

УДК 629.78+519.95

ФОРМИРОВАНИЕ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ЗАДАЧАХ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ЗЕМЛИ

© 2004 И.А. Блатов, Ю.Н. Горелов, А.И. Мантуров, А.В. Пермяков¹

Рассматривается построение программных траекторий углового движения космического аппарата, осуществляющего зондирование наземных объектов, когда необходима переориентация аппарата на некотором интервале времени T — с момента окончания зондирования i -го объекта до момента начала зондирования $i+1$ -го объекта. Предложены алгоритмы определения параметров программных траекторий в классе квадратичных сплайн-функций для переориентации аппаратов за заданное время T из некоторого заданного начального углового положения в заданное конечное положение при ограничениях на значения параметров программных траекторий, обусловленных возможностями их технической реализации. При задании указанных ограничений предложены также алгоритмы построения областей достижимости по углам (или угловым скоростям) в конце интервала времени T при переориентации из заданного начального положения.

Введение

Дистанционное зондирование заданных районов поверхности Земли с борта космического аппарата (КА) предполагает построение непрерывной программы управления его угловым движением с целью последовательного зондирования в набегающем потоке районов. Зондирование каждого района земной поверхности осуществляется в течение определенного времени; например, для i -го района на интервале $[t_j^k, t_j^k]$, где t_j^k — момент начала зондирования j -го района, а t_j^k — момент его окончания. Соответственно, в за-

¹Игорь Анатольевич Блатов (blatow@mail.ru), Юрий Николаевич Горелов, Александр Иванович Мантуров, Алексей Владимирович Пермяков, кафедра дифференциальных уравнений и теории управления Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

висимости от вида траектории сканирования, вычерчиваемой на поверхности Земли линией визирования аппаратуры зондирования КА и обычно называемой маршрутом, кинематические характеристики углового движения — ориентация его связанной системы координат (ССК) в виде соответствующих углов ориентации КА по каждому каналу управления, угловая скорость и угловое ускорение — на момент t_j^k должны иметь вполне определенные значения. То же самое справедливо и для указанных кинематических характеристик на момент времени t_j^k , которые определяются также заданным или принятым для j -го маршрута законом его сканирования. По завершению зондирования j -го маршрута КА должен совершить на межмаршрутном интервале $[t_j^k, t_{j+1}^k]$ маневр переориентации с целью обеспечения требуемых для зондирования $j+1$ -го маршрута кинематических характеристик его углового движения. Однако не для всех возможных районов, попадающих в некоторую полосу обзора по трассе полета КА, может быть осуществлено зондирование, что обусловлено имеющимися ограничениями по динамике программных поворотов КА.

Поэтому задача формирования программы управления угловым движением КА дистанционного зондирования на некотором интервале времени его полета ΔT^* включает в себя две следующие частные задачи:

- определение последовательности маршрутов в набегавшем потоке потенциальных районов зондирования с учетом имеющихся ограничений на угловые скорости и ускорения КА и известных межмаршрутных интервалах времени $T_j = t_{j+1}^k - t_j^k$;

- определение параметров программы управления угловым движением КА на межмаршрутных интервалах $[t_j^k, t_{j+1}^k]$, исходя из заданных ограничений по допустимым углам ориентации, угловым скоростям и ускорениям КА.

В том случае, если имеющиеся ограничения не позволяют сформировать требуемую программу управления или, что то же самое, решить вторую из указанных задач, то соответствующий район зондирования, следующий за j -м (при условии, что он реализован), должен быть исключен из дальнейшего рассмотрения, но уже в рамках решения первой задачи, или, может быть, необходимо увеличить T_j за счет увеличения t_{j+1}^k .

Таким образом, если указан алгоритм построения некоторой функции $f(t)$ для ее параметров, отвечающих известным значениям $f(t)$, $f'(t)$ и $f''(t)$ на границах какого-либо заданного интервала T и заданным ограничениям на их величины внутри этого интервала, тогда, рассматривая последовательно соответствующие заданные для каждого канала управления ориентацией КА, можно определить все необходимые параметры программы управления угловым движением КА на межмаршрутных интервалах. Настоящая статья посвящена разработке и обоснованию алгоритмов решения такой задачи.

1. Постановка задач

1.1. Обозначения

Пусть $T > 0$ — некоторая константа. Через $C[0, T], L_\infty[0, T]$ будем обозначать соответственно пространства непрерывных и ограниченных почти всюду на $[0, T]$ вещественнозначных функций с обычными нормами $\|f(t)\|_C = \sup_{t \in [0, T]} |f(t)|$, $\|f(t)\|_\infty = \text{vrai} \sup_{t \in [0, T]} |f(t)|$ (см. [1]), $\emptyset$ — пустое множество.

1.2. Основная задача

Будем рассматривать движение на фиксированном межмаршрутном интервале $[t_j^k, t_j^k]$. Для простоты обозначений положим $t_j^k = 0$, $t_j^k = T$. Множество допустимых траекторий определим формулой $M_T = M_T[b, d; \{\alpha_1, \beta_1\}, \{\alpha_2, \beta_2\}] = \{f \in C[0, T] : f' \in C[0, T], f'' \in L_\infty[0, T], \|f'\|_C \leq b, \|f''\|_\infty \leq d, f(0) = \alpha_1, f'(0) = \beta_1, f(T) = \alpha_2, f'(T) = \beta_2\}$. Здесь $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ — значения угла поворота и угловой скорости соответственно в начале (при $t = 0$) и в конце (при $t = T$) межмаршрутного интервала, b и d — предельно допустимые ограничения по угловой скорости и угловому ускорению соответственно.

Определение. Множество $P = P(\alpha_1, \beta_1, T) = \{(\alpha_2, \beta_2) : M_T[b, d; \{\alpha_1, \beta_1\}, \{\alpha_2, \beta_2\}] \neq \emptyset\}$ будем называть множеством допустимых пар (α_2, β_2) при фиксированных α_1, β_1, T .

Таким образом, множество допустимых пар — это множество пар значений угловой скорости и углового ускорения в конце межмаршрутного интервала, при которых возможен переход из начального состояния ($t = 0$) в конечное ($t = T$).

Основная задача. При любых фиксированных $T > 0$, α_1, β_1 построить множество $P(\alpha_1, \beta_1, T)$ и алгоритм, определяющий для пары (α_2, β_2) истинность включения $(\alpha_2, \beta_2) \in P(\alpha_1, \beta_1, T)$, и в случае когда включение имеет место, указать алгоритм построения некоторой $f(t) \in M_T[b, d; \{\alpha_1, \beta_1\}, \{\alpha_2, \beta_2\}]$.

1.3. Вспомогательные задачи

Решение основной задачи опирается на ряд вспомогательных задач, каждая из которых имеет самостоятельное прикладное значение.

Требуется для заданных $b, d; \{\alpha_1, \beta_1\}, \{\alpha_2, \beta_2\}$ решить следующие задачи:

1. **Отыскание множества достижимости по координате.** При фиксированных $\alpha_1, \beta_1, \beta_2$ определить промежуток $[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$ такой, что $\alpha_2 \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}] \Leftrightarrow M_T \neq \emptyset$.

2. **Отыскание множества достижимости по скорости.** При фиксированных $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$ определить промежуток $[\underline{\beta}, \bar{\beta}]$ такой, что $\beta_2 \in [\underline{\beta}, \bar{\beta}] \Leftrightarrow M_T \neq \emptyset$.

Определение. Промежутки $[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}], [\underline{\beta}, \bar{\beta}]$ будем называть множествами достижимости по координате и скорости соответственно.

3. **Отыскание допустимой траектории.** Если $M_T \neq \emptyset$ (т.е. $\exists[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}] \neq \emptyset$ и $\alpha_2 \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$ или, что то же самое, $\exists[\underline{\beta}, \bar{\beta}] \neq \emptyset$ и $\beta_2 \in [\underline{\beta}, \bar{\beta}]$), то указать алгоритм построения некоторой $f(t) \in M_T$.

1.4. Огибающие семейства множеств M_T

Решение поставленных задач существенно опирается на понятие огибающей семейства множеств. Рассмотрим следующую задачу.

Задача. Пусть в условиях предыдущего пункта зафиксированы параметры $\alpha_1, \beta_1, \beta_2$. Требуется найти числа $\bar{\alpha} = \max\{\alpha_2 : M_T \neq \emptyset\}$, $\underline{\alpha} = \min\{\alpha_2 : M_T \neq \emptyset\}$ и функции $\bar{f}(t)$ и $\underline{f}(t)$, являющиеся элементами $M_T[b, d; \{\alpha_1, \beta_1\}, \{\alpha_2, \beta_2\}]$ для $\alpha_2 = \bar{\alpha}$ и $\alpha_2 = \underline{\alpha}$ соответственно.

Кривые $\bar{f}(t)$ и $\underline{f}(t)$ будем называть верхней и нижней огибающими семейства множеств $\bar{M}_T = M_T(\alpha_2)$.

Замечание. Из алгоритма построения огибающих (см. следующий пункт) следует, что для любой $f(t) \in M_T[b, d; \{\alpha_1, \beta_1\}, \{\alpha_2, \beta_2\}]$ и для любого $t \in [0, T]$ справедливы неравенства $f(t) \leq \bar{f}(t), f(t) \geq \underline{f}(t)$.

Теорема 1. Пусть $\bar{\alpha}, \bar{f}(t)$, $\underline{\alpha}, \underline{f}(t)$ — максимальное и минимальное значения параметра α_2 и соответствующие им верхняя и нижняя огибающие. Тогда для любого $\alpha_2 \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$ кривая

$$f(t) = \frac{\bar{\alpha} - \alpha_2}{\bar{\alpha} - \underline{\alpha}} \bar{f}(t) + \frac{\alpha_2 - \underline{\alpha}}{\bar{\alpha} - \underline{\alpha}} \underline{f}(t) \quad (1.1)$$

есть решение третьей вспомогательной задачи.

Доказательство. Из (1.1) следует, что $f(t)$ есть выпуклая комбинация $\bar{f}$ и $\underline{f}$ и что $f(t)$ удовлетворяет всем граничным условиям множества M_T . Но, очевидно, что взятие выпуклой комбинации сохраняет также и ограничения на f' и f'' . Значит, $f(t) \in M_T$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что для решения первой и третьей вспомогательных задач достаточно построить пару огибающих.

2. Построение огибающих

При построении огибающих рассмотрим различные случаи. Всюду будем предполагать, $\beta_1, \beta_2 \in [-b, b]$.

1. Пусть $|\frac{\beta_1 - \beta_2}{d}| > T$. Тогда множество M_T пусто. Действительно, пусть $f(t) \in M_T$. Для определенности предположим, что $\beta_1 < \beta_2$. Тогда $\beta_2 = f'(T) = f'(0) + \int_0^T f''(s) ds \leq \beta_1 + Td < \beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) = \beta_2$ и мы пришли к противоречию.

2. Пусть

$$\left| \frac{\beta_1 - \beta_2}{d} \right| \leq T. \quad (2.1)$$

Рассмотрим прямые $y = \beta_1 + dt, y = \beta_2 + d(T - t), y = \beta_1 - dt, y = \beta_2 - d(T - t)$. Они образуют параллелограмм $ABCD$, вершины которого имеют координаты $D(0, \beta_1), B(T, \beta_2), A(t_A, y_A), C(t_C, y_C)$, где

$$t_A = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2d} + \frac{T}{2}, y_A = \frac{\beta_2 + \beta_1}{2} + \frac{dT}{2}, t_C = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2d} + \frac{T}{2}, y_C = \frac{\beta_2 + \beta_1}{2} - \frac{dT}{2}. \quad (2.2)$$

Далее возможно несколько случаев.

2.1. Пусть выполнены условия

$$y_A \leq b, \quad y_C \geq -b. \quad (2.3)$$

Обозначим двузвенную ломаную DAB через $\bar{F}(t)$, а DCB через $\underline{F}(t)$.

Теорема 2. Для любой $f(t) \in M_T = M_T[b, d; \{\alpha_1, \beta_1\}, \{\alpha_2, \beta_2\}]$ кривая $f'(t)$ лежит внутри прямоугольника $ABCD$.

Доказательство. Пусть $f(t) \in M_T$. Тогда $f'(0) = \beta_1, -d \leq f''(t) \leq d$ на $[0, t_A]$, откуда при $t \in [0, t_A]$ будет $\beta_1 - dt \leq f'(t) \leq \beta_1 + dt$. Аналогично на $[t_A, T]$ будет $\beta_2 - d(T - t) \leq f'(t) \leq \beta_2 + d(T - t)$.

Точно так же рассматривается нижняя граница прямоугольника. Теорема доказана.

Обозначим ломаную DAB через $\bar{F}(t)$, а DCB через $\underline{F}(t)$.

Условиям (2.3) соответствует случай, когда прямоугольник $ABCD$ целиком лежит в полосе $\{(x, y) \in R^2 : |y| \leq b\}$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (2.3). Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} \bar{f}'(t) &= \bar{F}(t), \quad \underline{f}'(t) = \underline{F}(t). \\ \bar{\alpha} &= \alpha_1 + \int_0^T \bar{F}(s) ds, \quad \underline{\alpha} = \alpha_1 + \int_0^T \underline{F}(s) ds. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Данная теорема вытекает из теоремы 2.

Непосредственно вычисляя $\bar{f}(t), \underline{f}(t)$ и интегралы в (2.4), находим

$$\begin{aligned} \bar{f}(t) &= \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 t + \frac{dt^2}{2}, & t \in [0, t_A], \\ \alpha_1 + \beta_1 t_A + \frac{dt_A^2}{2} + \beta_2(t - t_A) + d\frac{(T - t_A)^2}{2} - d\frac{(T - t)^2}{2}, & t \in (t_A, T], \end{cases} \\ \underline{f}(t) &= \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 t - \frac{dt^2}{2}, & t \in [0, t_C], \\ \alpha_1 + \beta_1 t_C - \frac{dt_C^2}{2} + \beta_2(t - t_C) - d\frac{(T - t_C)^2}{2} + d\frac{(T - t)^2}{2}, & t \in (t_C, T], \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5)$$

где t_A, t_C вычисляются по формулам (2.2),

$$\bar{\alpha} = \alpha_1 - \frac{(\beta_1 - \beta_2)^2}{4d} + \frac{T}{2}(\beta_1 + \beta_2) + \frac{dT^2}{4}, \quad \underline{\alpha} = \alpha_1 + \frac{(\beta_1 - \beta_2)^2}{4d} + \frac{T}{2}(\beta_1 + \beta_2) - \frac{dT^2}{4}. \quad (2.6)$$

Тем самым в случае (2.3) первая и третья вспомогательные задачи решены, причем решение третьей задачи получено в виде параболического сплайна [5].

2.2. Пусть выполнены условия

$$y_A > b, \quad y_C < -b. \quad (2.7)$$

В этом случае определим трехзвенные ломаные $\bar{F}(t) = DKLB, \underline{F}(t) = DMNB$, где точки K, L, M, N имеют координаты

$$K = \left(\frac{b - \beta_1}{d}, b\right), \quad L = \left(T - \frac{b - \beta_2}{d}, b\right), \quad M = \left(\frac{b + \beta_1}{d}, -b\right), \quad N = \left(T - \frac{b + \beta_2}{d}, -b\right). \quad (2.8)$$

Аналогично теоремам 2,3 предыдущего пункта получаем следующие утверждения.

Теорема 4. Для любой $f(t) \in M_T = M_T[b, d; \{\alpha_1, \beta_1\}, \{\alpha_2, \beta_2\}]$ кривая $f'(t)$ лежит внутри многоугольника $DKLBNM$.

Теорема 5. Пусть выполнены условия (2.7). Тогда справедливы равенства (2.4) для трехзвенных $\bar{F}$ и $\underline{F}$.

Вычисляя интегралы в (2.4), находим

$$\bar{\alpha} = \alpha_1 - \frac{1}{2d}((b - \beta_1)^2 + (b - \beta_2)^2) + bT, \quad \underline{\alpha} = \alpha_1 + \frac{1}{2d}((b + \beta_1)^2 + (b + \beta_2)^2) - bT \quad (2.9)$$

и аналогично (2.5)

$$\bar{f}(t) = \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 t + \frac{dt^2}{2}, & t \in [0, t_K], \\ \alpha_1 + \beta_1 t_K + \frac{dt_K^2}{2} + b(t - t_K), & t \in [t_K, t_L], \\ \alpha_1 + \beta_1 t_K + \frac{dt_K^2}{2} + b(t_L - t_K) + \beta_2(t - t_L) + d\frac{(t - t_L)^2}{2}, & t \in (t_L, T], \end{cases}$$

$$\underline{f}(t) = \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 t - \frac{dt^2}{2}, & t \in [0, t_M], \\ \alpha_1 + \beta_1 t_M - \frac{dt_M^2}{2} - b(t - t_M), & t \in [t_M, t_N], \\ \alpha_1 + \beta_1 t_M - \frac{dt_M^2}{2} - b(t_N - t_M) + \beta_2(t - t_N) - d\frac{(t - t_N)^2}{2}, & t \in (t_N, T], \end{cases} \quad (2.10)$$

где t_K, t_L, t_M, t_N вычисляются по формулам (2.8). Тем самым в случае (2.7) первая и третья основные задачи также решены.

Иллюстрации двух- и трехзвенных огибающих приведены на рис. 1–4. На рис. 1 изображены верхняя и нижняя двухзвенные огибающие и допустимая траектория при значениях параметров $\alpha_1 = -20.005332^\circ$, $\alpha_2 = -20.023954^\circ$, $\beta_1 = 0.00307^\circ/\text{с}$, $\beta_2 = 0.003174^\circ/\text{с}$, $T = 4$ с. На рис. 2 — верхняя двухзвенная и нижняя трехзвенная огибающие и допустимая траектория при значениях параметров $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 27^\circ$, $\beta_1 = -0.2^\circ/\text{с}$, $\beta_2 = 0.05^\circ/\text{с}$, $T = 28$ с. На рис. 3 — верхняя трехзвенная и нижняя двухзвенная огибающие и допустимая траектория при значениях параметров $\alpha_1 = 27^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$, $\beta_1 = -0.05^\circ/\text{с}$, $\beta_2 = 0.2^\circ/\text{с}$, $T = 28$ с. На рис. 4 — верхняя и нижняя трехзвенные огибающие и допустимая траектория при значениях параметров $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 35^\circ$, $\beta_1 = -0.05^\circ/\text{с}$, $\beta_2 = 0.05^\circ/\text{с}$, $T = 50$ с.

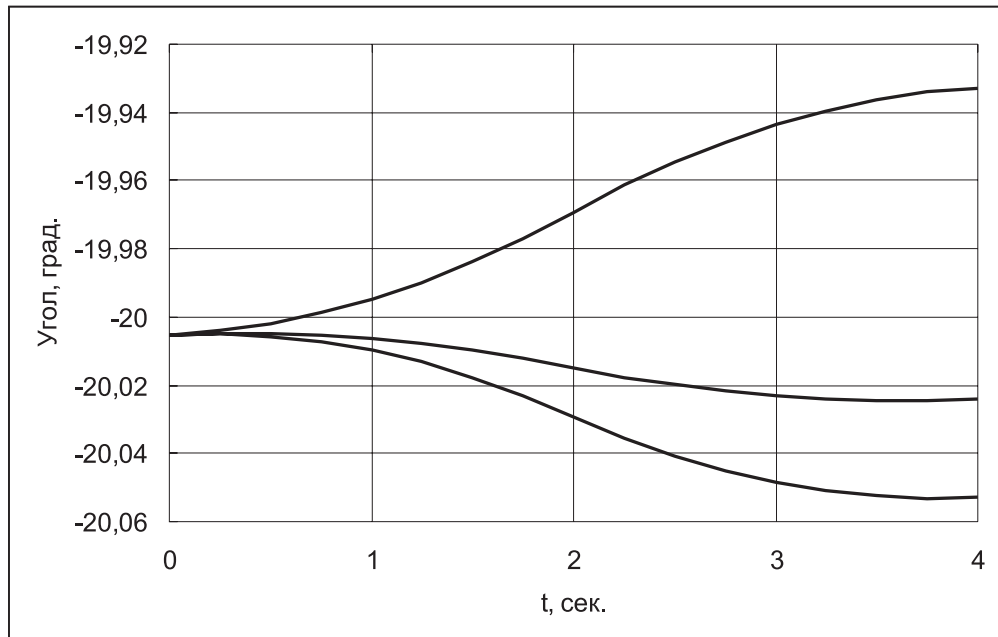


Рис. 1.

Замечание 1. Кроме случаев (2.3), (2.7), возможны также случаи

$$y_A > b, y_C \geq -b; \quad y_A \leq b, y_C < -b.$$

В каждом из них решения первой и третьей основных задач получаются комбинированием формул (2.5)–(2.6) и (2.9)–(2.10), так как в каждом из этих случаев одна из огибающих будет двухзвенной вида (2.5), а другая — трехзвенной вида (2.10). Иллюстрации областей достижимости приведены на рис. 5–8.

Приведем окончательный алгоритм решения первой вспомогательной задачи.

1. Если $T < \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{d}$, то множество достижимости пусто и конец.
2. Если $\frac{|\beta_1 - \beta_2|}{d} \leq T \leq \frac{2b - |\beta_1 - \beta_2|}{d}$, то определяем $\underline{\alpha}, \bar{\alpha}$ формулами (2.6) (рис. 5).
3. Если $\frac{2b - (\beta_1 + \beta_2)}{d} < T \leq \frac{2b + (\beta_1 + \beta_2)}{d}$, то определяем $\bar{\alpha}$ формулами (2.9), а $\underline{\alpha}$ — формулами (2.6) (рис. 6).
4. Если $\frac{2b + (\beta_1 + \beta_2)}{d} < T \leq \frac{2b - (\beta_1 + \beta_2)}{d}$, то определяем $\underline{\alpha}$ формулами (2.9), а $\bar{\alpha}$ формулами (2.6) (рис. 7).
5. Если $T > \frac{2b + |\beta_1 + \beta_2|}{d}$, то определяем $\underline{\alpha}, \bar{\alpha}$ формулами (2.9) (рис. 8).

Тем самым первая и третья основные задачи решены полностью.

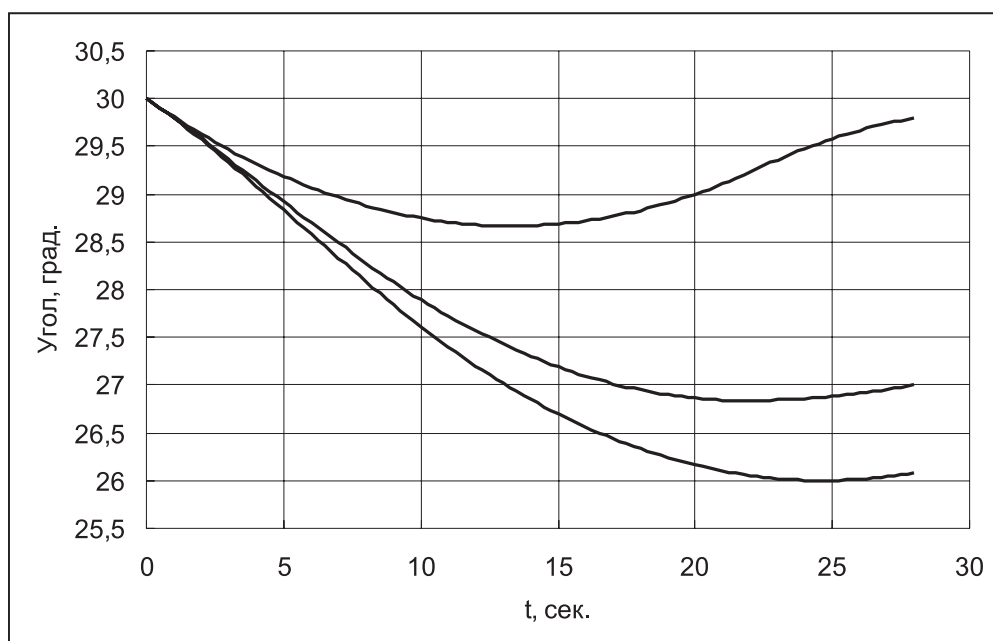


Рис. 2.

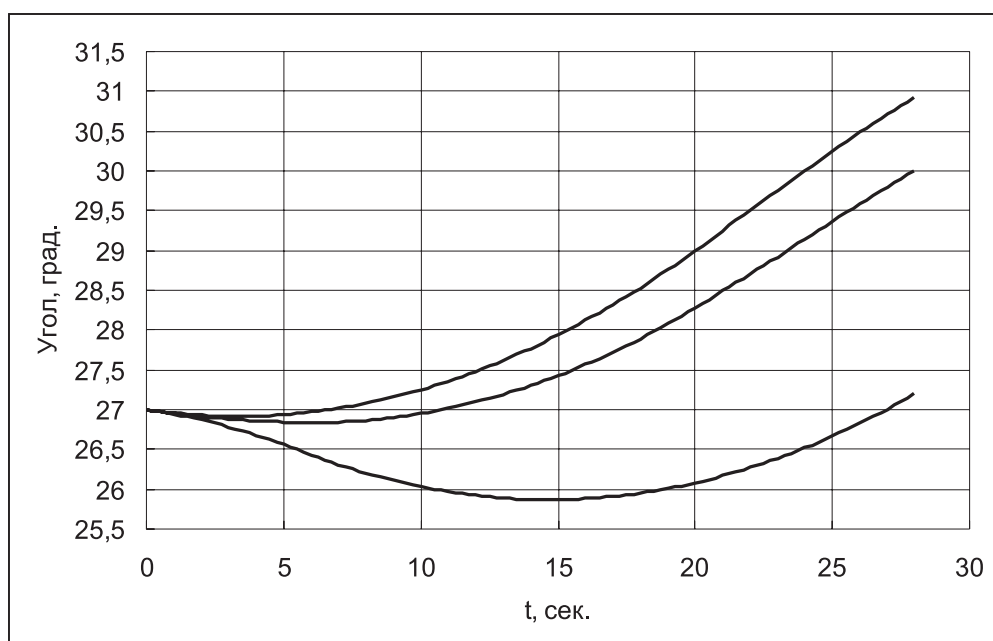


Рис. 3.

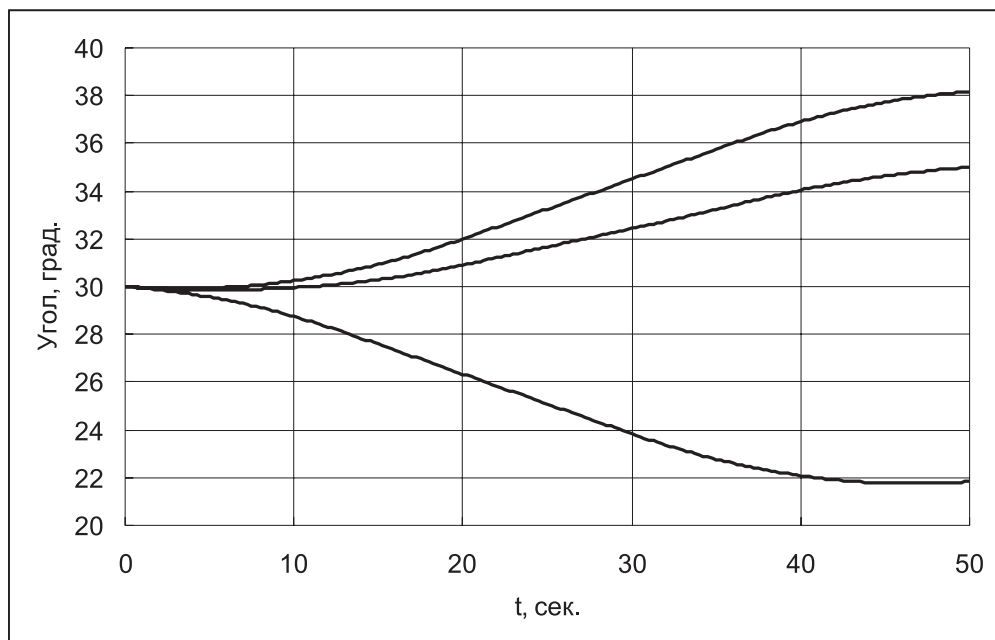


Рис. 4.

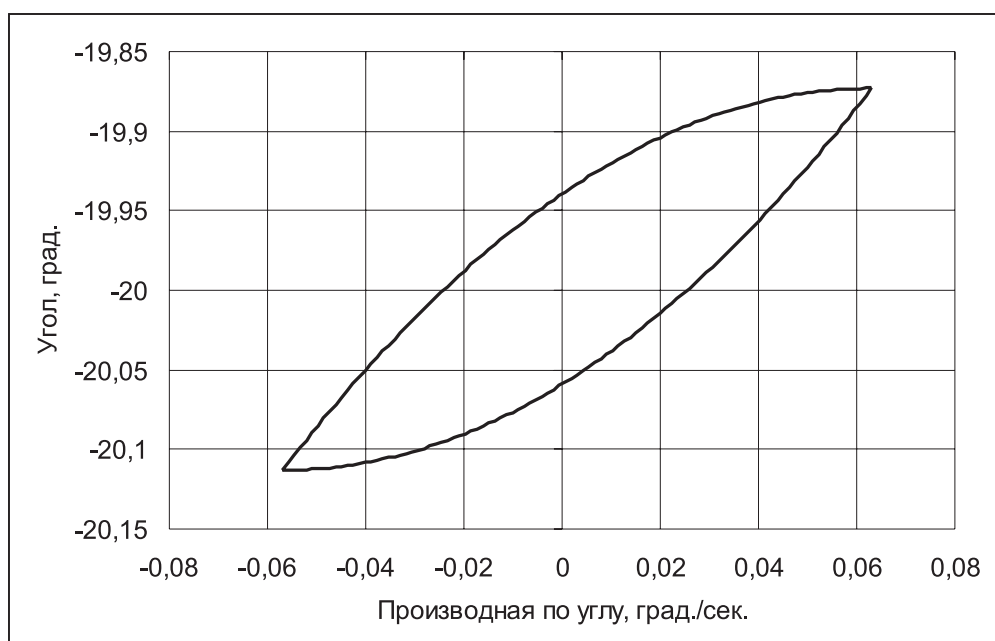


Рис. 5.

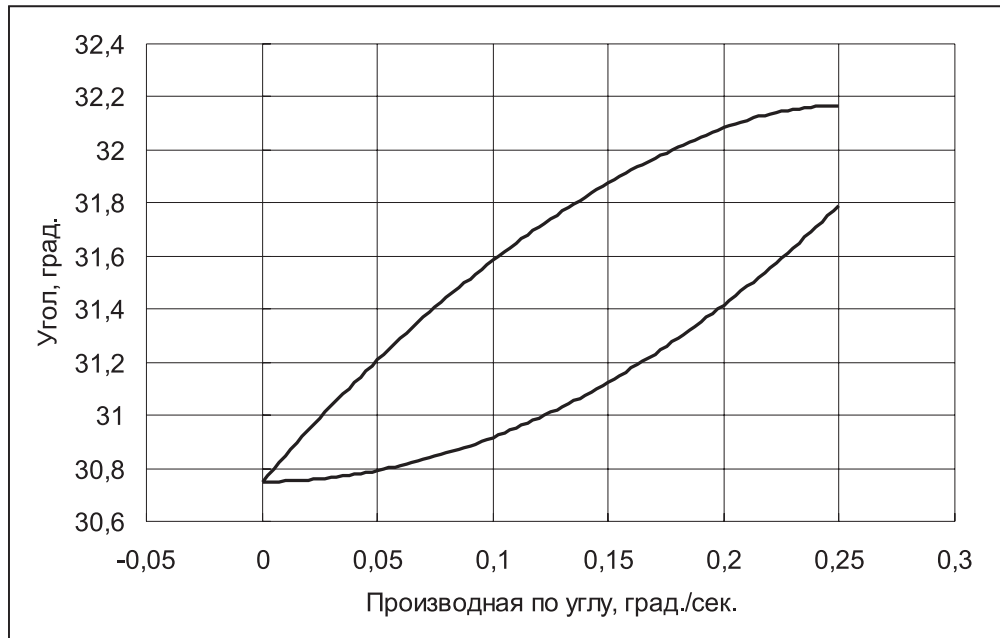


Рис. 6.

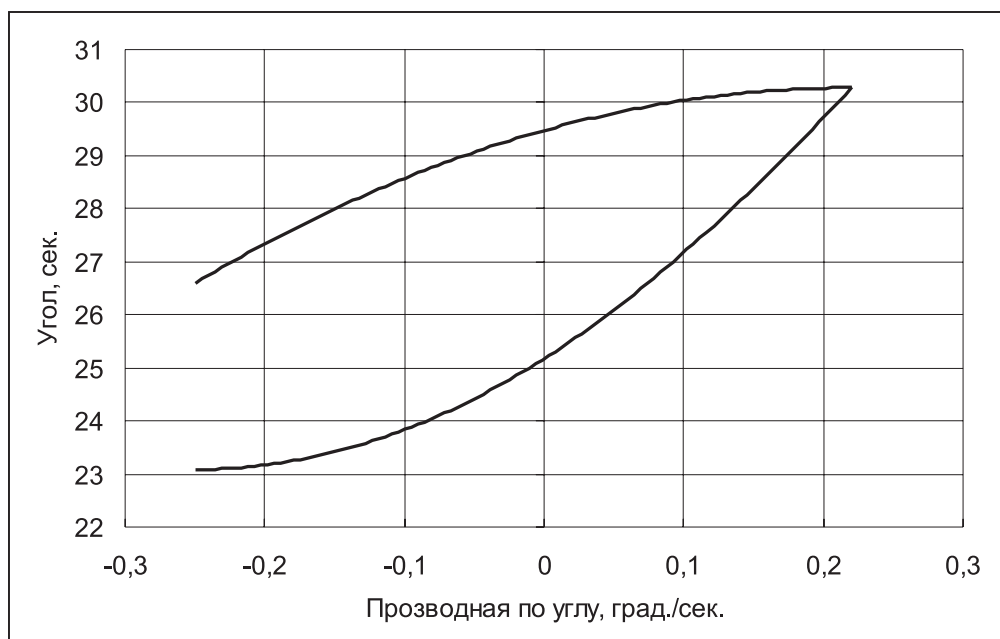


Рис. 7.

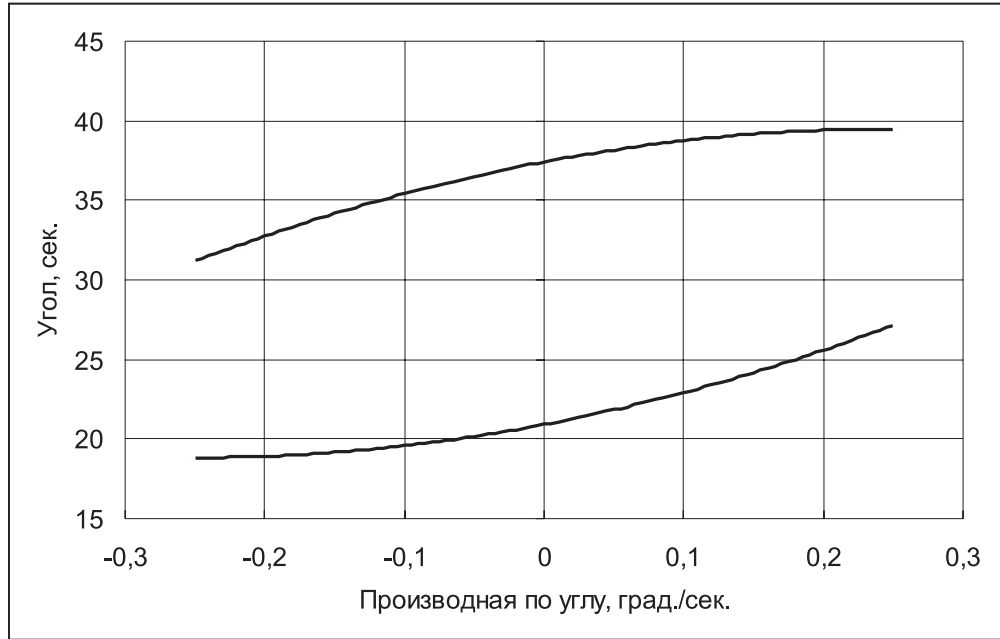


Рис. 8.

3. Решение основной и второй вспомогательной задач

Построим множество допустимых пар.

Введем в рассмотрение функции

$$\bar{\alpha}(\beta_2) = \begin{cases} \alpha_1 - \frac{(\beta_1 - \beta_2)^2}{4d} + \frac{T}{2}(\beta_1 + \beta_2) + \frac{dT^2}{4}, & \beta_2 \leq 2b - dT - \beta_1, \\ \alpha_1 - \frac{1}{2d}((b - \beta_1)^2 + (b - \beta_2)^2) + bT, & \beta_2 > 2b - dT - \beta_1, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\underline{\alpha}(\beta_2) = \begin{cases} \alpha_1 + \frac{(\beta_1 - \beta_2)^2}{4d} + \frac{T}{2}(\beta_1 + \beta_2) - \frac{dT^2}{4}, & \beta_2 \geq -2b + dT - \beta_1, \\ \alpha_1 + \frac{1}{2d}((b - \beta_1)^2 + (b - \beta_2)^2) - bT, & \beta_2 < -2b + dT - \beta_1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Теорема 6. Множество допустимых пар имеет вид

$$P(\alpha_1, \beta_1, T) = \{(\alpha_2, \beta_2) : \max\{-b, \beta_1 - dT\} \leq \beta_2 \leq \min\{b, \beta_1 + dT\}, \underline{\alpha}(\beta_2) \leq \alpha_2 \leq \bar{\alpha}(\beta_2)\}. \quad (3.3)$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что для $\beta_2 \in P(\alpha_1, \beta_1, T)$ необходимо, чтобы

$$\left| \frac{\beta_1 - \beta_2}{d} \right| \leq T \quad (3.4)$$

(иначе переход от β_1 к β_2 за время T при ограничении $|f''(t)| \leq d$ невозможен). Кроме того, должно быть $\beta_2 \in [-b, b]$. Таким образом, необходимым

является условие

$$\max\{-b, \beta_1 - dT\} \leq \beta_2 \leq \min\{b, \beta_1 + dT\}. \quad (3.5)$$

Далее заметим, что в силу формул (2.3), (2.2) переход от двузвенных огибающих к трехзвенным происходит при $\beta_2 = 2b - dT - \beta_1$ для верхней огибающей и при $\beta_2 = -2b + dT - \beta_1$ для нижней огибающей. А из формул (2.6), (2.9) следует, что функции (3.1), (3.2) дают значения верхней и нижней границ множества достижимости по α в зависимости от β_2 . Отсюда и из (3.5) вытекает формула (3.3). Теорема доказана.

Из теоремы 6 следует, что при заданном α_2 множество достижимости по β_2 совпадает с проекцией сечения множества (3.3) на ось $O\beta_2$ в системе координат $O\alpha_2\beta_2$. Найдем эту проекцию. Возможны четыре случая: а) $-b \leq \beta_1 - dT, \beta_1 + dT \leq b$; б) $-b > \beta_1 - dT, \beta_1 + dT > b$; в) $-b \leq \beta_1 - dT, \beta_1 + dT > b$; г) $-b > \beta_1 - dT, \beta_1 + dT \leq b$. Рассмотрим эти случаи.

Случай а) (см. рис. 5). В этом случае отрезок (3.4) имеет вид $[\beta_1 - dT, \beta_1 + dT]$. Функции $\bar{\alpha}, \underline{\alpha}$ на этом отрезке задаются первыми строками формул (3.1), (3.2) и являются параболами, направленными соответственно ветвями вниз и вверх. Эти параболы пересекаются в точках $(\beta_1 \pm dT, \alpha_1 + T\beta_1 \pm \frac{dT^2}{2})$. $P(\alpha_1, \beta_1, T)$ — это множество, заключенное между этими параболами при $\beta_2 \in [\beta_1 - dT, \beta_1 + dT]$. Отсюда следует, что при $\alpha \notin [\alpha_1 + T\beta_1 - \frac{dT^2}{2}, \alpha_1 + T\beta_1 + \frac{dT^2}{2}]$ множество достижимости пусто, а при $\alpha \in [\alpha_1 + T\beta_1 - \frac{dT^2}{2}, \alpha_1 + T\beta_1 + \frac{dT^2}{2}]$ — это отрезок

$$\begin{aligned} & [\underline{\beta}_2, \bar{\beta}_2] = \\ & = [\beta_1 + dT - \sqrt{2(dT)^2 + 4d(T\beta_1 + \alpha_1 - \alpha_2)}, \beta_1 - dT + \sqrt{2(dT)^2 - 4d(T\beta_1 + \alpha_1 - \alpha_2)}], \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\underline{\beta}_2$ — меньший корень уравнения

$$\bar{\alpha}(\beta_2) = 0, \quad (3.7)$$

а $\bar{\beta}_2$ — больший корень уравнения $\underline{\alpha}(\beta_2) = 0$.

Остальные случаи (б) — рис. 8., в) — рис. 6., г) — рис. 7) рассматриваются аналогично с той лишь разницей, что верхняя и нижняя части границ множества $P(\alpha_1, \beta_1, T)$, вообще говоря, составлены из двух парабол каждая, а также возможен случай, когда слева и справа $P(\alpha_1, \beta_1, T)$ ограничено вертикальными отрезками.

Приведем окончательный алгоритм решения второй вспомогательной задачи, получающийся в результате рассмотрения всех случаев.

1. Полагаем $x = \max\{\beta_1 - dT, -b\}$, $y = \min\{\beta_1 + dT, b\}$, $\tilde{\beta}_2 = 2b - dT - \beta_1$, $\tilde{\beta}_2 = -2b + dT - \beta_1$.

2. Определяем функции $\bar{\alpha}(\beta_2), \underline{\alpha}(\beta_2)$ формулами (3.1), (3.2).

3. Определяем меньший корень $\underline{\beta}_2$ уравнения $\bar{\alpha}(\beta_2) = \alpha_2$ следующим образом:

если $\bar{\alpha}(\tilde{\beta}_2) \leq \alpha_2 \leq \bar{\alpha}(y)$,

то $\underline{\beta}_2 = b - \sqrt{2d(bT - \alpha_2 + \alpha_1 - \frac{(b-\beta_1)^2}{2d})}$,

иначе, если $\bar{\alpha}(x) \leq \alpha_2 \leq \bar{\alpha}(\tilde{\beta}_2)$,
то $\check{\beta}_2 = \beta_1 + dT - \sqrt{2(dT)^2 + 4d(T\beta_1 + \alpha_1 - \alpha_2)}$.

4. Определяем больший корень $\hat{\beta}_2$ уравнения $\underline{\alpha}(\beta_2) = \alpha_2$ следующим образом:

если $\underline{\alpha}(x) \leq \alpha_2 \leq \bar{\alpha}(\tilde{\beta}_2)$,
то $\hat{\beta}_2 = -b + \sqrt{2d(bT + \alpha_2 - \alpha_1 - \frac{(b+\beta_1)^2}{2d})}$,

иначе, если $\underline{\alpha}(\tilde{\beta}_2) \leq \alpha_2 \leq \underline{\alpha}(y)$,
то $\hat{\beta}_2 = \beta_1 - dT + \sqrt{2(dT)^2 - 4d(T\beta_1 + \alpha_1 - \alpha_2)}$.

5. Если $\alpha_2 \notin [\underline{\alpha}(x), \bar{\alpha}(y)]$, то множество достижимости пусто и конец.

6. Если $\alpha_2 \in [\underline{\alpha}(y), \bar{\alpha}(y)]$, то полагаем $\bar{\beta}_2 = y$.

Если $\alpha_2 \in [\underline{\alpha}(x), \underline{\alpha}(y)]$, то полагаем $\bar{\beta}_2 = \hat{\beta}_2$.

7. Если $\alpha_2 \in [\underline{\alpha}(x), \bar{\alpha}(x)]$, то полагаем $\bar{\beta}_2 = y$.

Если $\alpha_2 \in (\bar{\alpha}(x), \bar{\alpha}(y))$, то полагаем $\bar{\beta}_2 = \check{\beta}_2$.

Тем самым вторая вспомогательная задача полностью решена.

Замечание. Для произвольной пары (α_2, β_2) включение $(\alpha_2, \beta_2) \in P(\alpha_1, \beta_1, T)$ равносильна выполнению неравенств $\underline{\alpha}(\beta_2) \leq \alpha_2 \leq \bar{\alpha}(\beta_2)$, которые легко проверяются с помощью формул (3.1), (3.2). Если же включение имеет место, то траектория $f(t) \in M_T$ строится по формуле (1.1), в которой $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(\beta_2), \bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\beta_2)$, а огибающие $\underline{f}(t), \bar{f}(t)$ определяются в соответствии с п. 2.

Тем самым основная задача также полностью решена.

Литература

- [1] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с.
- [2] Аншаков Г.П., Антонов Ю.Г., Мантуров А.И. и др. Управление угловым движением космических аппаратов дистанционного зондирования Земли: Сборник трудов X Всероссийского научно-технического семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. Самара, 2002.
- [3] Аншаков Г.П., Антонов Ю.Г., Мантуров А.И., и др. Интегрированная система управления угловым движением космического аппарата дистанционного зондирования Земли: Сборник трудов IX Санкт-Петербургской междунар. конференции по интегрированным навигационным системам. СПб., 2002.
- [4] Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. С. 600.
- [5] Завьялов Ю.С., Квасов Б.Н., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию 9/XI/2004;
в окончательном варианте — 16/XI/2004.

CONSTRUCTION OF ACCESSIBILITY DOMAIN OF KINEMATICS PARAMETERS FOR ANGULAR MOTION OF A SATELLITE IN THE EARTH SCANNING PROBLEMS

© 2004 I.A. Blatov, Y.N. Gorelov, A.I. Manturov, A.V. Permyakov²

In the paper the program trajectories of a satellite angular motion while scanning the on-ground objects and performing reorientation on some interval T are obtained. The algorithms for computing the program trajectories parameters in a class of quadratic spline functions are presented. They are proposed for a satellite reorientation from a given initial angular position to a fixed position for the prescribed period of time T under limitation of parameter values of program trajectories, restricted by capabilities of their technical realization. The construction algorithms for problem of accessibility upon angles (or angular velocities) at the end of time interval T are proposed.

Paper received 9/XI/2004.

Paper accepted 16/XI/2004.

²Blatov Igor Anatolevich, Gorelov Yuri Nikolaevich, Manturov Alexander Ivanovich, Permyakov Alexei Vladimirovich, Dept. of the Differential Equations and Theory of Control, State University, Samara, 443090, Russia.