

ФЕЙНМАНОВСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

© 2004 Э.Н. Ахметзянова, В.М. Долгополов, М.В. Долгополов¹

В работе представлено краткое введение в аналитические вычисления основных однопетлевых скалярных интегралов, возникающие в теории квантованных полей. Исследуются одно-, двух-, трех- и четырехточечные функции, которые возникают при изучении физических процессов на однопетлевом уровне теории возмущений.

Введение

При рассмотрении физических процессов взаимодействия элементарных частиц в рамках квантовополевой теории возмущений для S -матрицы возникают задачи вычисления определенного типа фейнмановских интегралов, называемых петлевыми интегралами. Изучение петлевых интегралов и исследование их поведения для различных значений параметров представляют большой интерес.

Вычисление скалярных интегралов — одна из наиболее трудоемких и длительных математических процедур, к ним приводят многочисленные редукционные методы при аналитическом вычислении фейнмановских интегралов. Поэтому часто необходимо иметь эффективный алгоритм аналитического и численного их вычисления. В данной работе исследуются одно-, двух-, трех- и четырехточечные функции, которые возникают при изучении физических процессов на однопетлевом уровне теории возмущений. Рассматривается общий метод, предложенный 'т Хоофтом и Велтманом в 1979 году [1].

1. Однопетлевые скалярные интегралы

Скалярные интегралы

$$T_0^N(k_1, \dots, k_{N-1}, m_1^2, \dots, m_N^2) \equiv \frac{1}{i\pi^2} \int d^4q \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_N}, \quad (1.1)$$

¹Ахметзянова Эльза Нуровна (elza@ssu.samara.ru), Долгополов Вячеслав Михайлович, кафедра высшей математики и информатики, Долгополов Михаил Вячеславович (dolg@ssu.samara.ru), кафедра общей и теоретической физики Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

где $a_j \equiv (q + k_{j-1})^2 - m_j^2 + i\epsilon$, $j = 2, \dots, N$, $k_0 \equiv 0$, с помощью фейнмановской параметризации следующей формы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_N} &= (N-1)! \int_0^1 \frac{dx_1 \dots dx_N}{\left(\sum_{1 \leq l \leq N} a_l x_l \right)^N} \delta \left(1 - \sum_l x_l \right) = \\ &= \Gamma(N) \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^1 dx_2 \dots \int_0^{x_{N-2}} dx_{N-1} \frac{1}{[a_1(1-x_1) + a_2(x_1-x_2) + \dots + a_N x_{N-1}]^N}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $a_l = (q + k_l)^2 - m_l^2 + i\epsilon$, и перехода к евклидову D -мерному пространству и q_E можно свести к кратному интегралу:

$$T_0^N = (-1)^N i \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^{x_{N-2}} dx_{N-1} \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{\pi^2} \int \frac{d^D q_E}{(q_E^2 + L_N)^N}, \quad (1.3)$$

где L_N является функцией $x_1, \dots, x_{N-1}, k_1, \dots, k_{N-1}, m_1, \dots, m_N$. Так, при $N=1$: $L_1 = m_1^2 - i\epsilon$; при $N=2$: $L_2 = x^2 k_1^2 - x(k_1^2 + m_2^2 - m_1^2) - m_2^2 - i\epsilon$;

$$L_N = [x_1(-k_{N-1}) + x_2(k_1 - k_{N-1}) + \dots + x_{N-1}(k_{N-2} - k_{N-1})]^2 - i\epsilon. \quad (1.4)$$

Обобщение фейнмановской параметризации на произвольное количество пропагаторов (множителей в знаменателе) с разными степенями

$$\left(\prod_{i=1}^k a_i^{n_i} \right)^{-1} = \frac{\Gamma(\sum_i n_i)}{\prod_{i=1}^k \Gamma(n_i)} \prod_{i=1}^k \left(\int_0^1 x_i^{n_i-1} dx_i \right) \delta \left(\sum_{i=1}^k x_i - 1 \right) \left(\sum_{i=1}^k a_i x_i \right)^{-\sum_i n_i}$$

доказывается по индукции. Здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция со свойствами: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\Gamma(n+1) = n!$ и $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Используя формулу

$$\int \frac{d^D p}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha} = i\pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{[-q^2 - m^2]^{\alpha - \frac{D}{2}}}, \quad (1.5)$$

получаем

$$T_0^N = (-1)^N \frac{\mu^{4-D}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(N-D/2)}{\Gamma(N)} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{N-2}} dx_{N-1} L_N^{-N+D/2}. \quad (1.6)$$

Выведем более общую, чем (1.5), формулу для интегрирования по импульсу в D -мерном пространстве-времени Минковского (при использовании размерной регуляризации):

$$I_{D,\alpha,\beta} \equiv \int d^D k \frac{(k^2)^\alpha}{(k^2 - M^2 + i\epsilon)^\beta}.$$

Мы можем вычислить данный интеграл, используя так называемый поворот Вика, когда мы заменяем интеграл по $\text{Re } k_0$ на интеграл по $\text{Im } k_0$.

Интеграл по двум четвертям исчезает при радиусе, стремящемся к бесконечности, так как нет полюсов внутри контура интегрирования. Тогда

$$I_{D,\alpha,\beta} = i(-1)^{\alpha-\beta} \int d^D k \frac{(k^2)^\alpha}{(k^2 + M^2 - i\epsilon)^\beta}, \quad k^2 = K_0^2 + \vec{k}^2.$$

Заметим, что интеграл оказывается сферически симметричным при переходе к радиальной и угловым координатам. Зная площадь сферы в D -мерном пространстве ($S_D = 2\pi^{D/2}/\Gamma(D/2)$), в частности, $S_2 = 2\pi$, $S_3 = 4\pi$, $S_4 = 2\pi^2$), получим

$$\begin{aligned} I_{D,\alpha,\beta} &= i(-1)^{\alpha-\beta} \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \int r^{D-1} dr \frac{r^{2\alpha}}{(r^2 + M^2 - i\epsilon)^\beta} = \\ &= \frac{i(-1)^{\alpha-\beta} \pi^{D/2} \Gamma(\alpha + D/2) \Gamma(\beta - \alpha - D/2)}{(M^2 - i\epsilon)^{\beta-\alpha-D/2} \Gamma(\beta) \Gamma(D/2)}. \end{aligned}$$

Мы использовали интегральное представление для бета-функции

$$B(n-1, k) \equiv \frac{\Gamma(n)\Gamma(k)}{\Gamma(n+k)} = \int_0^\infty dz \frac{z^{n-1}}{(z+1)^{k+n}}. \quad (1.7)$$

Таким образом, получаем

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - a^2)^n} = \frac{i(-1)^n \Gamma(n - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{a^2}\right)^{n-\frac{D}{2}}, \quad (1.8)$$

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2}{(k^2 - a^2)^n} = \frac{i(-1)^{n-1} \Gamma(n - \frac{D}{2} - 1)}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{a^2}\right)^{n-\frac{D}{2}-1}. \quad (1.9)$$

2. Интеграл $\mathcal{A}_0$

Аналитическое выражение для простейшего одноточечного скалярного интеграла представляется следующим образом:

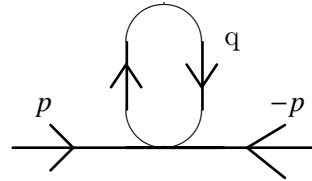
$$\mathcal{A}_0(m^2) \equiv \frac{16\pi^2}{i} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} = \quad (2.1)$$

$$= \lim_{D \rightarrow 4-0} \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} = \lim_{D \rightarrow 4-0} m^2 \left(\Delta - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 1 \right), \quad (2.2)$$

где расходящаяся часть (полюсное слагаемое $\sim \epsilon^{-1} \equiv (4-D)^{-1}$)

$$\Delta \equiv \frac{2}{4-D} - \gamma_E + \ln 4\pi, \quad \gamma_E \approx 0,5772156649.$$

Соответствующая диаграмма Фейнмана:



Представим краткий вывод результата для интеграла $\mathcal{A}_0$. Применяя (1.5), получаем для интеграла (2.2):

$$-m^2 \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^{2-\frac{D}{2}} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right). \quad (2.3)$$

Гамма-функция имеет полюсы в нуле и в отрицательных целых числах, и мы видим, что расходимость интеграла проявляется как простой полюс при $D \rightarrow 4$. Используем свойства гамма-функции:

$$\Gamma(-n + \epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{\epsilon} + \psi_1(n+1) + \mathcal{O}(\epsilon) \right], \quad (2.4)$$

где

$$\psi_1(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma_E, \quad (2.5)$$

причем $\gamma_E = -\psi_1(1) \approx 0,577$ (постоянная Эйлера—Маскерони).

Полагая $\epsilon = 4 - D$, получаем

$$\Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) = \Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) = -\frac{2}{\epsilon} - 1 + \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (2.6)$$

В результате разложение выражения (2.3) около точки $D = 4$ дает (здесь используем разложение $a^\epsilon = 1 + \epsilon \ln a + \dots$)

$$\begin{aligned} & -m^2 \left[-\frac{2}{\epsilon} - 1 + \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \left[1 + \frac{\epsilon}{2} \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] = \\ & = \frac{2m^2}{\epsilon} + m^2 \left[1 - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon) = \frac{2m^2}{\epsilon} + \text{к.ч.} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Заметим, что конечная часть поправки к пропагатору (к.ч.) зависит от произвольной массы μ .

3. Интеграл $\mathcal{B}_0$

Аналитическое выражение для скалярного 2-точечного интеграла представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0(k^2, m_1^2, m_2^2) &= \frac{1}{i\pi^2} \int d^4q \frac{1}{[q^2 - m_1^2 + i\epsilon][(q+k)^2 - m_2^2 + i\epsilon]} = \\ &= \Delta + \ln \frac{k^2}{\mu^2} - 2 + \ln[(x_1 - 1)(x_2 - 1)] + x_1 \ln \frac{x_1}{x_1 - 1} + x_2 \ln \frac{x_2}{x_2 - 1}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} x_{1,2}(p, m_1, m_2) &= \frac{1}{2} + \frac{m_1^2 - m_2^2}{2p^2} \pm \frac{1}{2p^2} \lambda^{1/2}(p^2, m_1^2, m_2^2), \\ \lambda(x, y, z) &= [x - (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2][x - (\sqrt{y} + \sqrt{z})^2]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Представим вывод результата для интеграла $\mathcal{B}_0(q^2, m^2, m^2)$. Знаменатели в подынтегральном выражении объединяются с помощью формулы параметризации Фейнмана

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[az + b(1-z)]^2}. \quad (3.3)$$

Легко заметить, что

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{dx}{x^2},$$

где положить $x = az + b(1-z)$, причем a и b следует считать комплексными числами, чтобы исключить сингулярность $a = b$.

Рассмотрим случай $m_1 = m_2 = m$. Имеем

$$\frac{1}{(p^2 - m^2)} \frac{1}{(p - q)^2 - m^2} = \int_0^1 \frac{dz}{[p^2 - m^2 - 2pq(1-z) + q^2(1-z)]^2}.$$

Совершая замену переменных по формуле $p' = p - q(1-z)$, видим, что знаменатель в подынтегральном выражении является квадратом выражения $p'^2 - m^2 + q^2 z(1-z)$, причем $d^D p' = d^D p$. Поэтому после изменения обозначений $p' \rightarrow p$ получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0(q^2, m^2, m^2) &= \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int_0^1 dz \int d^D p \frac{1}{[p^2 - m^2 + q^2 z(1-z)]^2} = \\ &= i \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{\pi^2} (\pi)^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(2)} \int_0^1 dz [m^2 - q^2 z(1-z)]^{\frac{D}{2}-2} = \\ &= \Gamma(2 - \frac{D}{2}) \int_0^1 dz \left[\frac{m^2 - q^2 z(1-z)}{4\pi\mu^2} \right]^{\frac{D}{2}-2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В пределе при $D \rightarrow 4$ равенство (2.4) дает

$$\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon).$$

Выражение (3.4) принимает вид

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \int_0^1 dz \ln \left[\frac{m^2 - q^2 z(1-z)}{4\pi\mu^2} \right] \right) = \\ &= \frac{2}{\epsilon} - \left(\gamma + \int_0^1 dz \ln \left[\frac{m^2 - q^2 z(1-z)}{4\pi\mu^2} \right] \right). \end{aligned}$$

Полагая

$$F(s, m, \mu) \equiv \int_0^1 dz \ln \left[\frac{m^2 - q^2 z(1-z)}{4\pi\mu^2} \right],$$

получаем

$$\mathcal{B}_0(q^2, m^2, m^2) = \frac{2}{\varepsilon} - [\gamma + F(s, m, \mu)] = \frac{2}{\varepsilon} + \text{к.ч.} \quad (3.5)$$

4. Интеграл $C_0(\mathbf{k}_1^2, \mathbf{k}_2^2, (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)^2, \mathbf{m}_1^2, \mathbf{m}_2^2, \mathbf{m}_3^2)$

Выражение для 3-точечного скалярного интеграла имеет вид

$$\begin{aligned} C_0(k_1^2, k_2^2, (k_2 - k_1)^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) &\equiv \\ &\equiv \frac{1}{i\pi^2} \int \frac{d^4 q}{[q^2 - m_1^2 + i\varepsilon][(q + k_1)^2 - m_2^2 + i\varepsilon][(q + k_2)^2 - m_3^2 + i\varepsilon]} = \\ &= - \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f} = \\ &= - \frac{1}{c + 2ab} \sum_{i=1}^3 \sum_{\sigma=\pm} (-1)^{1+i} \left[Li_2\left(\frac{y_i}{y_i - y_i^\sigma}\right) - Li_2\left(\frac{y_i - 1}{y_i - y_i^\sigma}\right) \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} y_0 &= -\frac{d + e\alpha}{c + 2b\alpha}, \quad y_1 = y_0 + \alpha, \quad y_2 = \frac{y_0}{1 - \alpha}, \quad y_3 = -\frac{y_0}{\alpha}, \\ a &= (k_2 - k_1)^2, \quad b = k_1^2, \quad c = k_2^2 - k_1^2 - (k_2 - k_1)^2, \quad f = m_3^2 - i\varepsilon, \\ d &= m_2^2 - m_3^2 - (k_2 - k_1)^2, \quad e = m_1^2 - m_2^2 + (k_2 - k_1)^2 - k_2^2. \end{aligned}$$

Ответ в общем случае выражается через спецфункцию (дилогарифм)

$$Li_2(z) = - \int_0^1 \frac{\ln(1 - zt)}{t} dt = - \int_0^z \frac{\ln(1 - v)}{v} dv = - \int_0^{-z} \frac{\ln(1 + \lambda)}{\lambda} d\lambda,$$

$y_i^\pm$ являются корнями уравнений

$$\begin{aligned} -k_1^2 y_1^2 + (m_2^2 - m_1^2 + k_1^2) y_1 - m_2^2 + i\varepsilon &= 0, \\ \{-by_1^2 + (-e - c)y_1 + (-d - f - a) &= 0\}, \\ k_2^2 y_2^2 + (m_1^2 - m_3^2 - k_2^2) y_2 + m_3^2 - i\varepsilon &= 0, \\ \{(c + b + a)y_2^2 + (e + d)y_2 + f &= 0\}, \\ (k_2 - k_1)^2 y_3^2 + (m_2^2 - m_3^2 - (k_2 - k_1)^2) y_3 + m_3^2 - i\varepsilon &= 0, \\ \{ay_3^2 + dy_3 + f &= 0\}, \end{aligned}$$

а α — корнем уравнения

$$b\alpha^2 + c\alpha + a = 0.$$

Проведем вычисление интеграла в несколько этапов.

1. Параметризация Фейнмана. Введем дополнительное интегрирование, позволяющее сначала легко вычислять интегралы по импульсному пространству.

Воспользуемся формулой

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 a_2 a_3} &= 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy [a_1 + (a_2 - a_1)x + (a_3 - a_2)y]^{-3} = \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [a_1(1-x-y) + a_2x + a_3y]^{-3}. \end{aligned}$$

Замечание: формула содержит произвол (симметрична) по отношению к перестановке a_1 , a_2 и a_3 .

Проверка:

$$\begin{aligned} &2 \int_0^1 dx \int_0^x dy [a_1 + (a_2 - a_1)x + (a_3 - a_2)y]^{-3} = \\ &= \frac{2}{(a_3 - a_2)^3} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left(y + \frac{a_1 + (a_2 - a_1)x}{a_3 - a_2} \right)^{-3} = \\ &= \frac{1}{(a_2 - a_3)^3} \int_0^1 dx \left\{ \left(x + \frac{a_1 + (a_2 - a_1)x}{a_3 - a_2} \right)^{-2} - \left(\frac{a_1 + (a_2 - a_1)x}{a_3 - a_2} \right)^{-2} \right\} = \\ &= \frac{1}{a_2 - a_3} \left\{ \underbrace{\int_0^1 dx (a_1 + (a_3 - a_1)x)^{-2}}_{I_1 = (a_1 a_3)^{-1}} - \underbrace{\int_0^1 dx (a_1 + (a_2 - a_1)x)^{-2}}_{I_2 = (a_1 a_2)^{-1}} \right\} = \\ &= \frac{1}{a_2 - a_3} \left(\frac{1}{a_1 a_3} - \frac{1}{a_1 a_2} \right) = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{(a_2 - a_3)} \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} \right) = \frac{1}{a_1 a_2 a_3}, \end{aligned}$$

где интегралы I_1 и I_2 вычисляются так:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{(a_3 - a_1)^2} \int_0^1 dx \left(\frac{a_1}{a_3 - a_1} + x \right)^{-2} = \frac{-1}{(a_3 - a_1)^2} \left(\frac{1}{\frac{a_1}{a_3 - a_1} + 1} - \frac{1}{\frac{a_1}{a_3 - a_1}} \right) = \\ &= \frac{-1}{(a_3 - a_1)^2} \left(\frac{a_3 - a_1}{a_3} - \frac{a_3 - a_1}{a_1} \right) = \frac{-1}{a_3 - a_1} \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_1} \right) = \frac{1}{a_1 a_3}, \\ I_2 &= I_1(a_3 \rightarrow a_2) = \frac{1}{a_1 a_2}. \end{aligned}$$

Применим теперь доказанную формулу параметризации Фейнмана для интеграла C_0 с тремя множителями в знаменателе, введя следующие обозначения (смотри замечание выше):

$$a_1 \equiv q^2 - m_1^2 + i\varepsilon, \quad a_2 \equiv (q + k_1)^2 - m_2^2 + i\varepsilon, \quad a_3 \equiv (q + k_2)^2 - m_3^2 + i\varepsilon.$$

Тогда, выделяя полный квадрат, получим

$$\begin{aligned}
& [a_1 + (a_2 - a_1)x + (a_3 - a_2)y] = \\
& = q^2 - m_1^2 + (k_1^2 + 2k_1q + m_1^2 - m_2^2)x + y(k_2^2 - k_1^2 + 2(k_2 - k_1)q + m_2^2 - m_3^2) = \\
& = q^2 + 2q(k_1x + (k_2 - k_1)y) \pm \\
& \pm (k_1^2x^2 + (k_2 - k_1)^2y^2 + 2k_1(k_2 - k_1)xy) + \\
& + (k_1^2 + m_1^2 - m_2^2)x + y(k_2^2 - k_1^2 + m_2^2 - m_3^2) - m_1^2 = \\
& = q'^2 - M^2,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
M^2 & \equiv k_1^2x^2 + (k_2 - k_1)^2y^2 + 2k_1(k_2 - k_1)xy - \\
& - (k_1^2 + m_1^2 - m_2^2)x - (k_2^2 - k_1^2 + m_2^2 - m_3^2)y + m_1^2.
\end{aligned}$$

После параметризации Фейнмана C_0 принимает вид:

$$C_0 = \frac{2}{i\pi^2} \int d^4q' \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{(q'^2 - M^2)^3}.$$

2. Интегрирование по импульсному пространству. Проинтегрируем по 4-импульсу, воспользовавшись формулой

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - M^2)^l} = (-1)^l i \frac{\pi^{4/2}}{(2\pi)^4} \frac{\Gamma(l - \frac{4}{2})}{\Gamma(l)} (M^2)^{\frac{4}{2}-l},$$

для $l = 3$

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - M^2)^3} = -i \frac{\pi^2}{16\pi^4} \frac{\Gamma(3-2)}{\Gamma(3)} (M^2)^{-1} = -\frac{i}{2} \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{M^2}.$$

Тогда интеграл C_0 примет следующий вид:

$$C_0 = - \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f},$$

где

$$\begin{aligned}
a & = k_1^2, \quad b = (k_2 - k_1)^2, \quad c = 2k_1(k_2 - k_1), \\
d & = -(k_1^2 + m_1^2 - m_2^2), \quad e = -(k_2^2 - k_1^2 + m_2^2 - m_3^2), \quad f = m_1^2.
\end{aligned}$$

Чтобы последние обозначения совпали с результатом, необходимо в определении интеграла C_0 сделать сдвиг переменной интегрирования $q \rightarrow q - k_2$ и в соответствии с замечанием, сделанным выше, произвести иной выбор a_1, a_2, a_3 :

$$a_1 = q^2 - m_3^2 + i\epsilon, \quad a_2 = (q - k_2 + k_1)^2 - m_2^2 + i\epsilon, \quad a_3 = (q - k_2)^2 - m_1^2 + i\epsilon.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
& [a_1 + (a_2 - a_1)x + (a_3 - a_2)y] = \\
& = q^2 - m_3^2 + (k_2^2 + k_1^2 + 2(k_1 - k_2)q - 2k_1k_2 - m_2^2 + m_3^2)x +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +y(-k_1^2 - 2k_1q + 2k_2k_1 - m_1^2 + m_2^2) = q^2 + 2q((k_1 - k_2)x - k_1y) \pm \\
& \quad \pm ((k_1 - k_2)^2 x^2 + k_1^2 y^2 + 2k_1(k_2 - k_1)xy) + \\
& + (k_2^2 + k_1^2 - 2k_1k_2 - m_2^2 + m_3^2)x + y(-k_1^2 + 2k_2k_1 - m_1^2 + m_2^2) - m_3^2 = \\
& = q'^2 - M^2,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
M^2 \equiv & \underbrace{(k_1 - k_2)^2 x^2}_a + \underbrace{k_1^2 y^2}_b + \underbrace{2k_1(k_2 - k_1)xy}_c - \\
& - \underbrace{(k_2^2 + k_1^2 - 2k_1k_2 - m_2^2 + m_3^2)x}_d - \underbrace{(-k_1^2 + 2k_2k_1 - m_1^2 + m_2^2)y}_e + \underbrace{m_3^2}_f.
\end{aligned}$$

В частных случаях, например при $b = 0$, интеграл по параметрам Фейнмана легко считается вручную или на компьютере, и выбор a_1, a_2, a_3 позволяет иногда привести вид интеграла C_0 к одному из этих случаев. Здесь рассмотрены два варианта выбора для параметризации Фейнмана.

Теперь остается рассмотреть в общем случае вычисление двойного интеграла по параметрам Фейнмана y и x .

3. Замена для переменной внутреннего интегрирования y , приводящая к отсутствию в интеграле слагаемого с x^2 . Тогда с учетом смены порядка интегрирования внутренний интеграл элементарно берется, получаются логарифмы, интегралы от которых сводятся к комбинации дилогарифмов. Таков общий метод, предложенный Пассарино и Велтманом в 1979 году.

Сделаем в C_0 подстановку

$$y = y' + \alpha x \rightarrow y' = y - \alpha x : \quad y|_0^x \rightarrow y'|_{-\alpha x}^{(1-\alpha)x},$$

тогда $by^2 = b(y' + \alpha x)^2 = by'^2 + 2b\alpha xy' + b\alpha^2 x^2$. Подберем α такое, чтобы слагаемые с x^2 в подынтегральном выражении взаимно сокращались:

$$ax^2 + c\alpha x^2 + b\alpha^2 x^2 \equiv 0,$$

α должно быть корнем уравнения $b\alpha^2 + c\alpha + a = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
C_0 &= - \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{ax^2 + by^2 + cxy + \dots} = \\
&= - \int_0^1 dx \int_{-\alpha x}^{(1-\alpha)x} dy \frac{1}{by^2 + (c + 2\alpha b)xy + \dots}.
\end{aligned}$$

4. Смена порядка интегрирования, так как теперь легче посчитать интеграл по x (нет слагаемого с x^2).

$$\int_0^1 dx \int_{-\alpha x}^{(1-\alpha)x} dy = \int_0^1 dx \int_0^{(1-\alpha)x} dy - \int_0^1 dx \int_0^{-\alpha x} dy = \int_0^{1-\alpha} dy \int_{\frac{y}{1-\alpha}}^1 dx - \int_0^{-\alpha} dy \int_{-\frac{y}{\alpha}}^1 dx.$$

Замечание. В области $-\alpha x \leq y \leq (1-\alpha)x$ в комплексной плоскости y α должно быть действительным.

5. Смена порядка интегрирования в C_0 и вычисление внутреннего интеграла по x .

$$\begin{aligned}
 C_0 &= - \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f} = \\
 &= - \left\{ \int_0^{1-\alpha} dy \int_{\frac{y}{1-\alpha}}^1 dx \frac{1}{by^2 + (c + 2\alpha b)xy + dx + e(y + \alpha x) + f} - \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{-\alpha} dy \int_{-\frac{y}{\alpha}}^1 dx \frac{1}{x(cy + 2\alpha by + d + e\alpha) + by^2 + ey + f} \right\} = \\
 &= - \left\{ \int_0^{1-\alpha} dy \frac{1}{(c + 2\alpha b)y + d + e\alpha} \ln \frac{1 + A}{y(1-\alpha)^{-1} + A} - \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{-\alpha} dy \frac{1}{(c + 2\alpha b)y + d + e\alpha} \ln \frac{1 + A}{-y\alpha^{-1} + A} \right\}, \\
 &\text{где } A = \frac{by^2 + ey + f}{(c + 2\alpha b)y + d + e\alpha}.
 \end{aligned}$$

6. Представление последнего интеграла в виде комбинации дилогарифмов.

$$\begin{aligned}
 C_0 &= - \left\{ \int_0^{1-\alpha} dy \frac{1}{(c + 2\alpha b)y + d + e\alpha} \times \right. \\
 &\quad \times \ln \frac{(1-\alpha)[by^2 + (c + 2\alpha b + e)y + d + e\alpha + f]}{[b(1-\alpha) + (c + 2\alpha b)]y^2 + (e + d)y + (1-\alpha)f} - \\
 &\quad - \int_0^{-\alpha} dy \frac{1}{(c + 2\alpha b)y + d + e\alpha} \times \\
 &\quad \times \ln \frac{\alpha\{by^2 + [(c + 2\alpha b) + e]y + (d + e\alpha) + f\}}{[b\alpha - (c + 2\alpha b)]y^2 - dy + \alpha f} \Big\}.
 \end{aligned}$$

Для удобства анализа проведем замены в обоих интегралах, чтобы пределы интегрирования стали одинаковыми от 0 до 1. В первом интеграле

$$y \rightarrow y'' \equiv \frac{y}{1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad y|_0^{1-\alpha} \rightarrow y''|_0^1,$$

во втором интеграле

$$y \rightarrow y''' \equiv -\frac{y}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad y|_0^{-\alpha} \rightarrow y'''|_0^1.$$

Тогда C_0 примет вид

$$\begin{aligned}
C_0 = & - \int_0^1 dy \frac{1-\alpha}{(c+2ab)(1-\alpha)y+d+e\alpha} \times \\
& \times \ln \frac{b(1-\alpha)^2 y^2 + (1-\alpha)(c+2ab+e)y+d+e\alpha+f}{[b(1-\alpha)^2 + (c+2ab)(1-\alpha)]y^2 + (e+d+e\alpha-e\alpha)y+f} - \\
& - \int_0^1 dy \frac{\alpha}{-(c+2ab)\alpha y+d+e\alpha} \times \\
& \times \ln \frac{b\alpha^2 y^2 - \alpha(c+2ab+e)y+d+e\alpha+f}{[b\alpha^2 - (c+2ab)\alpha]y^2 + (d+e\alpha-e\alpha)y+f}.
\end{aligned}$$

Если провести замены в первом интеграле $y = \frac{y'}{1-\alpha}$ и во втором интеграле $y = -\frac{y'}{\alpha}$, то числители под логарифмами станут одинаковыми, знаменатели в множителях перед логарифмами тоже станут одинаковыми.

Перепишем C_0 , введя следующие обозначения:

$$N(y) \equiv (c+2ab)y+d+e\alpha, \quad y_0 = -\frac{d+e\alpha}{c+2ab}$$

и учтя предложенные замены:

$$\begin{aligned}
C_0 = & - \int_0^{1-\alpha} dy \frac{1}{N} \ln \frac{by^2 + ey + N + f}{by^2 + ey + f + \frac{y}{1-\alpha}N} + \int_0^{-\alpha} dy \frac{1}{N} \ln \frac{by^2 + ey + N + f}{by^2 + ey + f - \frac{y}{\alpha}N} = \\
= & - \int_0^{1-\alpha} dy \frac{1}{N} \ln\{by^2 + ey + N + f\} - \int_{-\alpha}^0 dy \frac{1}{N} \ln\{by^2 + ey + N + f\} + \\
+ & \int_0^{1-\alpha} dy \frac{1}{N} \ln\{by^2 + ey + f + \frac{y}{1-\alpha}N\} - \int_0^{-\alpha} dy \frac{1}{N} \ln\{by^2 + ey + f - \frac{y}{\alpha}N\} = \\
= & - \int_{-\alpha}^{1-\alpha} dy \frac{1}{N} \ln\{by^2 + ey + N + f\} + \\
+ & \int_0^{1-\alpha} dy \frac{1}{N} \ln\{by^2 + ey + f + \frac{y}{1-\alpha}N\} - \int_0^{-\alpha} dy \frac{1}{N} \ln\{by^2 + ey + f - \frac{y}{\alpha}N\} = \\
= & - \int_{-\alpha}^{1-\alpha} dy \frac{1}{N} \ln \frac{by^2 + ey + N(y) + f}{by_0^2 + ey_0 + N(y_0) + f} + \\
+ & \int_0^{1-\alpha} dy \frac{1}{N} \ln \frac{by^2 + ey + f + \frac{y}{1-\alpha}N(y)}{by_0^2 + ey_0 + N(y_0) + f} +
\end{aligned}$$

$$+ \int_{-\alpha}^0 dy \frac{1}{N} \ln \frac{by^2 + ey + f - \frac{y}{\alpha} N(y)}{by_0^2 + ey_0 + N(y_0) + f} \equiv -\{1\} + \{2\} + \{3\}.$$

Дополнительные логарифмы при интегрировании сокращаются, y_0 выбрано так, что $N(y_0) = 0$, следовательно, вычет в полюсе из-за наличия $\frac{1}{N}$ равен 0.

В первом интеграле $\{1\}$ сделаем замену $y' = y + \alpha$, $y|_{-\alpha}^{1-\alpha} \rightarrow y'|_0^1$:

$$\begin{aligned} \{1\} &= \int_0^1 dy \frac{1}{N(y-\alpha)} \left(\ln\{b(y-\alpha)^2 + e(y-\alpha) + N(y-\alpha) + f\} - \right. \\ &\quad \left. - \ln\{by_0^2 + ey_0 + f\} \right) = \\ &= \frac{1}{c + 2ab} \int_0^1 dy \frac{1}{y - y_1} \times \\ &\quad \times \left(\ln\{by^2 + (c+e)y + b\alpha^2 + f + d - c\alpha - 2b\alpha^2 - a + a\} - \right. \\ &\quad \left. - \ln\{b(y_1 - \alpha)^2 + e(y_1 - \alpha) + f + N(y_0 = y_1 - \alpha)\} \right). \end{aligned}$$

В последнем преобразовании использовали $y_0 = y_1 - \alpha$ и

$$\begin{aligned} by_1^2 - 2b\alpha y_1 + b\alpha^2 + ey_1 - e\alpha + f + (c + 2ab)(y_1 - \alpha) + d + e\alpha &= \\ = by_1^2 + y_1(-2b\alpha + e + c + 2ab) + b\alpha^2 - e\alpha - c\alpha - 2\alpha^2 b + d + e\alpha + f &= \\ = by_1^2 + y_1(c + e) + f + d - b\alpha^2 - c\alpha = by_1^2 + y_1(c + e) + f + d + a. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \{1\} &= \frac{1}{c + 2ab} \int_0^1 dy \frac{1}{y - y_1} \left(\ln\{by^2 + (c+e)y + f + d + a\} - \right. \\ &\quad \left. - \ln\{by_1^2 + (c+e)y_1 + f + d + a\} \right) = \\ &= \frac{1}{(c + 2ab)} \int_0^1 \frac{dy}{y - y_1} \ln \frac{(y - y_1^+)(y - y_1^-)}{(y_1 - y_1^+)(y_1 - y_1^-)} = \\ &= \frac{1}{(c + 2ab)} \left(\int_0^{1-y_1} \frac{du}{u} \ln \frac{(u + y_1 - y_1^+)(u + y_1 - y_1^-)}{(y_1 - y_1^+)(y_1 - y_1^-)} - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{-y_1} \frac{du}{u} \ln \frac{(u + y_1 - y_1^+)(u + y_1 - y_1^-)}{(y_1 - y_1^+)(y_1 - y_1^-)} \right) \equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Воспользовавшись спецфункцией (дилогарифм)

$$\text{Li}_2(z) = - \int_0^1 \frac{\ln(1-zt)}{t} dt = - \int_0^z \frac{\ln(1-v)}{v} dv = - \int_0^{-z} \frac{\ln(1+\lambda)}{\lambda} d\lambda,$$

путем простых преобразований легко получить искомый результат.

Далее приведем результаты для частных случаев:

$m_i^2 \gg k_j^2, (k_2 - k_1)^2$ ($k_j^2, (k_2 - k_1)^2 \geq 0$), $m_2 = m_3$, $(m_1/m_3)^2 \equiv R \neq 1; 0; \infty$:

$$C_0 \approx \frac{1}{m_3^2} \left[\frac{1}{R-1} - \frac{R \ln R}{(R-1)^2} \right].$$

$m_i^2 \gg k_j^2, (k_2 - k_1)^2$ ($k_j^2, (k_2 - k_1)^2 \geq 0$), $m_2 = m_1$, $(m_1/m_3)^2 \equiv R \neq 1; 0; \infty$:

$$C_0 \approx \frac{1}{m_3^2} \left[-\frac{1}{R-1} + \frac{\ln R}{(R-1)^2} \right].$$

$m_i^2 \gg k_j^2, (k_2 - k_1)^2$ ($k_j^2, (k_2 - k_1)^2 \geq 0$), $m_2 = m_3$, $m_1 \approx m_3$ ($R \approx 1$):

$$C_0 \approx -\frac{1}{2m_3^2} + \frac{R-1}{6m_3^2}.$$

$m_i^2 \gg k_j^2, (k_2 - k_1)^2$ ($k_j^2, (k_2 - k_1)^2 \geq 0$), $m_2 = m_1$, $m_1 \approx m_3$ ($R \approx 1$):

$$C_0 \approx -\frac{1}{2m_3^2} - \frac{R-1}{6m_3^2}.$$

$m_2 = m_3$, $m_1^2 \ll k_j^2, (k_2 - k_1)^2 \ll m_3^2$ ($k_j^2, (k_2 - k_1)^2 \geq 0$), в том числе $m_1 = 0$ ($R = 0$):

$$C_0 \approx -\frac{1}{m_3^2}.$$

$m_2 = m_1$, $m_1^2 \ll k_j^2, (k_2 - k_1)^2 \ll m_3^2$ ($k_j^2, (k_2 - k_1)^2 \geq 0$), в том числе $m_1 = 0$ ($R = 0$):

$$C_0 \approx -\frac{1}{m_3^2} [\ln(-m_3^2/m_Z^2) + 1].$$

$m_2 = m_3$, $m_3^2 \ll k_j^2, (k_2 - k_1)^2 \ll m_1^2$ ($k_j^2, (k_2 - k_1)^2 \geq 0$), в том числе $m_3 = 0$ ($R = \infty$):

$$C_0 \approx -\frac{1}{m_1^2} [\ln(-m_1^2/m_Z^2) + 1].$$

$m_2 = m_1$, $m_3^2 \ll k_j^2, (k_2 - k_1)^2 \ll m_1^2$ ($k_j^2, (k_2 - k_1)^2 \geq 0$), в том числе $m_3 = 0$ ($R = \infty$):

$$C_0 \approx -\frac{1}{m_1^2}.$$

5. Интеграл $C_0(\mathbf{m}_i^2, \mathbf{s}, \mathbf{m}_j^2; \mathbf{m}^2, \mathbf{m}^2, \mathbf{m}^2)$

3-точечный скалярный интеграл

$$\begin{aligned} C_0(k_1^2, k_2^2, (k_2 - k_1)^2, m^2, m^2, m^2) = \\ = \frac{1}{i\pi^2} \int \frac{d^4 q}{[q^2 - m^2 + i\varepsilon][(q + k_1)^2 - m^2 + i\varepsilon][(q + k_2)^2 - m^2 + i\varepsilon]} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f}, \\
&a = (k_1 - k_2)^2 = m_j^2, \quad b = k_1^2 = m_i^2, \\
&c = 2k_1(k_2 - k_1) = s - m_i^2 - m_j^2, \quad d = -(k_2^2 + k_1^2 - 2k_1k_2) = -m_j^2, \\
&e = -(-k_1^2 + 2k_2k_1) = m_j^2 - s, \quad f = m^2 - i\epsilon.
\end{aligned}$$

Подстановка:

$$y = y' + \alpha x \rightarrow y' = y - \alpha x : \quad y|_0^x \rightarrow y'|_{-\alpha x}^{(1-\alpha)x},$$

где α — корень уравнения $b\alpha^2 + c\alpha + a = 0$,

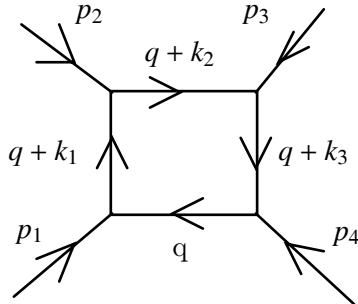
$$\begin{aligned}
&m_i^2 \alpha^2 + (s - m_i^2 - m_j^2) \alpha + m_j^2 = 0, \\
&D = (s - m_i^2 - m_j^2)^2 - 4m_i^2 m_j^2 = \\
&= s^2 + m_i^4 + m_j^4 - 2sm_i^2 - 2sm_j^2 - 2m_i^2 m_j^2, \\
&C_0(m_i^2, s, m_j^2; m^2, m^2, m^2) = \\
&= - \frac{1}{c + 2\alpha b} \sum_{i=1}^3 \sum_{\sigma=\pm} (-1)^{1+i} \left[Li_2\left(\frac{y_i}{y_i - y_i^\sigma}\right) - Li_2\left(\frac{y_i - 1}{y_i - y_i^\sigma}\right) \right],
\end{aligned}$$

где $y_1^\pm, y_2^\pm, y_3^\pm$ — корни следующих уравнений:

$$\begin{aligned}
&m_i^2 y_1^2 - m_i^2 y_1 + m^2 = 0, \quad D = m_i^4 - 4m_i^2 m^2, \\
&sy_2^2 - sy_2 + m = 0, \quad D = s^2 - 4sm^2, \\
&m_j^2 y_3^2 - m_j^2 y_3 + m^2 = 0, \quad D = m_j^4 - 4m_j^2 m^2, \\
&y_0 = -\frac{d + e\alpha}{c + 2b\alpha}, \quad y_1 = y_0 + \alpha, \quad y_2 = \frac{y_0}{1 - \alpha}, \quad y_3 = -\frac{y_0}{\alpha}.
\end{aligned}$$

6. Интеграл $\mathcal{D}_0$

Кинематика:



Петля типа box приводит к 4-точечному скалярному интегралу

$$\frac{i}{16\pi^2} \mathcal{D}_0(k_1, k_2, k_3, m_1, m_2, m_3, m_4) \equiv \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \times$$

$$\times \frac{1}{(q^2 - m_1^2)((q + k_1)^2 - m_2^2)((q + k_2)^2 - m_3^2)((q + k_3)^2 - m_4^2)}.$$

Причем $k_1 = p_1$, $k_2 = p_1 + p_2$, $k_3 = p_1 + p_2 + p_3$ и $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$.

Для одинаковых массовых параметров

$$\mathcal{D}_0(k_1^2, k_2^2, k_3^2, (k_1 - k_2)^2, (k_2 - k_3)^2, m, m, m, m) =$$

$$= \frac{1}{i\pi^2} \int d^4q \frac{1}{[q^2 - m^2][(q + k_1)^2 - m^2][(q + k_2)^2 - m^2][(q + k_3)^2 - m^2]} =$$

(этот интеграл представим в виде $\frac{1}{i\pi^2} \int d^4q \frac{1}{d_1 d_2 d_3 d_4}$, и для него применяется формула параметризации Фейнмана)

$$= \frac{6}{i\pi^2} \int d^4q \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{dx dy dz}{[d_1(1-x-y-z) + d_2x + d_3y + d_4z]^4} =$$

$$= \frac{6}{i\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \int d^4q [q^2 + 2q(k_1x + k_2y + k_3z) +$$

$$+ (k_1x + k_2y + k_3z)^2 - (k_1x + k_2y + k_3z)^2 +$$

$$+ m^2(x + y + z) - m^2(x + y + z) - m^2 + k_1^2x + k_2^2y + k_3^2z]^{-4} =$$

$$= \frac{6}{i\pi^2} \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \int \frac{dx dy dz d^4q}{[q^2 - (k_1x + k_2y + k_3z)^2 + k_1x + k_2y + k_3z - m^2]^4} =$$

$$= \frac{6}{i\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \frac{i(-1)^{-4} \pi^{\frac{4}{2}}}{[(k_1x + k_2y + k_3z)^2 - k_1x - k_2y - k_3z + m^2]^{4-2}} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(2)\Gamma(4-2)}{\Gamma(2)\Gamma(4)} = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{dx dy dz}{[(k_1x + k_2y + k_3z)^2 - k_1x - k_2y - k_3z + m^2]^2}.$$

Сделаем замену $x = 1 - x'$, $y = x' - y'$, $z = z'$ и перейдем от штрихованных переменных к нештрихованным:

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz [k_1^2(1 - 2x + x^2) + k_2^2(x^2 - 2xy + y^2) + k_3^2z^2 + 2k_1k_2(1 - x)(x - y) +$$

$$+ 2k_1k_3(1 - x)z + 2k_2k_3(x - y)z - k_1^2(1 - x) - k_2^2(x - y) - k_3^2z + m^2]^{-2} =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz [x^2(k_1 - k_2)^2 + y^2k_2^2 + z^2k_3^2 + xy(-(k_1 - k_2)^2 + k_1^2 - k_2^2) +$$

$$+ xz((k_1 - k_3)^2 - (k_2 - k_3)^2 - k_1^2 + k_2^2) + yz((k_2 - k_3)^2 - k_2^2 - k_3^2) - x(k_1 - k_2)^2 +$$

$$+ y((k_1 - k_2)^2 - k_1^2) + z(-(k_1 - k_3)^2 + k_1^2) + m^2]^{-2}.$$

Скалярная 4-точечная функция для различных массовых параметров $\mathcal{D}_0(k_1, k_2, k_3, m_1, m_2, m_3, m_4)$ может быть представлена через комбинацию 16 дилогарифмов [2]. Общий случай в зависимости от значения параметров распадается на два частных решения.

1. При $r_{02} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0(k_1, k_2, k_3, m_1, m_2, m_3, m_4) = & \frac{1}{m_1 m_2 m_3 m_4 a(x_1 - x_2)} \times \\ & \times \left\{ \sum_{j=0}^3 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} [Li_2(1 + s_j x_{kj}) + \eta(-x_{kj}, s_j) \ln(1 + s_j x_{kj}) + \right. \\ & \quad \left. + Li_2(1 + \frac{x_{kj}}{s_j}) + \eta(-x_{kj}, \frac{1}{s_j}) \ln(1 + \frac{x_{kj}}{s_j})] + \right. \\ & + \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left[\tilde{\eta}(-x_k, \tilde{r}_{02}) \left[\ln(r_{02} x_k) + \ln(Q(\frac{1}{x_k^{(0)}}, 0, 0, 1) - i\varepsilon) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \ln\left(\frac{\bar{Q}(0, 0, 1, r_{02} x_k^{(0)})}{d} + i\varepsilon \gamma_{k,3-k} \operatorname{sgn}(r_{02} \operatorname{Im} \tilde{r}_{13})\right) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \tilde{\eta}(-x_k, \frac{1}{\tilde{r}_{13}}) \left[\ln\left(\frac{x_k}{r_{13}}\right) + \ln\left(Q(\frac{r_{13}}{x_k^{(0)}}, 1, 0, 0) - i\varepsilon\right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \ln\left(\frac{\bar{Q}(1, 0, 0, x_k^{(0)})}{d} + i\varepsilon \gamma_{k,3-k} \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \tilde{r}_{13})\right) \right] - \right. \\ & \quad \left. - \left[\tilde{\eta}(-x_k, \frac{\tilde{r}_{02}}{\tilde{r}_{13}}) + \eta(\tilde{r}_{02}, \frac{1}{\tilde{r}_{13}}) \right] \left[\ln\left(\frac{r_{02} x_k}{r_{13}}\right) + \ln\left(Q(\frac{r_{13}}{x_k^{(0)}}, 1, 0, 0) - i\varepsilon\right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \ln\left(\frac{\bar{Q}(0, 0, 1, r_{02} x_k^{(0)})}{d} + i\varepsilon \gamma_{k,3-k} \operatorname{sgn}(r_{02} \operatorname{Im} \tilde{r}_{13})\right) \right] + \right. \\ & \quad \left. \left. + \eta(\tilde{r}_{02}, \frac{1}{\tilde{r}_{13}}) \tilde{\eta}(-x_k, -\frac{\tilde{r}_{02}}{\tilde{r}_{13}}) \right] \right\}. \end{aligned}$$

2. При $|r_{ij}| = 1$ для всех r_{ij}

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0(k_1, k_2, k_3, m_1, m_2, m_3, m_4) = & \frac{1}{m_1 m_2 m_3 m_4 a(x_1 - x_2)} \times \\ & \times \left\{ \sum_{j=0}^3 \sum_{k=1}^2 (-1)^{j+k} [Li_2(1 + s_j x_{kj}) + \eta(-x_{kj}, s_j) \ln(1 + s_j x_{kj}) + \right. \\ & \quad \left. + Li_2(1 + \frac{x_{kj}}{s_j}) + \eta(-x_{kj}, \frac{1}{s_j}) \ln(1 + \frac{x_{kj}}{s_j})] + \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \times \right. \\ & \times \left[\eta(-x_k, \frac{1}{r_{13}}) \left[\ln\left(\frac{r_{13}}{x_k^{(0)}} P(1, \frac{x_k^{(0)}}{r_{13}}, 0, 0) - \frac{x_k^{(0)}}{r_{13}} \varepsilon b \gamma_{k,3-k}\right) + \ln\left(\frac{x_k^{(0)}}{r_{13}}\right) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\eta(-x_k, r_{02}) \times \\
& \times \left[\ln \left(\frac{1}{r_{02}x_k^{(0)}} P(0, 0, 1, r_{02}x_k^{(0)}) - r_{02}x_k^{(0)} \varepsilon b \gamma_{k,3-k} \right) + \ln(r_{02}x_k^{(0)}) \right] - \\
& - \left[\eta(-x_k, \frac{r_{02}}{r_{13}}) + \eta(r_{02}, \frac{1}{r_{13}}) \right] \times \\
& \times \left[\ln \left(\frac{r_{13}}{r_{02}x_k^{(0)}} P(0, 1, \frac{r_{02}x_k^{(0)}}{r_{13}}, 0) - \frac{r_{02}x_k^{(0)}}{r_{13}} \varepsilon b \gamma_{k,3-k} \right) + \right. \\
& \left. + \ln \left(\frac{r_{02}x_k^{(0)}}{r_{13}} \right) \right] + (1 - \gamma_{k,3-k} \operatorname{sgn}(b)) \eta(-x_k, -\frac{r_{02}}{r_{13}}) \eta(r_{02}, \frac{1}{r_{13}}) \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения: r_{ij} и $\tilde{r}_{ij}$ определяются как корни квадратных трехчленов

$$\begin{aligned}
x^2 + k_{ij}x + 1 &= (x + r_{ij})(x + 1/r_{ij}), \\
x^2 + (k_{ij} - i\varepsilon)x + 1 &= (x + \tilde{r}_{ij})(x + 1/\tilde{r}_{ij}), \\
k_{ij} &\equiv \frac{m_{i+1}^2 + m_{j+1}^2 - (k_i - k_j)^2}{m_{i+1}m_{j+1}}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3 \quad (k_0 \equiv 0).
\end{aligned}$$

Для $k_{ij} \in \mathbb{R}$ r_{ij} лежат на вещественной оси или внутри единичной окружности на комплексной плоскости.

$$P(y_0, y_1, y_2, y_3) = \sum_{0 \leq i \leq j \leq 3} k_{ij} y_i y_j + \sum_{j=0}^3 y_j^2,$$

$$Q(y_0, y_1, 0, y_3) = (1/r_{02} - r_{02})y_0 + (k_{12} - r_{02}k_{01})y_1 + (k_{23} - r_{02}k_{03})y_3,$$

$$\bar{Q}(y_0, 0, y_2, y_3) = (1/r_{13} - r_{13})y_3 + (k_{12} - r_{13}k_{23})y_2 + (k_{01} - r_{13}k_{03})y_0,$$

$x_{1,2}$ определяются условием

$$\begin{aligned}
& \frac{r_{02}r_{13}}{x} \left\{ \left[P(1, \frac{x}{r_{13}}, 0, 0) - i\varepsilon \right] \left[P(0, 0, \frac{1}{r_{02}}, x) - i\varepsilon \right] - \right. \\
& - \left[P(0, \frac{x}{r_{13}}, \frac{1}{r_{02}}, 0) - i\varepsilon \right] [P(1, 0, 0, x) - i\varepsilon] \Bigg\} = \\
& = ax^2 + bx + c + i\varepsilon d = a(x - x_1)(x - x_2),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
a &= k_{23}/r_{13} + r_{02}k_{01} - k_{03}r_{02}/r_{13} - k_{12}, \\
b &= (r_{13} - 1/r_{13})(r_{02} - 1/r_{02}) + k_{01}k_{23} - k_{03}k_{12}, \\
c &= k_{01}/r_{02} + r_{13}k_{23} - k_{03}r_{13}/r_{02} - k_{12}, \\
d &= k_{12} - r_{02}k_{01} - r_{13}k_{23} + r_{02}r_{13}k_{03}, \\
\gamma_{kl} &= \operatorname{sgn} \operatorname{Re}[a(x_k - x_l)], \quad k, l = 1, 2, \\
x_{k0} &= x_k, \quad x_{k1} = x_k/r_{13}, \quad x_{k2} = x_k r_{02}/r_{13}, \quad x_{k3} = x_k r_{02},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_0 &= \tilde{r}_{03}, \quad s_1 = \tilde{r}_{01}, \quad s_2 = \tilde{r}_{12}, \quad s_3 = \tilde{r}_{23}. \\
x_{kj}^{(0)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_{kj}, \quad r_{ij} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{r}_{ij}. \\
\tilde{\eta}(a, \tilde{b}) &= \begin{cases} \eta(a, b), & \text{для } b \notin R, \\ 2\pi i [\theta(-\operatorname{Im} a)\theta(-\operatorname{Im} \tilde{b}) - \theta(\operatorname{Im} a)\theta(\operatorname{Im} \tilde{b})], & \text{для } b < 0, \\ 0, & \text{для } b > 0, \end{cases} \\
b &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{b},
\end{aligned}$$

где ε — бесконечно малая величина.

Заключение

В работе получены аналитические выражения для одно-, двух-, трех- и четырехточечных функций. Представлены частные случаи и асимптотическое поведение интегралов при равных массах частиц и больших петлевых импульсах.

Авторы благодарят С.В. Дворянинова за внимательный просмотр рукописи и ценные замечания.

Э.Н. Ахметзянова выражает благодарность за финансовую поддержку фонду "Династия" и МЦФФМ.

Литература

- [1] 't Hooft G, Veltman M.J.G. Scalar one loop integrals // Nucl.Phys. 1979. B153. P. 365–401.
- [2] Denner A., Nierste U., Scharf R. A compact expression for the scalar one loop four point function // Nucl. Phys. 1991. B367. P. 637–656;
Denner A. Techniques for calculation of electroweak radiative corrections at the one loop level and results for W physics at LEP-200 // Fortsch. Phys. 1993. 41. P. 307–420.

Поступила в редакцию 02/IV/2004;
в окончательном варианте — 18/VI/2004.

THE FEYNMAN INTEGRALS

© 2004 E.N. Akhmetzyanova, V.M. Dolgopolov, M.V. Dolgopolov²

A brief introduction in the analytical calculations of the basic one-loop scalar integrals involved in the quantum field theory is presented. One-, two-, three- and four-point functions, which are involved in studying physical processes at an one-loop level of the perturbative theory are investigated.

Paper received 02/IV/2004.

Paper accepted 18/VI/2004.

²Akhmetzyanova Elza Nurovna (elza@ssu.samara.ru), Dolgopolov Vyacheslav Mikhailovich, Dept. of Mathematics and Informatics, Dolgopolov Mikhail Vyacheslavovich (dolg@ssu.samara.ru), Dept. of General and Theoretical Physics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.