УДК 519.21

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ СИММЕТРИЧНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ИХ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СВОЙСТВА[1]

© 2004 Е.А. Савинов[2]

Работа посвящена изучению логарифмических производных одного класса симметричных (в частности, α-симметричных) распределений на пространстве последовательностей. Получены явные формулы для вычисления логарифмических производных вдоль системы координатных векторов. Для последовательностей таких логарифмических производных установлены статистическая независимость и усиленный закон больших чисел.

1. Введение

Будем рассматривать измеримое пространство $(R^\infty, \mathcal{B}(\mathcal{R}^\infty))$, где R^∞ — пространство последовательностей, $\mathcal{B}(\mathcal{R}^\infty)$ — борелевская σ-алгебра.

Введем на R^∞ систему линейных функционалов

$$f_k(x) = x_k, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in R^\infty, \ k = 1, 2, \dots .$$

Аналогичные координатные функционалы на конечномерном пространстве R^n будем обозначать через $f_{k,n}$.

Вообще в работе будем рассматривать класс симметричных мер μ на $\mathcal{B}(R^\infty)$ вида

$$\mu\{A\} = \int\limits_0^\infty \mu^y\{A\}\, dG(y), \tag{1.1}$$

где $G(\cdot)$ — некоторая функция распределения на $(0, +\infty)$. В этом представлении семейство вспомогательных мер $\{\mu^y\}_{y>0}$ на $\mathcal{B}(\mathcal{R}^\infty)$ определяется последовательностью конечномерных распределений

$$\mu^y\{x \in R^\infty : f_1(x) \leqslant t_1, \dots, f_n(x) \leqslant t_n\} = \prod_{j=1}^n H\left(\frac{t_j}{y}\right), \tag{1.2}$$

---

[1] Представлена доктором физико-математических наук профессором С.В. Асташкиным.

[2] Савинов Евгений Анатольевич (henrylee@ssu.samara.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

где $H(t)$ — некоторая функция распределения с гладкой плотностью $H'(t) = h(t) > 0$.

Будем также рассматривать симметричные меры (1.1), для которых семейство мер $\{\mu^y\}_{y>0}$ определяется последовательностью конечномерных распределений

$$\mu^y\{x \in R^\infty : f_1(x) \leqslant t_1, \dots, f_n(x) \leqslant t_n\} = \prod_{j=1}^{n} F\left(t_j|y\right), \tag{1.3}$$

где $F(t|y)$ — некоторая условная функция распределения, обладающая свойствами:

1^0. Существует плотность $f(t|y)$, гладкая по $t \in R$ при любом $y > 0$.

2^0. Если $y_1 \neq y_2$, то $F(t|y_1) \neq F(t|y_2)$, $\forall t \in R$.

Заметим, что распределения вида (1.2) есть частный случай (1.3). В дальнейшем будем отдельно оговаривать, как задана мера μ: соотношениями (1.1) и (1.2) или, в более общем случае, соотношениями (1.1) и (1.3). Подразумевая то же самое, будем говорить, что мера μ имеет вид (1.1), (1.2) или (1.1), (1.3).

Введем класс так называемых α-симметричных мер.

Определение 1. Будем говорить, что вероятностная мера на $\mathcal{B}(R^\infty)$ α-симметрична ($0 < \alpha \leqslant 2$), если ее преобразование Фурье есть функционал вида

$$\phi(u) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^\alpha\right), \quad u = (u_1, \dots, u_n, \dots) \in R_0^\infty,$$

где $\varphi(\cdot)$ — некоторая вещественная функция, а R_0^∞ — пространство конечных последовательностей, сопряженное к R^∞ (см. [1, стр. 16]).

Известно (см. [2]), что для любой α-симметричной меры существует такая функция распределения $G(\cdot)$ на $(0, +\infty)$, что преобразование Фурье этой меры имеет следующее представление:

$$\phi(u) = \int_0^\infty \exp\left\{-r^\alpha \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^\alpha\right\} dG(r), \quad u \in R_0^\infty. \tag{1.4}$$

Ранее аналогичное представление для частного случая сферически-симметричной меры ($\alpha = 2$) было получено Шенбергом (см., например, [3]).

Пусть μ_α — α-симметричная мера на $\mathcal{B}(\mathcal{R}^\infty)$ с характеристическим функционалом (1.4). Можно показать, что функция распределения проекции μ_α на R^n имеет вид

$$W_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \int_0^\infty \prod_{j=1}^{n} H_\alpha\left(\frac{x_j}{r}\right) dG(r),$$

где $H_\alpha(t)$ — α-устойчивая функция распределения (см. [4]) с преобразованием Фурье $\hat{h}(u) = e^{-|u|^\alpha}$.

Таким образом, рассматривая меры вида (1.1), (1.3) и, в частности, (1.1), (1.2), мы автоматически включаем в рассмотрение важный класс α-симметричных мер (см. [2]). Кроме того, будучи частным случаем α-симметричных мер, в область рассмотрения попадает класс сферически симметричных мер, который в свою очередь включает в себя симметричные строго устойчивые меры (см., например, [5–7]).

Напомним известное определение логарифмической производной меры.

Определение 2. Производной борелевской меры μ по направлению $h \in R_0^\infty$ называется мера $d_h\mu$, определяемая равенством

$$d_h\mu(A) = \lim_{t\to 0} \frac{\mu(A+th) - \mu(A)}{t}, \quad A \in \mathcal{B}(R^\infty).$$

Если мера μ дифференцируема по направлению h, то мера $d_h\mu$ абсолютно непрерывна относительно μ, и существует производная Радона—Никодима

$$\beta_h^\mu(x) := \frac{d(d_h\mu)}{d\mu}(x), \quad x \in R^\infty,$$

которая называется *логарифмической производной меры* μ *по направлению* $h \in R_0^\infty$ [8, с. 183–184].

Цель данной работы состоит в вычислении логарифмических производных симметричных мер, заданных на пространстве R^∞ соотношениями (1.1) и (1.3), в направлении координатных векторов (теорема 1). Кроме того, для систем таких логарифмических производных в работе устанавливаются усиленные законы больших чисел и некоторые результаты о независимости (теоремы 2 и 3).

В полученных формулах для логарифмических производных участвует вспомогательная случайная величина $s_\infty(x)$, построенная ранее (см. [9]) в неявном виде. Для класса симметричных мер, задаваемых соотношениями (1.1) и (1.2), для $s_\infty(x)$ в работе устанавливаются явные формулы. Следует отметить, что для каждой меры μ, заданной соотношениями (1.1) и (1.2), представление $s_\infty(x)$ неоднозначно, т.е. $s_\infty(x)$ может быть задана различными формулами, совпадающими μ-почти наверное. Эти результаты отражены в леммах 1, 2 и 3. Наконец, в примерах 1, 2 и 3, иллюстрирующих теорему 1, приведены явные формулы логарифмических производных для некоторых частных случаев симметричных распределений. Причем для каждого из этих случаев указаны возможные варианты формул для $s_\infty(x)$, совпадающие почти наверное.

Ранее в работе [5] была получена одна из возможных формул для вычисления логарифмических производных в специальном случае сферически симметричных мер на локально выпуклом пространстве. Эта же формула, но без указания явного вида для $s_\infty(x)$ приведена в [8, с. 283]. Кроме того, для сферически симметричных мер на гильбертовом пространстве усиленный закон больших чисел и независимость системы логарифмических производных, умноженных на фиксированную случайную величину, ранее были получены в работе [10]. Вариант усиленного закона больших чисел для системы логарифмических производных меры Стьюдента в гильбертовом пространстве, умноженных на соответствующие базисные функционалы, рассматривался в [11].

2. Вспомогательная случайная величина $\mathbf{s}_\infty(\mathbf{x})$

Важную роль в дальнейшем будет играть случайная величина $s_\infty(x)$.

Пусть мера μ задана соотношениями (1.1) и (1.3). Следуя Дынкину [12], положим

$$F_n^*(t;x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{\{x: f_i(x)\leqslant t\}}(x), \quad x \in R^\infty, \ \ t \in R, \tag{2.1}$$

где $I_A(x)$ — индикатор множества A.

Можно показать (см. [9]), что существует случайная величина $s_\infty(x)$, определенная на множестве Γ полной μ меры и обладающая следующими свойствами:

$$\lim_{n\to\infty} F_n^*(t;x) = F(t|s_\infty(x)), \quad \forall x \in \Gamma, \ \ \forall t \in R; \tag{2.2}$$

$$\mu^y\{s_\infty(x) = y\} = 1, \quad \mu\{s_\infty(x) \leqslant v\} = G(v). \tag{2.3}$$

Вне множества Γ будем считать $s_\infty(x)$ равной нулю и, таким образом, определенной на всем пространстве R^∞.

В работах [5–7] в формулах для вычисления логарифмических производных сферически-симметричных мер фактически участвует функция $s_\infty(x)$ следующего вида:

$$s_\infty^2(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[f_k(x)]^2.$$

Различные формулы для вычисления $s_\infty(x)$ для более широкого класса распределений дают леммы 1,2 и 3.

3. Формулировка основных результатов

Теорема 1. Пусть мера μ на $\mathcal{B}(R^\infty)$ задана соотношениями (1.1) и (1.3) и дифференцируема вдоль всех направлений f_k, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда μ-почти наверное

$$\beta_{f_k}^{\mu}(x) = \frac{f'(f_k(x)|s_\infty(x))}{f(f_k(x)|s_\infty(x))}. \tag{3.1}$$

В частности, если μ на $\mathcal{B}(R^\infty)$ задана соотношениями (1.1) и (1.2), то μ-почти наверное

$$\beta_{f_k}^{\mu}(x) = \frac{1}{s_\infty(x)}\beta_1^h\left(\frac{f_k(x)}{s_\infty(x)}\right), \tag{3.2}$$

где $\beta_1^h(t) = h'(t)/h(t)$.

Теорема 2. Пусть мера μ задана соотношениями (1.1) и (1.2). Относительно меры μ каждая из следующих систем случайных величин независима:

$$\left\{s_\infty(x), \beta^\mu_{f_1}(x)s_\infty(x), \ldots, \beta^\mu_{f_n}(x)s_\infty(x), \ldots\right\},$$
$$\left\{s_\infty(x), f_1(x)\beta^\mu_{f_1}(x), \ldots, f_n(x)\beta^\mu_{f_n}(x), \ldots\right\}.$$

Относительно меры μ каждая из случайных величин $\beta^\mu_{f_k}(x)s_\infty(x)$, $f_k(x)\beta^\mu_{f_k}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ не зависит от семейства

$$f_1(x), \ldots, \widehat{f_k(x)}, \ldots, f_n(x), \ldots,$$

Теорема 3. Пусть мера μ задана соотношениями (1.1) и (1.2).

1^0. Если выполняется $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |th'(t)|\, dt < \infty$, то μ-почти наверное

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\beta^\mu_{f_k}(x) = -1. \tag{3.3}$$

2^0. Если выполняется $b_h := \int\limits_{-\infty}^{\infty} |h'(t)|\, dt < \infty$, то μ-почти наверное

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left|\beta^\mu_{f_k}(x)\right| = \frac{b_h}{s_\infty(x)}. \tag{3.4}$$

В случае сферически симметричных мер μ статистическая независимость для последовательности $\left\{\beta^\mu_{f_k}(x)s_\infty(x)\right\}$ и формула (3.4) ранее были установлены в [10]. Для мер Стьюдента, заданных на гильбертовом пространстве, формула (3.3) ранее установлена в [11].

4. Вспомогательные утверждения

Явные представления случайной величины $s_\infty(x)$ в случае, когда мера μ задана соотношениями (1.1) и (1.2) (где $h(t)$ удовлетворяет тем или иным условиям), дают следующие леммы 1, 2 и 3.

Пусть мера μ задана соотношениями (1.1) и (1.2). Введем семейство функционалов $\zeta_q(x)$ на R^∞ следующим образом. Пусть

$$Q = \left\{ q > 0 : 0 < \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|^q\, h(t)dt \right| < \infty \right\}.$$

Обозначим

$$m_q^q = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |t|^q\, h(t)dt, \quad \forall q \in Q.$$

В предположении сходимости обозначим

$$\zeta_q(x) = \frac{1}{m_q} \left[\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|^q \right]^{1/q}, \quad x \in \Gamma_q,\ \ q \in Q, \tag{4.1}$$

$$\Gamma_q = \left\{x \in R^\infty : 0 < \zeta_q(x) < +\infty\right\}.$$

Лемма 1. Для любого $q \in Q$ функционал $\zeta_q(x)$ измерим относительно σ-алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{R}^\infty)$, $\Gamma_q \in \mathcal{B}(\mathcal{R}^\infty)$, $\mu\{\Gamma_q\} = 1$ и

$$s_\infty(x) = \zeta_q(x)$$

μ-почти наверное.

Доказательство. Ввиду (1.2) относительно меры μ^y система функционалов $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ является последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, и

$$\mu^y\{x \in R^\infty : f_n(x) \leqslant t\} = H\left(\frac{t}{y}\right).$$

На основе усиленного закона больших чисел А.Н. Колмогорова [13, с. 418] можно утверждать, что $\forall y > 0$, $\forall q \in Q$

$$\mu^y\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|^q = \int_{-\infty}^{+\infty}|t|^q\, dH\left(\frac{t}{y}\right)\right\} = 1. \tag{4.2}$$

Используя критерии сходимости [13, с. 275] и фундаментальности [Там же, с. 271] почти наверное, можно утверждать, что $\forall y > 0$, $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\mu^y\left\{\sup_{k\geqslant 0}\left|\frac{1}{n+k}\sum_{j=1}^{n+k}\left|f_j(x)\right|^q - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|f_j(x)\right|^q\right| > \varepsilon\right\} = 0. \tag{4.3}$$

Таким образом, последовательность

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|^q, \quad q \in Q, \; n = 1, 2, \dots$$

фундаментальна по мере μ^y. Покажем, что она фундаментальна также по мере μ.

Зафиксируем n, обозначим

$$A_n = \left\{\sup_{k\geqslant 0}\left|\frac{1}{n+k}\sum_{j=1}^{n+k}\left|f_j(x)\right|^q - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|f_j(x)\right|^q\right| > \varepsilon\right\}.$$

Очевидно, что A_n — борелевское множество. Из (1.1) находим

$$\mu(A_n) = \int_0^\infty \mu^y(A_n)\, dG(y). \tag{4.4}$$

Так как $\forall y > 0$, $\varepsilon > 0$

$$0 \leqslant \mu^y(A_n) \leqslant 1,$$

то, используя (4.3) и теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, из (4.4) получим

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = 0.$$

Таким образом, последовательность

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|^q, \quad q \in Q, \ n = 1, 2, \ldots$$

фундаментальна по мере μ, следовательно [13, с. 275], существуют $\mathcal{B}(R^\infty)$-измеримая случайная величина $\zeta_q(x)$ и множество $\Gamma_q \in \mathcal{B}(R^\infty)$, $\mu\{\Gamma_q\} = 1$ такие, что

$$\zeta_q(x) = \frac{1}{m_q}\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|^q\right]^{1/q}, \quad x \in \Gamma_q.$$

Из (4.2) следует, что

$$\mu^y\{\zeta_q(x) = y\} = 1, \quad \forall q \in Q.$$

В силу (2.3)

$$\mu^y\{s_\infty(x) = y\} = 1.$$

Обозначим

$$\Gamma_{q;y} = \{\zeta_q(x) = y\}, \quad \Gamma_{y,\infty} = \{s_\infty(x) = y\}, \quad \Gamma^q = \bigcup_{y>0}\Gamma_{q;y}\Gamma_{y,\infty}.$$

Отметим, что

$$\mu^y\left\{\Gamma_{q;y}\Gamma_{y,\infty}\right\} = 1, \quad \forall q \in Q.$$

Легко видеть, что

$$\Gamma^q = \{\zeta_q(x) = s_\infty(x)\}.$$

Тогда $\Gamma^q = \{\zeta_q(x) - s_\infty(x) = 0\}$ — прообраз борелевского множества $\{0\}$ при $\mathcal{B}(R^\infty)$-измеримом отображении. Следовательно, $\Gamma^q \in \mathcal{B}(R^\infty)$, и

$$\mu\{\Gamma^q\} = \int_0^\infty \mu^\tau\left\{\bigcup_{y>0}\Gamma_{q;y}\Gamma_{y,\infty}\right\}dG(\tau) \geqslant \int_0^\infty \mu^\tau\left\{\Gamma_{q;\tau}\Gamma_{\tau,\infty}\right\}dG(\tau) = 1.$$

Замечание. Очевидно,

$$\Gamma_q = \bigcup_{y>0}\Gamma_{q;y}, \quad \Gamma^q \subset \Gamma_q.$$

Таким образом, $x \in \Gamma_q$ означает, что предел $\zeta_q(x)$ существует, а $x \in \Gamma^q$ означает, что он не только существует, но и равен $s_\infty(x)$. Тогда становится ясно, почему для некоторого x и q_1, $q_2 \in Q$, $q_1 \neq q_2$ пределы $\zeta_{q_1}(x)$ и $\zeta_{q_2}(x)$ могут существовать (когда $x \in \Gamma_{q_1}\Gamma_{q_2}$), но могут не совпадать друг с другом и с $s_\infty(x)$ (когда $x \notin \Gamma^{q_1}\Gamma^{q_2}$).

Лемма 2. Пусть

$$\int_{-\infty}^{\infty}\bigl|\ln|s|\bigr|dH(s) < \infty.$$

Обозначим

$$m_{ln} = \exp\left\{-\int_{-\infty}^{\infty}\ln|s|\,dH(s)\right\}.$$

Тогда μ-почти наверное

$$s_\infty(x) = m_{ln} \exp\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln|f_k(x)|\right\}. \tag{4.5}$$

Замечание. Отметим, что, вообще говоря, последовательность случайных величин $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln|f_k(x)|$ не определена на всем пространстве R^∞, но определена на некотором множестве полной меры. Действительно, пусть $U = \{x \in R^\infty : \exists\ k \in N : x_k = 0\}$ — множество последовательностей, содержащих нули. Очевидно, $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, где $U_n = \{x \in R^\infty : x_n = 0\}$. Тогда

$$\mu\{U\} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{U_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty \mu^y\{f_n(x) = 0\}\, dG(y) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty \left[\int_{-0}^{+0} dH\left(\frac{t}{y}\right)\right] dG(y) = 0.$$

Лемма 3. Пусть μ – α-симметричная $(0 < \alpha < 2)$ или сферически симметричная $(\alpha = 2)$ мера на $(R^\infty, \mathcal{B}(\mathcal{R}^\infty))$. Тогда μ-почти наверное

$$s_\infty(x) = \left[-\ln\left[\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{if_k(x)}\right]\right]^{1/\alpha}, \tag{4.6}$$

причем предел в (4.6) — μ-почти наверное действительное положительное число.

Отметим, что доказательства лемм 2 и 3 аналогичны доказательству леммы 1.

Следующая лемма используется при доказательстве теоремы 2, а ее доказательство проводится аналогично доказательству соответствующих утверждений в [7] для устойчивых эллиптически контурированных мер в гильбертовом пространстве.

Лемма 4. Относительно меры μ система случайных величин

$$\left\{s_\infty(x), \frac{f_1(x)}{s_\infty(x)}, \ldots, \frac{f_n(x)}{s_\infty(x)}, \ldots\right\}$$

независима, случайная величина $\frac{f_k(x)}{s_\infty(x)}$ не зависит от семейства

$$f_1(x), \ldots, \widehat{f_k(x)}, \ldots, f_n(x), \ldots$$

($\hat{}$ — знак пропуска элемента), и

$$\mu\left\{\frac{f_k(x)}{s_\infty(x)} \leqslant u\right\} = H(u). \tag{4.7}$$

5. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Для доказательства построим последовательность логарифмических производных специально заданных конечномерных распределений и покажем справедливость следующих утверждений: a) построенная последовательность логарифмических производных образует равномерно интегрируемый мартингал и сходится к логарифмической производной меры μ; b) каждый элемент этой последовательности легко вычисляется и не зависит от n, т. е. мы имеем стационарную последовательность функций, заданных явно. Таким образом логарифмическая производная меры μ совпадает с каждой из построенных логарифмических производных специально заданных конечномерных распределений.

Приведем подробное доказательство.

Введем случайный вектор $f_{n,\infty} : R^\infty \to R^{n+1}$, σ-алгебру $\mathcal{B}_{n,\infty}$ и меру $\mu_{n,\infty}$ на σ-алгебре борелевских множеств из R^{n+1}.

$$f_{n,\infty}(x) = (s_\infty(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)), \tag{5.1}$$
$$\mathcal{B}_{n,\infty} = \left\{f_{n,\infty}^{-1}(C) : C \in \mathcal{B}\left(R^{n+1}\right)\right\},$$
$$\mu_{n,\infty}(A) = \mu\left((f_{n,\infty}^{-1}(A)\right), \quad A \in \mathcal{B}\left(R^{n+1}\right).$$

Рассмотрим распределение вектора $f_{n,\infty}(x)$:

$$W_{n,\infty}(v, t_1, \ldots, t_n) = \mu\{x \in R^\infty : s_\infty(x) \leqslant v, f_1(x) \leqslant t_1, \ldots, f_n(x) \leqslant t_n\} =$$

ввиду свойства (2.3)

$$= \int_0^\infty \mu^y\{x \in R^\infty : y \leqslant v, f_1(x) \leqslant t_1, \ldots, f_n(x) \leqslant t_n\}\, g(y)\, dy =$$

$$= \int_0^v \mu^y\{x \in R^\infty : f_1(x) \leqslant t_1, \ldots, f_n(x) \leqslant t_n\}\, g(y)\, dy = \int_0^v \prod_{j=1}^n F\left(t_j|y\right)\, g(y)\, dy.$$

Плотность этого распределения задается формулой

$$w_{n,\infty}(v, t_1, \ldots, t_n) = \prod_{j=1}^n f\left(t_j|v\right)\, g(v). \tag{5.2}$$

Рассмотрим логарифмическую производную меры $\mu_{n,\infty}$ по направлению $f_{k+1,n+1}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Из (5.2) следует [8, c. 283]

$$\beta^{\mu_{n,\infty}}_{f_{k+1,n+1}}(v, t_1, \ldots, t_n) = \frac{\frac{\partial}{\partial t_k} w_{n,\infty}(v, t_1, \ldots, t_n)}{w_{n,\infty}(v, t_1, \ldots, t_n)} = \frac{f'(t_k|v)}{f(t_k|v)}.$$

Подставим в качестве аргумента в это выражение вектор $f_{n,\infty}(x)$ (5.1):

$$\beta^{\mu_{n,\infty}}_{f_{k+1,n+1}}(f_{n,\infty}(x)) = \frac{f'(f_k(x)|s_\infty(x))}{f(f_k(x)|s_\infty(x))}. \tag{5.3}$$

Осталось показать, что μ-почти наверное

$$\lim_{n\to\infty} \beta^{\mu_{n,\infty}}_{f_{k+1,n+1}}(f_{n,\infty}(x)) = \beta^{\mu}_{f_k}(x). \tag{5.4}$$

Отметим, что в нашем случае рассматриваются проекции логарифмических производных на подпространства, порожденные векторами с зависимыми компонентами (векторами $f_{n,\infty}(x)$). В [14, с. 165–166] было приведено доказательство близкого результата о сходимости, в котором рассматривались проекции логарифмических производных на линейные подпространства гильбертова пространства, порожденные векторами с независимыми компонентами.

Сначала покажем, что последовательность в (5.4) есть последовательность условных математических ожиданий, а именно:

$$\beta^{\mu_{n,\infty}}_{f_{k+1,n+1}}(f_{n,\infty}(x)) = \mathrm{M}\left(\beta^{\mu}_{f_k}(x)\middle| \mathcal{B}_{n,\infty}\right). \tag{5.5}$$

Действительно, так как $\beta^{\mu_{n,\infty}}_{f_{k+1,n+1}}(v, t_1, \ldots, t_n)$ — борелевская функция из R^{n+1} в R, то $\beta^{\mu_{n,\infty}}_{f_{k+1,n+1}}(f_{n,\infty}(x))$ $\mathcal{B}_{n,\infty}$-измерима. Далее, пусть $C \in \mathcal{B}(R^{n+1})$. Нетрудно убедиться в справедливости следующих двух равенств:

$$\int\limits_{f^{-1}_{n,\infty}(C)} \beta^{\mu_{n,\infty}}_{f_{k+1,n+1}}(f_{n,\infty}(x))\,\mu(dx) =$$

$$= \int\limits_{C} \beta^{\mu_{n,\infty}}_{f_{k+1,n+1}}(v, t_1, \ldots, t_n)\, d\mu_{n,\infty}(v, t_1, \ldots, t_n) = d_{f_{k+1,n+1}}\mu_{n,\infty}(C). \tag{5.6}$$

$$\int\limits_{f^{-1}_{n,\infty}(C)} \beta^{\mu}_{f_k}(x)\,\mu(dx) = d_{f_k}\mu(f^{-1}_{n,\infty}(C)). \tag{5.7}$$

Ясно, что

$$d_{f_{k+1,n+1}}\mu_{n,\infty}(C) = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\left[\mu_{n,\infty}(C + \delta f_{k+1,n+1}) - \mu_{n,\infty}(C)\right],$$

$$d_{f_k}\mu(f^{-1}_{n,\infty}(C)) = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\left[\mu(f^{-1}_{n,\infty}(C) + \delta f_k) - \mu(f^{-1}_{n,\infty}(C))\right]$$

по определению производной меры.

Можно показать, что

$$f^{-1}_{n,\infty}(C + \delta f_{k+1,n+1}) = f^{-1}_{n,\infty}(C) + \delta f_k.$$

Справедливость этого равенства следует из того, что в силу (2.1), (2.2) и свойств функции $F(t|y)$ случайная величина $s_\infty(x)$ не изменится при сдвиге x вдоль одной координаты, а следовательно, вектор $f_{n,\infty}(x)$ ввиду линейности отличных от $s_\infty(x)$ компонент при таком сдвиге x также сдвинется вдоль соответствующей координаты.

Ввиду последних трех равенств имеем

$$d_{f_{k+1,n+1}}\mu_{n,\infty}(C) = d_{f_k}\mu(f^{-1}_{n,\infty}(C)). \tag{5.8}$$

Таким образом, из (5.6)–(5.8) следует (5.5).

Для доказательства сходимости (5.4) воспользуемся теоремой Леви о сходимости условных математических ожиданий.

Для этого, во-первых, отметим, что $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n,\infty}$ (где $\mathcal{B}_n$ — σ-алгебра цилиндрических множеств в R^∞ с борелевскими основаниями в R^n). Действительно, пусть $A \in \mathcal{B}_n$. Тогда $A = (f_1, \dots, f_n)^{-1}(C)$, $C \in \mathcal{B}(R^n)$. Следовательно, $A = f_{n,\infty}^{-1}(R \times C) \in \mathcal{B}_{n,\infty}$. Во-вторых, отметим, что $\sigma(\cup_n \mathcal{B}_n) = \mathcal{B}(R^\infty)$ [8, с. 36]. Из этих двух фактов следует, что

$$\mathcal{B}(R^\infty) \subset \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_{n,\infty}\right). \tag{5.9}$$

Далее очевидно, что последовательность $\mathcal{B}_{n,\infty}$ — возрастающая, т.е. $\mathcal{B}_{n,\infty} \subset \mathcal{B}_{n+1,\infty}$. Используя теорему Леви о сходимости условных математических ожиданий [13, с. 544], будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{M}\left(\beta^{\mu}_{f_k}(x)\middle| \mathcal{B}_{n,\infty}\right) = \mathrm{M}\left(\beta^{\mu}_{f_k}(x)\middle|\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_{n,\infty}\right)\right). \tag{5.10}$$

Учитывая, что $\beta^{\mu}_{f_k}(x)$ — $\mathcal{B}(R^\infty)$-измерима [8, с. 283], из (5.5), (5.9) и (5.10) получим (5.4). Из (5.4) и (5.3) сразу следует (3.1).

Формула (3.2) сразу следует из (3.1).

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Из (3.2) следует, что

$$\beta^{\mu}_{f_k}(x) s_\infty(x) = \beta^h_1\left(\frac{f_k(x)}{s_\infty(x)}\right), \quad f_k(x)\beta^{\mu}_{f_k}(x) = \frac{f_k(x)}{s_\infty(x)}\beta^h_1\left(\frac{f_k(x)}{s_\infty(x)}\right). \tag{5.11}$$

Ввиду того, что функции $\beta^h_1(t)$ и $t\beta^h_1(t)$ — борелевские, утверждения теоремы сразу следуют из (5.11) и леммы 4 [13, с. 194].

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Для доказательства будем использовать только формулы (4.7) и (5.11).

1^0. Ясно, что

$$M\left\{\left|f_k(x)\beta^{\mu}_{f_k}(x)\right|\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left|t\beta^h_1(t)\right| h(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|th'(t)\right|\, dt.$$

Тогда, учитывая, что $\mathrm{th}(t)$ стремится к нулю на бесконечности,

$$M\left\{f_k(x)\beta^{\mu}_{f_k}(x)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} t\beta^h_1(t)h(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} t\, dh(t) =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, dt = -1.$$

Таким образом, случайные величины $f_k(x)\beta^{\mu}_{f_k}(x)$, $k = 1, 2, \dots$ независимы и одинаково распределены с математическим ожиданием равным -1. Тогда для них выполняется усиленный закон больших чисел Колмогорова [13, с. 418].

2^0. Очевидно,

$$M\left\{\left|\beta^{\mu}_{f_k}(x)s_\infty(x)\right|\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|h'(t)\right|dt = b_h.$$

Тогда для случайных величин $\left|\beta^{\mu}_{f_k}(x)s_\infty(x)\right|$, $k = 1, 2, \ldots$ выполняется усиленный закон больших чисел.

Теорема доказана.

6. Примеры вычисления логарифмических производных с использованием теоремы 1

Пример 1. Пусть μ-сферически симметричная мера. Тогда она задана соотношениями (1.1) и (1.2) с $h(t) = 1/\sqrt{2\pi}\exp\{-t^2/2\}$. Тогда $\beta^h_1(t) = -t$, и из (3.2) следует

$$\beta^{\mu}_{f_k}(x) = -\frac{f_k(x)}{s^2_\infty(x)}, \tag{6.1}$$

где $s_\infty(x)$ может задаваться формулой (4.1) с любым $q > 0$, формулой (4.5), а также формулой (4.6) с $\alpha = 2$. Формула (6.1) для локально выпуклых пространств хорошо известна — с неявным выражением для $s_\infty(x)$ [8, с. 283] и явным видом (4.1) с $q = 2$ (см. [5]).

Пример 2. Пусть μ — α-симметричная мера. Тогда она задана соотношениями (1.1) и (1.2), где $h(t)$ — плотность одномерного устойчивого распределения с характеристической функцией $\hat{h}(u) = e^{-|u|^\alpha}$. Логарифмическая производная меры μ удовлетворяет соотношению (3.2), и $s_\infty(x)$ в этом случае может иметь представление (4.1) с $q < \alpha$, представление (4.5) (условия леммы 2 для $h(t)$ выполняются [4, с. 242] или представление (4.6). В частности, для 1-симметричной меры μ (непрерывной смеси распределений Коши)

$$\beta^{\mu}_{f_k}(x) = -\frac{2f_k(x)}{s^2_\infty(x) + f^2_k(x)}.$$

Пример 3. Пусть μ-непрерывная смесь показательных распределений, т.е. задана соотношениями (1.1) и (1.2) с $h(t) = e^{-t}$, $t > 0$ и сосредоточена на пространстве R^∞_+. Тогда $\beta^h_1(t) = -1$, $t > 0$, и μ-почти наверное на R^∞_+

$$\beta^{\mu}_{f_k}(x) = -\frac{1}{s_\infty(x)},$$

где $s_\infty(x)$ может задаваться представлением (4.1) с коэффициентом $m_q = [\Gamma(q+1)]^{1/q}$ или формулой (4.5) с коэффициентом $m_{ln} = e^\gamma$, где γ есть константа Эйлера.

Выражаю благодарность С.Я. Шатских за внимание к работе.

Литература

[1] Вахания Н.Н. Вероятностные распределения в линейных пространствах. Тбилиси: Мецниереба, 1971.

[2] Bretagnolle J., Dacunha-Castelle D., Krivine J.L. Lois stables et espaces L^p. Ann. Inst. H. Poincare, 1966, V. 11, No. 2. P. 231–259.

[3] Вахания Н.Н., Тариеладзе В.И., Чобанян С.А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985. 368 с.

[4] Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983. 304 с.

[5] Норин Н.В., Смолянов О.Г. Несколько результатов о логарифмических производных мер на локально выпуклом пространстве // Матем. заметки. 1993. Т. 54. №6. С. 135–138.

[6] Norin N.V. Ito-Wick decomposition for the mixtures of gaussian measures // Frontiers in Pure and Appl. Probab. II. 1996. P. 153–162.

[7] Шатских С.Я. Устойчивые эллиптически контурированные меры в гильбертовом пространстве: асимптотические свойства условных распределений // Изв.РАЕН серия МММИУ. 1999. Т. 3. №3. С. 43–81.

[8] Богачев В.И. Гауссовские меры. М.: Наука, Физматлит, 1997. 352 с.

[9] Кнутова Е.М. Шатских С.Я. Асимптотические свойства условных квантилей для одного класса симметрических распределений на пространстве R^∞ // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2000. Т. 7. Вып. 2. С. 495–496.

[10] Шатских С.Я. Некоторые свойства логарифмических производных эллиптически контурированных мер // Вестник СамГУ. 2001. №4(22). С. 109–114.

[11] Кнутова Е.М. Асимптотические свойства стьюдентовских условных распределений в гильбертовом пространстве // Вестник СамГУ. 2001. №4(22). С. 42–55.

[12] Дынкин Е.Б. Классы эквивалентных случайных величин // УМН. №54(8). 1953. С. 125–134.

[13] Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989. 640 с.

[14] Скороход А.В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1975. 232 с.

Поступила в редакцию 16/X/2003;
в окончательном варианте — 16/X/2003.

LOGARITHMIC DERIVATIVES OF SYMMETRIC DISTRIBUTIONS IN SPACE OF SEQUENCES AND THEIR PROBABILITY PROPERTIES[3]

 E.A. Savinov[4]

The paper is devoted to study of logarithmic derivatives of a class of symmetric (in particular α-symmetric) distributions in epy space of sequences. Explicit relations for logarithmic derivatives along the system of coordinate vectors are obtained. The statistic independence and the strong law of large numbers for the sequences of logarithmic derivatives are formulated.

Paper received 16/X/2003.
Paper accepted 16/X/2003.

---

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. S.V. Astashkin.
[4]Savinov Evgeny Anatolievitch (henrylee@ssu.samara.ru), Dept. of Theory of Functions and Functional Analysis, Samara State University, Samara, 443011, Russia.