leq \|u_\mu(t) - u_\mu(t_j)\| + \|u_\mu(t_j) - a_\mu(t_j)\| + \|a_\mu(t_j) - a_\mu(t)\| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mu \int_{t_j}^t \|v(s)\| ds + \gamma(c+1) + \mu \int_{t_j}^t \|v^2(s)\| ds \leq \\
&\leq \mu \int_{t_j}^t \lambda_{F_0}(s) ds + \gamma(c+1) + \mu \int_{t_j}^t \lambda_F(s) ds \leq \\
&\leq \mu \int_{t_j}^{t_j+\Delta} \lambda_{F_0}(s) ds + \gamma(c+1) + \mu \int_{t_j}^{t_j+\Delta} \lambda_F(s) ds \leq \mu c \Delta + \gamma(c+1) + \mu c \Delta = \\
&= 2\mu c \Delta + \gamma(c+1) \leq 2\mu_0 c \Delta + \gamma(c+1) < 2\delta + \gamma(c+1) \leq 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Теперь находим интересующую нас оценку отклонения найденного решения $x_\mu(t)$ задачи (1) от взятого первоначально решения $u_\mu(t)$ задачи (2) для любого $t \in [0, 1/\mu]$:

$$\begin{aligned}
\|x_\mu(t) - u_\mu(t)\| &\leq \|x_\mu(t) - a_\mu(t)\| + \|a_\mu(t) - u_\mu(t)\| \leq \varepsilon \exp(c)(c+1) + 3\varepsilon = \\
&= \varepsilon(3 + \exp(c)(c+1)).
\end{aligned}$$

В силу произвольности ε , произвольности $\mu \in (0, \mu_0]$ и произвольности взятого решения $u_\mu(t)$ задачи (2), это и означает, что задача (2) аппроксимирует снизу задачу (1). Теорема доказана.

4. Случай дифференциальных уравнений

Поскольку дифференциальные уравнения являются частным случаем дифференциальных включений, результат, изложенный в п. 1 настоящей работы для дифференциальных включений, имеет место и для дифференциальных уравнений. В этом случае правые части исходной и усредненной задач Коши являются однозначными функциями, и поэтому условие 5) о близости средних от F и F_0 из п. 1 записывается проще: полуотклонение по Хаусдорфу в нем заменяется на норму. Результат настоящей работы позволяет получить новую теорему усреднения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с медленными переменными.

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с медленными переменными:

$$\dot{x} = \mu f(t, x, \mu), \quad x(0) = x_0, \quad (17)$$

где функция $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^m$ может быть нелипшицевой по x ; $\mu \in [0, a]$ ($a > 0$) — малый параметр.

Наряду с задачей (17) рассмотрим задачу Коши для такой системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{u} = \mu f_0(t, u), \quad u(0) = x_0, \quad (18)$$

здесь функция $f_0 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ тоже может быть нелипшицевой по u . Предположим, что задача (18) при каждом $\mu \in (0, a]$ имеет хотя бы одно решение $u(t)$ на $[0, 1/\mu]$.

Пусть для функций f и f_0 выполнены следующие условия:

1) функции f и f_0 измеримы по t на $\mathbb{R}_+$ $\forall x \in \mathbb{R}^m \forall \mu \in [0, a]$ и $\forall u \in \mathbb{R}^m$ соответственно;

2) функции f и f_0 ограничены при каждом $t \in \mathbb{R}_+$, то есть $\|f(t, x, \mu)\| \leq \lambda_f(t) \forall (x, \mu) \in \mathbb{R}^m \times [0, a]$; $\|f_0(t, u)\| \leq \lambda_{f_0}(t) \forall u \in \mathbb{R}^m$ с локально интегрируемыми на $\mathbb{R}_+$ функциями $\lambda_f(t)$ и $\lambda_{f_0}(t)$ такими, что

$$\frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \lambda_f(t) dt = O(1), \quad \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \lambda_{f_0}(t) dt = O(1) \quad \text{при } \Delta \rightarrow +\infty$$

равномерно по t_0 на $\mathbb{R}_+$;

3) модули непрерывности по x и u соответственно функций $f^\circ(t, x) = f(t, x, 0)$ и $f_0(t, u)$ допускают оценки:

$$\omega_{f^\circ}(t, \delta) \leq \sigma_f(t) \eta_f(t, \delta), \quad \omega_{f_0}(t, \delta) \leq \sigma_{f_0}(t) \eta_{f_0}(t, \delta),$$

в которых неотрицательные функции $\eta_f(t, \delta)$ и $\eta_{f_0}(t, \delta)$ при $\delta \rightarrow +0$ стремятся к нулю равномерно по t на $\mathbb{R}_+$, а положительные локально интегрируемые на $\mathbb{R}_+$ функции $\sigma_f(t)$ и $\sigma_{f_0}(t)$ таковы, что

$$\frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \sigma_f(t) dt = O(1), \quad \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \sigma_{f_0}(t) dt = O(1) \quad \text{при } \Delta \rightarrow +\infty$$

равномерно по t_0 на $\mathbb{R}_+$;

4) функция $f(t, x, \mu)$ удовлетворяет условию:

$$\|f(t, x, \mu) - f(t, x, 0)\| \leq \sigma_f(t) \nu(t, x, \mu) \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m,$$

где $\nu(t, x, \mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$ равномерно по (t, x) на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$;

5) для функций f и f_0 выполняется условие близости средних

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} f_0(t, \xi_0) dt - \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} f(t, \xi_0, 0) dt \right\| = 0$$

равномерно по (t_0, ξ_0) на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$.

Следующая теорема является частным случаем теоремы 1, доказанной в п. 3 настоящей работы.

Теорема 2. Пусть правая часть f задачи (17) при каждом фиксированном $\mu \in [0, a]$ является односторонне липшицевой по x , то есть найдется локально интегрируемая на $\mathbb{R}_+$ функция $L_f^\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство:

$$\langle x - y, f(t, x, \mu) - f(t, y, \mu) \rangle \leq L_f^\mu(t) \|x - y\|^2,$$

и пусть функция L_f^μ из этого условия такова, что $\frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta L_f^\mu(t) dt = O(1)$ при $\Delta \rightarrow +\infty$ равномерно по μ на $[0, a]$.

Предположим, кроме того, что для функций f и f_0 выполнены перечисленные выше условия 1)–5). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\mu_0 > 0$ такое, что для любого $\mu \in (0, \mu_0]$ и для любого решения $u_\mu(t)$ задачи (18) найдется решение $x_\mu(t)$ задачи (17) такое, что $\|x_\mu(t) - u_\mu(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, 1/\mu]$.

Пример. Для задачи

$$\dot{x} = \mu(g(x) \sqrt{\mu} \sin^2(t + \mu) + \sin^2 x), \quad x(0) = -\pi/2 \quad (19)$$

с функцией

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq 0; \\ 1 - \sqrt{x}, & \text{если } 0 < x \leq 1; \\ 0, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

усредненная задача имеет такой вид:

$$\dot{u} = \mu \sin^2 u, \quad u(0) = -\pi/2. \quad (20)$$

Для этих задач выполнены все условия сформулированной выше теоремы 2. Функция $u(t) = -\operatorname{arcsctg}(\mu t)$ — решение задачи (20). Следовательно, в силу этой теоремы, для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\mu_0 > 0$ такое, что для любого $\mu \in (0, \mu_0]$ найдется решение $x(t)$ задачи (19), отличающееся на отрезке $[0, 1/\mu]$ от функции $u(t) = -\operatorname{arcsctg}(\mu t)$ меньше, чем на ε .

Литература

- [1] Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение систем дифференциальных включений. М.: Изд-во МГУ, 1998. 160 с.
- [2] Филатов О.П. Доказательство теорем усреднения для дифференциальных включений // Вестник Самарского государственного университета. 2001. №2(20). С. 20–93.
- [3] Плотников В.А., Плотников А.В., Витюк А.Н. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. Одесса: Астропринт, 1999. 356 с.
- [4] Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение дифференциальных включений с "быстрыми" и "медленными" переменными // Мат. заметки. 1990. Т. 47. Вып. 2. С. 102–109.
- [5] Филатов О.П., Хапаев М.М. О взаимной ε — аппроксимации решений системы дифференциальных включений и усредненного включения // Мат. заметки. 1990. Т. 47. Вып. 5. С. 127–134.
- [6] Красносельский М.А., Крейн С.Г. Нелокальные теоремы существования и теоремы единственности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1955. Т. 102, №1. С. 13–16.

- [7] Donchev T., Farkhi E. Stability and Euler approximation of one-sided Lipschitz differential inclusions // SIAM J. Control OPTIM. 1998. V. 36. No. 2. P. 780–796.

Поступила в редакцию 16/*XII*/2003;
в окончательном варианте — 6/*VII*/2004.

**ON LOWER APPROXIMATION OF THE SYSTEMS OF
DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH NON-LIPSCHITZ
RIGHT-HAND SIDE³**

© 2004 E.V. Sokolovskaya⁴

A theorem about lower approximation of the systems of differential inclusions with one-sided Lipschitz right-hand side and slow variables is proved. The inclusions with non-Lipschitz right-hand side are employed for the approximation.

Paper received 16/*XII*/2003.
Paper accepted 6/*VII*/2004.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) O.P. Filatov.

⁴Sokolovskaya Elena Valerievna (solena@ssu.samara.ru), Dept. of Partial Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russia.