УДК 519.999

ВЫЧИСЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СВЕРТОК РАЗЛИЧНЫХ ВИНЕРОВСКИХ ПРОЦЕССОВ[1]

 Д.П. Кожан[2]

Вычисляются характеристические функции и распределения функционалов-сверток от различных винеровских процессов и броуновских мостов. Полученные теоремы полностью описывают свойства характеристических функций всех функционалов вида $I = w_1 \circledast w_2 + L(w_1) + L(w_2)$ и $I = w_1 * w_2 + L(w_1) + L(w_2)$.

1. Предварительные сведения

Рассмотрим квадратичные функционалы от стандартных независимых винеровских процессов $w_1(t)$ и $w_2(t)$ вида

$$I = w_1 \circledast w_2 + L_1(w_1) + L_2(w_2) = \int\limits_0^1 w_1(1-t)dw_2(t) + \int\limits_0^1 g_1(t)dw_1(t) + \int\limits_0^1 g_2(t)dw_2(t)$$

и

$$I = w_1 * w_2 + L_1(w_1) + L_2(w_2) = \int\limits_0^1 w_1(1-t)w_2(t)dt + \int\limits_0^1 g_1(t)dw_1(t) + \int\limits_0^1 g_2(t)dw_2(t),$$

где $g_1(t)$ и $g_2(t)$ — неслучайные. Основным результатом работы являются явные формулы для характеристических функций случайных величин $I = w_1 \circledast w_2 + L_1(w_1) + L_2(w_2)$ и $I = w_1 * w_2 + L_1(w_1) + L_2(w_2)$, а также других функционалов подобного вида и их применения к некоторым задачам статистики.

[1]Представлена доктором технических наук профессором Ю.В. Солодянниковым.

[2]Кожан Дмитрий Петрович (kdp@ssu.samara.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 117571, Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

2. Вычисление распределений случайных величин $\mathbf{I = \int\limits_0^1 w_1(t)dw_2(1-t)}$ и $\mathbf{I = \int\limits_0^1 w_1(t)w_2(1-t)\,dt}$

Теорема 1.1. Характеристическая функция случайной величины $I = w_1 \circledast w_2 = \int\limits_0^1 w_1(t)dw_2(1-t)$, где $w_1(t)$ и $w_2(t)$ — два стандартных независимых винеровских процесса, имеет следующий вид:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} t}}. \tag{1}$$

Доказательство. Используем свойство винеровских процессов: если $w_1(t)$ и $w_2(t)$ — два стандартных независимых винеровских процесса, то

$$\overline{w}_1(t) = \frac{w_1(t)+w_2(t)}{\sqrt{2}},\ \overline{w}_2(t) = \frac{w_1(t)-w_2(t)}{\sqrt{2}}$$

— стандартные независимые винеровские процессы. Тогда

$$w_1(t) = \frac{\overline{w}_1(t)+\overline{w}_2(t)}{\sqrt{2}},\ w_2(t) = \frac{\overline{w}_1(t)-\overline{w}_2(t)}{\sqrt{2}}, \tag{2}$$

и можно записать свертку в виде:

$$I = \int\limits_0^1 w_1(t)dw_2(1-t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (\overline{w}_1(t)+\overline{w}_2(t))\,d\,(\overline{w}_1(1-t)-\overline{w}_2(1-t)) = \frac{1}{2}(I_1 - I_2),$$

так как $\int\limits_0^1 \overline{w}_1(t)d\overline{w}_2(1-t) = \int\limits_0^1 \overline{w}_2(t)d\overline{w}_1(1-t)$, а

$$I_1 = \int\limits_0^1 \overline{w}_1(t)d\overline{w}_1(1-t),\ I_2 = \int\limits_0^1 \overline{w}_2(t)d\overline{w}_2(1-t).$$

Следовательно,

$$\varphi_I(t) = \varphi_{I_1}\left(\frac{t}{2}\right)\varphi_{I_2}\left(-\frac{t}{2}\right),$$

где

$$\varphi_{I_k}(t) = (\operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t)^{-1/2},\ k = 1, 2,$$

(см. [5]), тогда

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} t}}.$$

Теорема 1.2. Случайная величина $I = w_1 \circledast w_2 = \int\limits_0^1 w_1(t)dw_2(1-t)$, где $w_1(t)$ и $w_2(t)$ — два стандартных независимых винеровских процесса, имеет функцию распределения

$$F_I(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} C_{-1/2}^{k} \operatorname{arctg}\frac{2x}{1+4k}, \qquad -\infty < x < \infty \tag{3}$$

и плотность распределения

$$f_I(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} C^k_{-1/2}\,\frac{1+4k}{4x^2+(1+4k)^2}, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{4}$$

где

$$C^k_{-1/2} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!}.$$

Доказательство. Доказательство аналогично [6]. По теореме непрерывности функция распределения случайной величины $I = w_1 \circledast w_2$ однозначно определяется своей характеристической функцией, причем

$$f_I(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt. \tag{5}$$

Подставляя (1) в (4), получим

$$f_I(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{\mathrm{ch}(t)}}\,dt, \tag{6}$$

так как

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,t}} = \sum_{k=0}^{\infty} C^k_{-1/2}e^{-\frac{t}{2}(1+4k)},$$

то

$$f_I(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \cos(xt)\sum_{k=0}^{\infty} C^k_{-1/2}e^{-\frac{t}{2}(1+4k)}dt.$$

Ряд, стоящий под знаком интеграла, сходится равномерно по t, так как при $t \geqslant 0$

$$C^k_{-1/2}e^{-\frac{t}{2}(1+4k)} \leqslant C^k_{-1/2}.$$

Отсюда получается формула (4), интегрированием которой устанавливается справедливость (3). Ряды в формулах (3) и (4) сходятся равномерно по x.

Теорема 1.3. Моменты случайной величины $I = w_1 \circledast w_2$, где $w_1(t)$ и $w_2(t)$ — два стандартных независимых винеровских процесса, определяются формулой

$$MI^k = \sum_{n=0}^{\infty} C^n_{-1/2}\frac{(-1)^k(1+4n)^k}{2^k},\ n = 1, 2, \ldots$$

Эта формула получается k-кратным дифференцированием (1). В частности,

$$MI = 0,\ DI = \frac{1}{4}.$$

С помощью формулы Стирлинга можно показать, что общий член ряда (4) имеет порядок $O\left(\frac{1}{\sqrt{k}k}\right)$, т.е. медленно сходится. Перепишем равенство (4) в иной форме. Очевидно,

$$f_I(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} C^k_{-1/2}\,\frac{1}{1+4k} - 4x^2\sum_{k=0}^{\infty} C^k_{-1/2}\frac{1}{(1+4k)(4x^2+(1+4k)^2)}\right\}.$$

Первая сумма есть $\frac{1}{2}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, где $K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — полный эллиптический интеграл второго рода, т.е.

$$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 z}}.$$

Тогда

$$f_I(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{8\sqrt{2}x^2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} C_{-1/2}^k \frac{1}{(1+4k)(4x^2+(1+4k)^2)}. \tag{7}$$

Сходящийся ряд в (7) сходится быстрее ряда (4), так как общий член ряда (7) имеет порядок $O\left(\frac{1}{\sqrt{k}k^3}\right)$.

Теорема 1.4. Характеристическая функция случайной величины

$$I = w_1 * w_2 = \int\limits_0^1 w_1(t)w_2(1-t)\,dt,$$

где $w_1(t)$ и $w_2(t)$ — два стандартных независимых винеровских процесса, представлена как

$$\varphi(t) = \frac{2}{\sqrt{\operatorname{ch}\sqrt{2t} + 2 + \cos\sqrt{2t}}}. \tag{8}$$

Доказательство аналогично. Справедливо разложение

$$\varphi(t) = 1 - 1/24\,t^2 + \frac{101}{40320}\,t^4 + O(t^4),$$

из которого

$$MI = 0,\ DI = \frac{1}{24}.$$

3. Вычисление характеристических функций случайных величин $\mathbf{I = w_1 \circledast w_2 + L_1(w_1) + L_2(w_2)}$ и $\mathbf{I = w_1 * w_2 + aw_1(1) + bw_2(1)}$

Теорема 2.1. Характеристическая функция случайной величины

$$I = \int\limits_0^1 w_1(1-t)dw_2(t) + \int\limits_0^1 g_1(t)dw_1(t) + \int\limits_0^1 g_2(t)dw_2(t),$$

где $w_1(t)$ и $w_2(t)$ — два стандартных независимых винеровских процесса, а $g_1(t)$ и $g_2(t)$ неслучайные функции из пространства L_2, имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} t}}\exp\left[-\frac{t^2}{2}\int\limits_0^1 (g_1^2(t) + g_2^2(t))dt - \frac{it^3F}{32}\right], \tag{9}$$

где

$$F=\frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\int\limits_{-1/2}^{1/2}\int\limits_{-u}^{u}\mathrm{ch}(t(u-1/2))\,\mathrm{ch}(t(v-1/2))\Big(g_1(u)g_1(v)-g_2(u)g_2(v)\Big)du\,dv+$$

$$+\frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\int\limits_{-1/2}^{1/2}\int\limits_{-u}^{u}\mathrm{ch}(t(u-1/2))i\,\mathrm{sh}(t(v+1/2))\Big(g_1(u)g_1(v)+g_2(u)g_2(v)\Big)du\,dv.$$

Доказательство. Представим интеграл в виде:

$$I=\int\limits_0^1 w_1(1-t)dw_2(t)+\int\limits_0^1 g_1(t)dw_1(t)+\int\limits_0^1 g_2(t)dw_2(t)=\frac{1}{2}I_1-\frac{1}{2}I_2,$$

где

$$I_1=\int\limits_0^1 w_1(1-t)dw_1(t)+\sqrt{2}\int\limits_0^1(g_1(t)+g_2(t))dw_1(t),$$

$$I_2=\int\limits_0^1 w_2(1-t)dw_2(t)+\sqrt{2}\int\limits_0^1(g_2(t)-g_1(t))dw_1(t).$$

Тогда

$$\varphi_I(t)=\varphi_{I_1}\left(\frac{t}{2}\right)\varphi_{I_2}\left(-\frac{t}{2}\right),$$

где

$$\varphi_{I_k}(t)=(\mathrm{ch}\,t+i\,\mathrm{sh}\,t)^{-1/2}\exp\left[-\frac{t^2}{2}\int\limits_0^1 g_k^2(t)dt-\frac{it^3F_k}{4}\right],$$

$$F_k=\frac{1}{\mathrm{ch}\,(2t)}\int\limits_{-1/2}^{1/2}\int\limits_{-u}^{u}g_k(u)g_k(v)\,\mathrm{ch}\,(t(2u-1))\Big(\mathrm{ch}\,(t(2v-1))+i\,\mathrm{sh}\,(t(2v+1))\Big)du\,dv,\ k=1,2,$$

см. [3]. Формула (9) получается элементарными преобразованиями.

В качестве примера применения теоремы 5 рассмотрим случайную величину

$$I=w_1\circledast w_2+aw_1(1)+bw_2(1).$$

Выполняя необходимые интегрирования, находим

$$\varphi_I(t)=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,t}}\exp\Big[\,t\,\mathrm{th}\,(t)\Big(a^2-4\,iab\,\mathrm{sh}\,(t)+b^2\Big)\Big].\tag{10}$$

Теорема 2.2. Совместная характеристическая функция случайных величин

$$\int\limits_0^1 w_1(1-t)dw_2(t),\quad w_1(1),\quad w_2(1),$$

где $w_1(t)$ и $w_2(t)$ — два стандартных независимых винеровских процесса, определяется равенством

$$\varphi(t,s,r) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} t}} \exp\Big[\, t \operatorname{th}(t)\Big(s^2 - 4\,isr \operatorname{sh}(t) + r^2\Big)\Big]. \tag{11}$$

Следствие 1. Характеристическая функция случайной величины

$$I = (w_t + Y_\sigma) \circledast w_t,$$

где Y_σ — нормальная с.в. с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2, независимая от w_t, имеет вид

$$\varphi_I(t) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} t - 2\,t \operatorname{sh} t\sigma^2}}. \tag{12}$$

Проинтегрировав (11) по нормальной плотности $f(a,0,\sigma)$ при $b=0$, получим (12). Этот результат можно интерпретировать следующим образом. Винеровский процесс $w(t+s)$ при фиксированном s тождествен сумме $w(t)+Y_{\sqrt{s}}$, где $Y_{\sqrt{s}}$ — нормальная случайная величина с параметрами 0 и s. Тогда х. ф.

$$I = w(t+s) \circledast w(t)$$

определяется формулой

$$\varphi_I(t) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} t - 2\,t \operatorname{sh} t s^2}}$$

и допускает разложение в ряд

$$\varphi_I(t) = 1 - \left(\frac{1}{4} + s^2\right)t^2 + O\left(t^4\right),$$

из которого

$$MI = 0, \qquad DI = \left(\frac{1}{4} + s^2\right).$$

Пусть $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — броуновские мосты на [0,1], порожденные независимыми стандартными винеровскими процессами соответственно $w_1(t)$ и $w_2(t)$.

Следствие 2. Характеристическая функция случайных величин

$$\int_0^1 \xi_1(1-t)dw_2(t), \qquad \int_0^1 \xi_2(1-t)dw_1(t)$$

определяется равенством

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{-2t \operatorname{sh} t}} \ \exp\Big\{t \ \operatorname{th} t\Big(1 + 4\operatorname{sh}^2 t\Big)\Big\}.$$

Из формулы (11) настоящей статьи и (13) работы [3] вытекает следующий результат.

Теорема 2.3. Характеристическая функция случайной величины

$$\int_0^1 \xi_1(1-t)d\xi_2(t)$$

имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{t}{2\,\mathrm{sh}\,\frac{t}{2}} \tag{12}$$

и допускает разложение в ряд

$$\varphi(t) = 1 - \frac{1}{24}t^2 + \frac{7}{5760}t^4 - \frac{31}{967680}t^6 + O\left(t^8\right),$$

из которого можно найти значения моментов, в частности,

$$MI = 0, \quad DI = \frac{1}{24}.$$

Теорема 2.4. Случайная величина

$$\int_0^1 \xi_1(1-t)d\xi_2(t)$$

имеет функцию распределения

$$F_I(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\left[\Psi(\frac{1}{2} - ix) - \Psi(\frac{1}{2} + ix)\right], \qquad -\infty < x < \infty \tag{13}$$

и плотность распределения

$$f_I(x) = \frac{1}{2\pi}\left[\Psi(1,\ \frac{1}{2} - ix) - \Psi(1,\ \frac{1}{2} + ix)\right], \qquad -\infty < x < \infty. \tag{14}$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.2. По теореме непрерывности функция распределения случайной величины $I = \xi_1 \circledast \xi_2$ однозначно определяется своей характеристической функцией, причем

$$f_I(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\frac{t}{2\,\mathrm{sh}\,\frac{t}{2}}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{2t\cos(xt)e^{-\frac{t}{2}}}{1-e^{-t}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} 2t\cos(xt)e^{-\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4(1+4k)^2 - 16x^2}{\pi\left((1+4k)^2 + 4x^2\right)^2}.$$

Отсюда получается формула (14), интегрированием которой устанавливается справедливость (13).

Теорема 2.5. Совместная характеристическая функция случайных величин

$$\int_0^1 w_1(1-t)w_2(t)\,dt, \quad w_1(1), \quad w_2(1),$$

где $w_1(t)$ и $w_2(t)$ — два стандартных независимых винеровских процесса, определяется равенством

$$\varphi(t,s,r) = \frac{4}{\sqrt{\mathrm{ch}\,\sqrt{2t} + 2 + \cos\,\sqrt{2t}}}\times$$

$$\times \exp\left[\frac{it^{3/4}\left(\left(r^2+s^2\right) i \operatorname{sh}\sqrt{\frac{t}{2}} - 2\,sr\sin\sqrt{\frac{t}{2}}\right)\operatorname{ch}\sqrt{\frac{t}{2}}}{\sqrt{2}\left(\operatorname{ch}^2\sqrt{\frac{t}{2}}+\cos^2\sqrt{\frac{t}{2}}\right)}\right]\times$$
$$\times \exp\left[\frac{it^{3/4}\cos\sqrt{\frac{t}{2}}\left(2\,sr\operatorname{sh}\sqrt{\frac{t}{2}} + i\left(s^2+r^2\right)\sin\sqrt{\frac{t}{2}}\right)}{\sqrt{2}\left(\operatorname{ch}^2\sqrt{\frac{t}{2}}+\cos^2\sqrt{\frac{t}{2}}\right)}\right]. \tag{15}$$

Формула для характеристической функции случайной величины $I = w_1 * w_2 + L_1(w_1) + L_2(w_2)$ получается аналогично, но в силу громоздкости приводить ее здесь не будем.

Воспользовавшись результатом (14) работы [3], можно получить следующее утверждение.

Теорема 2.6. Характеристическая функция случайной величины

$$I = \int_0^1 \xi_1(1-t)\xi_2(t)\,dt$$

представлена как

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{t}{\operatorname{ch}^2\sqrt{\frac{t}{2}} - \cos^2\sqrt{\frac{t}{2}}}}.$$

Справедливо разложение

$$\varphi(t) = 1 - \frac{1}{180}t^2 + \frac{19}{453600}t^4 + O\left(t^6\right),$$

откуда

$$MI = 0, \qquad DI = \frac{1}{180}.$$

4. Вычисление характеристических функций некоторых других функционалов от процессов $\mathbf{w_1(t)}$ и $\mathbf{w_2(t)}$

Предложение 1. Характеристическая функция случайной величины

$$I = (w_1 + a) * (w_2 + b),$$

где w_1 и w_2 — стандартные независимые винеровские процессы, а a и b — действительные константы, определяется формулой

$$\varphi(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\sqrt{\frac{t}{2}} + \cos^2\sqrt{\frac{t}{2}}}}\, e^{P(t)}, \tag{16}$$

где

$$P(t) = \frac{\sqrt{t}\left(ab\left(\operatorname{sh}\sqrt{\frac{t}{2}}\cos\sqrt{\frac{t}{2}} + \sin\sqrt{\frac{t}{2}}\operatorname{ch}\sqrt{\frac{t}{2}}\right) + i\left(a^2+b^2\right)\left(\sin\sqrt{2t} - \operatorname{sh}\sqrt{2t}\right)\right)}{\operatorname{ch}^2\sqrt{\frac{t}{2}} + \cos^2\sqrt{\frac{t}{2}}} + 2abit.$$

Доказательство. Используя формулу интегрирования по частям

$$\int_0^t g(s)dw(s) = g(t)w(t) - \int_0^t g'(s)w(s)ds$$

[7, с. 306], запишем свертку в виде

$$I = (w_1 + a) * (w_2 + b) = w_1 * w_2 + a\int_0^1 (1-t)\,dw_2(t) + b\int_0^1 (1-t)\,dw_1(t) + ab.$$

Произведем замену (2) и получим

$$I = (w_1 + a) * (w_2 + b) = \frac{1}{2}\left(\overline{w_1} * \overline{w_1} + (a+b)\sqrt{2}\int_0^1 (1-t)\,d\,\overline{w_1}(t)\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\overline{w_2} * \overline{w_2} + (b-a)\sqrt{2}\int_0^1 (1-t)\,d\,\overline{w_2}(t)\right).$$

Тогда, воспользовавшись результатом (3.1) работы [5], после преобразований получим (16).

Из этого результата вытекает ряд следствий.

Следствие 1. Характеристическая функция случайной величины

$$I = (w_1 + a) * (w_2 + a)$$

определяется формулой

$$\varphi_I(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\sqrt{\frac{t}{2}} + \cos^2\sqrt{\frac{t}{2}}}}\, e^{P(t)}, \tag{17}$$

где

$$P(t) = \frac{\sqrt{t}a^2\left(\mathrm{sh}\sqrt{\frac{t}{2}}\cos\sqrt{\frac{t}{2}} + \sin\sqrt{\frac{t}{2}}\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{t}{2}} + i\sin\sqrt{2t} - i\,\mathrm{sh}\sqrt{2t}\right)}{\mathrm{ch}^2\sqrt{\frac{t}{2}} + \cos^2\sqrt{\frac{t}{2}}} + 2a^2 it.$$

Следствие 2. Характеристическая функция случайной величины

$$I = (w_1 + Y_\sigma) * (w_2 + Y_\sigma),$$

где Y_σ — нормальная с.в. с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2, независимая от w_1 и w_2, определяется формулой

$$\varphi_I(t) = \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{(4it\sigma^2 N + 2M\sigma^2 - N)}}, \tag{18}$$

где

$$N = \cos^2\sqrt{2}\sqrt{\frac{t}{2}} + \mathrm{ch}^2\sqrt{\frac{t}{2}}$$

и

$$M = \sqrt{t}\left(i\sin\sqrt{2t} - i\,\mathrm{sh}\,\sqrt{2t} + \mathrm{sh}\,\sqrt{\frac{t}{2}}t\cos\sqrt{\frac{t}{2}} + \sin\sqrt{\frac{t}{2}}\,\mathrm{ch}\,\sqrt{\frac{t}{2}}\right).$$

Проинтегрировав (17) по нормальной плотности, получим (18). Этот результат можно интерпретировать следующим образом. Винеровский процесс $w(t+s)$ при фиксированном s тождествен сумме $w(t)+Y_{\sqrt{s}}$, где $Y_{\sqrt{s}}$ — нормальная случайная величина с параметрами 0 и s. Тогда х. ф. $I = w(t+ s) * w(t+s)$ есть

$$\varphi_I(t) = \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{(4its^2N + 2Ms^2 - N)}},$$

где N и M определены выше.

Следствие 3. Характеристическая функция случайной величины

$$X = (w_1 + a) * w_2$$

определяется как

$$\varphi_I(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\sqrt{\frac{t}{2}} + \cos^2\sqrt{\frac{t}{2}}}}\exp\left\{\frac{i\sqrt{t}a^2\left(\sin\sqrt{2t} - \mathrm{sh}\,\sqrt{2t}\right)}{\mathrm{ch}^2\sqrt{\frac{t}{2}} + \cos^2\sqrt{\frac{t}{2}}}\right\}.$$

Следствие 4. Характеристическая функция случайной величины

$$X = (w_1 + Y_\sigma) * w_2$$

определяется формулой

$$\varphi_X(t) = \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{2\left(\sin\sqrt{2t} - \mathrm{sh}\,\sqrt{2t}\right)\sigma^2 - \mathrm{ch}^2\sqrt{\frac{t}{2}} - \cos^2\sqrt{\frac{t}{2}}}}.$$

Аналогично получается

Следствие 5. Характеристическая функция случайной величины

$$X = w_1(t+s) * w_2(t)$$

есть

$$\varphi_X(t) = \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{2\left(\sin\sqrt{2t} - \mathrm{sh}\,\sqrt{2t}\right)s^2 - \mathrm{ch}^2\sqrt{\frac{t}{2}} - \cos^2\sqrt{\frac{t}{2}}}}.$$

5. Статистические приложения [2, 3]

Отметим, что функционалы от броуновского моста играют важную роль в математической статистике, поскольку броуновский мост описывает предельное поведение нормированного отклонения $\sqrt{n}(F_n(x)-F(x))$ выборочной функции распределения $F_n(x)$ от теоретической непрерывной $F(x)$. Перейдя к равномерно распределенным величинам на отрезке $[0,1]$, рассмотрим эмпирические функции распределения $F_n(t)$, $F_n^*(t)$ и $\widetilde{F}_{2n} = \frac{1}{2}(F_n(t) - F_n^*(t))$, построенные соответственно по выборкам $\{t_i = \overline{1,n}\}$, $\{1 - t_i = \overline{1,n}\}$ и $\{t_i = \overline{1,n}\} \bigcup \{1-t_i = \overline{1,n}\}$. Им соответствуют статистики Крамера—Мизеса—Смирнова $W_n^2 = n\int\limits_0^1 (F_n(t)-t)^2\,dt = n\int\limits_0^1 (F_n^*(t)-t)^2\,dt$ и $\widetilde{W_n^2} = 2n\int\limits_0^1 (\widetilde{F}_{2n}(t)-t)^2\,dt$, которые связаны с нормированными отклонениями $\xi_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t)-F(t))$ равенством

$$\xi_n * \xi_n = W_n^2 - \widetilde{W}_n^2. \tag{17}$$

Приведем доказательство (17) из [3].

$$\xi_n * \xi_n = \int\limits_0^1 \xi_n(1-t)\xi_n(t)\,dt = n\int\limits_0^1 (F_n(t)-t)(t-F_n^*(t))\,dt =$$

$$= \frac{n}{2}\left[\int\limits_0^1 (t-F_n(t))^2\,dt + \int\limits_0^1 (t-F_n^*(t))^2\,dt - \int\limits_0^1 (F_n(t)+F_n^*(t)-2t)^2\,dt\right] =$$

$$= W_n^2 - \widetilde{W_n^2}.$$

Предложение 1. Статистика

$$\theta_n = W_n^2 - \widetilde{W_n^2}$$

имеет то же предельное распределение, что и свертка броуновских мостов $\xi * \xi(t)$.

Предложение 2. Статистика $\frac{1}{2}\left(\theta_n^1 - \theta_n^2\right)$, построенная по эмпирическим функциям $F_n^1(t)$, $F_n^{1*}(t)$, $\widetilde{F_{2n}^1} = \frac{1}{2}(F_n^1(t) - F_n^{1*}(t))$ и $F_n^2(x)$, $F_n^{2*}(t)$, $\widetilde{F_{2n}^2} = \frac{1}{2}(F_n^2(t) - F_n^{2*}(t))$, имеет то же предельное распределение, что и свертка броуновских мостов $\xi_1 * \xi_2(t)$.

Полученные в данной работе формулы для функционалов сверток вида $I = w_1 \circledast w_1 + L_1(w_1) + L_2(w_2)$ и $I = w_1 * w_2 + L_1(w_1) + L_2(2)$ полностью описывают характеристические функции этого класса функционалов.

Литература

[1] Вирченко Ю.П., Мазманишвили А.С. Распределение вероятностей случайного функционала-свертки от нормального марковского процесса // Проблемы передачи информации. 1990. Т. XXVI. Вып. 3. С. 96–101.

[2] Клячко А.А., Солодянников Ю.В. Вычисление распределения свертки винеровского процесса // Проблемы передачи информации. 1985. Т. XXI. Вып. 4. С. 41–48.

[3] Клячко А.А., Солодянников Ю.В. Вычисление характеристических функций некоторых функционалов от винеровского процесса и броуновского моста // Теория вероятностей и ее применения. 1986. Вып. 3. С. 569–573.

[4] Лиске Х. О распределении одного функционала от винеровского процесса // Теория случайных процессов. 1982. №10. С. 50–54.

[5] Солодянников Ю.В., Кожан Д.П. Вычисление распределений некоторых функционалов от винеровских процессов // Вестник СамГУ. 2003. №2. С. 10–27.

[6] Солодянников Ю.В., Кожан Д.П. Вычисление характеристических функций квадратичных функционалов от винеровских процессов // Вестник СамГУ. 2003. №4. С. 64–70.

[7] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2003.

Поступила в редакцию 10/*III*/2004;
в окончательном варианте — 10/*III*/2004.

CALCULATION OF CHARACTERISTIC FUNCTIONS OF CONVOLUTIONS OF VARIOUS WIENER PROCESSES[3]

© 2004 D.P. Kojan[4]

The paper is devoted to calculation of characteristic functions and distributions of convolutions of various Wiener processes. The obtained results entirely describe properties of characteristic functions of functionals $I = w_1 \circledast w_1 + L_1(w_1) + L_2(w_2)$ and $I = w_1 * w_2 + L_1(w_1) + L_2(2)$.

Paper received 10/*III*/2004.
Paper accepted 10/*III*/2004.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Tech.) Y.V. Solodyannikov.

[4]Kojan Dmitri Petrovich (kdp@ssu.samara.ru), Dept. of Theory of Functions and Functional Analysis, Samara State University, Samara, 443011, Russia.