

УДК 539.3

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ¹

© 2004 Ю.В.Немировский², А.В.Налимов³

Целью данной статьи является разработка метода численного решения многоточечных краевых задач для систем нелинейных дифференциальных уравнений со свободными границами, когда их число и порядок реализации заранее не известны.

Применительно к задачам анализа жесткопластических оболочек с кусочно-линейным потенциалом предлагается метод решения такого типа задач.

1. Предварительные сведения

Задачи статики и динамики конструкций из пластических материалов с кусочно-линейным потенциалом сводятся к особой группе задач, где приходится решать системы нелинейных дифференциальных уравнений на неопределенной области. Эти системы выбираются из некоторого многообразия, определяемого пластическим потенциалом. Области определения каждой из систем заранее не известны в статических задачах и изменяются при любом изменении нагрузки, а в динамических задачах изменяются еще и во времени. Условия сопряжения описываются нелинейными дифференциальными и (или) алгебраическими соотношениями. Искомые вектор-функции (напряжения и скорости перемещений) на границах сопряжения меняются скачкообразно. В динамических задачах величина скачка зависит от нагрузки и меняется во времени. Хотя потребность решения таких задач велика, определяющие системы уравнений получены, например [1–3], но практические решения исчисляются единицами [4–6].

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором И.А.Блатовым.

²Немировский Юрий Владимирович, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090, Россия, г. Новосибирск, Морской проспект, 44.

³Налимов Александр Васильевич (nalimov@bti.secna.ru), кафедра информационных и управляющих систем Бийского технологического института, 659305, Россия, г. Бийск, ул. Трофимова, 27.

В данной работе применительно к оболочкам из жесткопластического материала развивается метод численной реализации таких задач.

2. Постановка задачи

Принимая справедливость гипотез Кирхгофа—Лява, уравнения равновесия для осесимметрических оболочек можно записать в виде [4]:

$$\frac{dt_1}{dy} = \varphi_1 (t_1 - t_2) - \varphi_2 Q - X(y, \lambda_0); \quad \frac{dQ}{dy} = \varphi_2 Q + \varphi_2 t_1 + \varphi_3 t_2 - Y(y, \lambda_0); \quad (2.1)$$

$$\frac{dm_1}{dy} = \varphi_1 (m_1 - m_2) + \varphi_4 Q, \quad y \in [\bar{y}_0, \bar{y}_N] \quad (\bar{y}_0 = 0, \bar{y}_N = 2),$$

где $T_i = \int_{-H}^H \sigma_{ii} d\zeta$; $N = \int_{-H}^H \sigma_{13} d\zeta$; $M_i = \int_{-H}^H \sigma_{ii} \zeta d\zeta$ ($i = 1, 2$) — усилия и моменты (обобщенные напряжения);

$$t_i = T_i/T_0; \quad Q = N/T_0; \quad m_i = 2M_i/(T_0 H) \quad (i = \overline{1, 2}); \quad T_0 = 2\sigma_0 H;$$

$$\varphi_1 = \varphi_3 \operatorname{tg} \xi; \quad \varphi_2 = \varphi_5/R_1; \quad \varphi_3 = l/R; \quad \varphi_4 = 2\varphi_5/H; \quad \varphi_5 = l/\cos \xi;$$

$$R = R_2 \cos \xi; \quad X = X_0 \varphi_5/T_0; \quad Y = Y_0 \varphi_5/T_0; \quad X(y, \lambda_0) = X_1(y) + \lambda_0 X_2(y);$$

$Y(y, \lambda_0) = Y_1(y) + \lambda_0 Y_2(y)$; σ_0 — константа размерности напряжений; $2l$, $2H$ — длина по оси вращения и толщина оболочки; y — безразмерная координата по оси вращения; R_i ($i = 1, 2$) — радиусы кривизны срединной поверхности оболочки; X_0, Y_0 — компоненты касательной и нормальной нагрузки; ξ — угол между осью вращения и касательной к меридиану; λ_0 — параметр нагружения.

Обобщенные напряжения t_i, m_i ($i = 1, 2$) при реализации пластического течения удовлетворяют предельным соотношениям поверхности текучести. В пространстве обобщенных напряжений (t_1, t_2, m_1, m_2) эта замкнутая поверхность [5] образована пересечением ряда гиперповерхностей вида: $F_k(\vec{t}, y) = 0$, $\vec{t} = (t_1, t_2, m_1, m_2)^T$. На замкнутой поверхности текучести всегда существуют особые [5, 7] гиперповерхности или ребра типа: $F_n(t_1, m_1, y) = 0$ ($n = \overline{1, l}$). С учетом последнего предельные соотношения для гиперповерхностей будем записывать в виде:

$$F_n(t_1, m_1, y) = 0; \quad F_k(\vec{t}, y) = 0 \quad (n = \overline{1, l}; \quad k = \overline{l+1, L}). \quad (2.2)$$

Кинематические соотношения [4]:

$$\dot{\varepsilon}_{01} = \left(\frac{d\dot{u}}{dy} + \varphi_2 \dot{w} \right) \frac{1}{\varphi_5}; \quad \dot{\varepsilon}_{02} = \frac{(\varphi_3 \dot{w} - \varphi_1 \dot{u})}{\varphi_5}; \quad (2.3)$$

$$\dot{\chi}_1 = -\frac{d\dot{v}}{dy} \frac{1}{\varphi_4}; \quad \dot{\chi}_2 = \frac{\varphi_1 \dot{v}}{\varphi_4}; \quad \dot{v} = \left(\frac{d\dot{w}}{dy} - \varphi_2 \dot{u} \right) \frac{1}{\varphi_5}.$$

Обобщенные напряжения t_i, m_i ($i = 1, 2$) и скорости деформаций $\dot{\epsilon}_{0i}, \dot{\chi}_i$ ($i = 1, 2$) связаны ассоциированным законом течения [2]:

$$\dot{\epsilon}_{0i} = \lambda_n \sum_{n=1}^L \frac{\partial F_n(\vec{t}, y)}{\partial t_i}; \quad \dot{\chi}_i = \lambda_n \sum_{n=1}^L \frac{\partial F_n(\vec{t}, y)}{\partial m_i} \quad (i = 1, 2); \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} \lambda_n > 0, & \text{если } F_n(\vec{t}, y) = 0 \quad \text{и} \quad dF_n(\vec{t}, y) = 0; \\ \lambda_n = 0, & \text{если } F_n(\vec{t}, y) < 0 \quad \text{или} \quad dF_n(\vec{t}, y) < 0. \end{cases}$$

Здесь λ_n — постоянные множители, а соотношения (2.4) обозначают, что при реализации некоторого ребра поверхности текучести, образованного пересечением гиперповерхностей с номерами k, n ($k, n = \overline{1, L}; k \neq n$), вектор скоростей деформаций $\vec{\epsilon} = (\dot{\epsilon}_{01}, \dot{\epsilon}_{02}, \dot{\chi}_1, \dot{\chi}_2)^T$ может принимать произвольное направление между нормальными к смежным гиперповерхностям.

Целью задач анализа жесткопластических оболочек является определение предельного значения параметра λ_0 , характеризующего предельный уровень внешнего воздействия. При решении задач для упрощения относительно обобщенных напряжений и скоростей принимаются различные предположения, например, [4–7] предполагают, что ребра поверхности текучести выполняются только в одном сечении, а вектор скоростей деформаций ортогонален одной из смежных гиперповерхностей. При этих предположениях в [7] получены условия сопряжения различных пластических режимов (состояний, соответствующих различным гиперповерхностям). В работе [7] показано также, что гиперповерхности первой группы (2.2) ($n = \overline{1, l}$) не могут выполняться в конечной области оболочки, а их реализация в некотором сечении сопровождается появлением пластического шарнира. Пластические шарниры выполняются в сечениях сопряжения пластической и жесткой областей и на краях оболочки, где заданы нулевые скорости перемещений $\dot{u} = \dot{v} = \dot{w} = 0$ (жестко заземленный край) [7]. Реализация этих пластических шарниров сопровождается разрывами первого рода скоростей перемещений $\dot{u}, \dot{v}$ [5].

В общем случае в пределах пролета оболочки реализуется некоторый набор жестких и пластических областей, порядок расположения и границы их сопряжения заранее не известны. В [7] показано, что предельный параметр нагружения λ_0 можно определить только на одной из пластических областей.

Пусть в пределах пластической области реализуется некоторая последовательность k_i ($i = \overline{1, N}; k_i \in [\overline{l+1, L}]$) состояний (2.2). Если в некоторой части $y \in [y_{i-1}, y_i]$ пластической области $y \in [y_0, y_N]$ ($y_0 \geq \bar{y}_0; y_N \leq \bar{y}_N$) выполняется состояние с номером k_i (выполняется гиперповерхность $F_{k_i}(\vec{t}, y) = 0$ ($k_i = \overline{l+1, L}$)), то при помощи соотношений (2.1)–(2.4) для определения обобщенных напряжений и скоростей перемещений получим систему нелинейных дифференциальных уравнений шестого порядка с неизвестным

параметром λ_0 :

$$\frac{d\vec{X}^{(k_i)}}{dy} = \vec{Z}^{(k_i)}(\vec{X}^{(k_i)}, y, \lambda_0); \quad (2.5)$$

$$\vec{X}^{(k_i)} = (X_1^{(k_i)}, \dots, X_6^{(k_i)})^T = (t_1, Q, m_1, \dot{u}, \dot{v}, \dot{v})^T, \quad y \in [y_{i-1}, y_i].$$

Поскольку границы пластической области (величины y_0, y_N), последовательность k_i ($i = \overline{1, N}$) реализующихся состояний, а также сечения их сопряжения $y = y_i$ заранее не известны, то для определения величин $\vec{X}^{(k_i)}$ и y_i в сечениях сопряжения различных состояний необходимо задать по семь условий сопряжения. При $y_0 \geq \bar{y}_0$ и $y_N \leq \bar{y}_N$ требуется определить восемь условий — шесть краевых и еще два условия для определения значений y_0, y_N . Кроме этого, для вычисления предельного параметра нагрузки λ_0 требуется сформулировать еще одно соотношение. Это соотношение можно задать путем нормирования скоростей перемещений, а именно принять, например:

$$X_5^{(k_i)}(y_i) = \pm 1, \quad y_i \in [y_0, y_N]. \quad (2.6)$$

Условия сопряжения состояний k_i, k_{i+1} при $y = y_i$ без пластического шарнира записываются в виде [4]:

$$[X_j^{(k_i)}](y_i) = 0; \quad G_{(k_i, k_{i+1})}(\vec{X}^{(k_i)}, y_i) = 0 \quad (i = \overline{1, N-1}; j = \overline{1, 6}), \quad (2.7)$$

где $[f](x_*)$ — скачок функции $f(x)$ в точке $x = x_*$.

Последнее соотношение (2.7) получено путем исключения величин t_2 и m_2 из соотношений $F_{k_i}(\vec{t}, y_i) = 0, \quad F_{k_{i+1}}(\vec{t}, y_i) = 0$ и

$$\left[\frac{\dot{\epsilon}_{02}}{\dot{\chi}_2} \right](x_i) \equiv \left(\frac{\partial F_{k_{i+1}}(\vec{t}, y)/\partial t_2}{\partial F_{k_{i+1}}(\vec{t}, y)/\partial m_2} - \frac{\partial F_{k_i}(\vec{t}, y)/\partial t_2}{\partial F_{k_i}(\vec{t}, y)/\partial m_2} \right)(y_i) = 0.$$

Если сопряжение состояний характеризуется скачкообразным изменением обобщенных напряжений (компонент t_2, m_2 вектора $\vec{t}$) [2], то последнее соотношение (2.7) записывается в виде [7]:

$$X_5^{(k_i)}(y_i) = 0.$$

При реализации в сечении $y = y_i$ пластического шарнира условия сопряжения [5] принимают вид [7]:

$$[X_j^{(k_i)}](y_i) = 0 \quad (j = \overline{1, 3, 5}); \quad G_{(k_i, k_{i+1})}^{(n)}(\vec{X}^{(k_i)}, y_i) = 0; \quad (2.8)$$

$$F_n(X_1^{(k_i)}, X_3^{(k_i)}, y_i) = 0; \quad \frac{dF_n(X_1^{(k_i)}, X_3^{(k_i)}, y)}{dy}(y_i) = 0 \quad (n = \overline{1, l}).$$

Пластический шарнир представляется как предельное положение узкой зоны, в пределах которой величины $\dot{u}, \dot{v}$ претерпевают быстрое изменение, а величины $\frac{d\dot{u}}{dy}$ и $\frac{d\dot{v}}{dy}$ велики по сравнению со всеми производными низших порядков и $\lim_{y \rightarrow y_i} (\dot{\epsilon}_{01}) \rightarrow \infty; \lim_{y \rightarrow y_i} (\dot{\chi}_1) \rightarrow \infty$ (2.3). При $y = y_i$ вектор скоростей деформаций ортогонален гиперповерхности типа

(2.2) ($n = \overline{1, l}$) и, следовательно (2.4), существует предел $\lim_{y \rightarrow y_i} \left(\frac{\dot{\epsilon}_{01}}{\dot{\chi}_{01}} \right) = \left(\frac{\partial F_n(\vec{t}, y) / \partial t_1}{\partial F_n(\vec{t}, y) / \partial m_1} \right) (y_i)$ ($n = \overline{1, l}$) [5]. Откуда, согласно второму правилу Лопиталя, получим $\left(\frac{[\dot{\epsilon}_{02}]}{[\dot{\chi}_2]} - \frac{\partial F_n(\vec{t}, y) / \partial t_1}{\partial F_n(\vec{t}, y) / \partial m_1} \right) (y_i) = 0$. Учитывая, что в сечении $y = y_i$ реализуется ребро поверхности текучести, образованное пересечением гиперповерхностей с номерами k_i, k_{i+1}, n , при помощи последнего соотношения и равенств $F_{k_i}(\vec{t}, y_i) = 0$; $F_{k_{i+1}}(\vec{t}, y_i) = 0$ получим пятое условие (2.8).

В случае, когда пластическое течение реализуется во всем пролете оболочки, краевые условия можно записать в виде [4–5, 8]:

$$y_0 = \bar{y}_0; \quad y_N = \bar{y}_N; \quad A_\alpha \vec{X}^{(k_i)}(y_\alpha) = \vec{D}_\alpha \quad (y_\alpha = y_0; \quad y_\alpha = y_N), \quad (2.9)$$

где $A_\alpha, \vec{D}_\alpha$ — квадратные матрицы и векторы размерности шесть и $\text{rang}(A_\alpha) = 3$.

Если на одном из краев при $y = y_0$ ($y = y_N$) реализуется пластический шарнир [7], то краевые условия в этом сечении записываются следующим образом:

$$X_5^{(k_\beta)}(y_\alpha) = 0; \quad F_n(X_1^{(k_\beta)}, X_3^{(k_\beta)}, y_\alpha) = 0; \quad (2.10)$$

$$\left(\frac{\varphi_8 X_5^{(k_\beta)} - \varphi_7 X_4^{(k_\beta)}}{X_6^{(k_\beta)}} - \frac{\partial F_n(\vec{X}^{(k_\beta)}, y) / \partial X_1^{(k_\beta)}}{\partial F_n(\vec{X}^{(k_\beta)}, y) / \partial X_3^{(k_\beta)}} \right) (y_\alpha) = 0,$$

где $y_\alpha = \bar{y}_\alpha$ ($\alpha = 0, N$); $\beta = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha = 0; \\ N & \text{при } \alpha = N \end{cases} \quad (n = \overline{1, l});$

$$\varphi_7 = \frac{\varphi_4}{\varphi_5}; \quad \varphi_8 = \varphi_7 \frac{\varphi_3}{\varphi_1}.$$

В сечениях $y = y_i$ сопряжения жестких и пластических областей реализуется пластический шарнир. В таких сечениях выполняются соотношения (2.10), где нужно положить $\alpha = i$, $\beta = i$. Кроме этого, в этих сечениях должно выполняться условие равенства нулю приращения гиперповерхности с номером $n = \overline{1, l}$ [2, 7]:

$$\frac{dF_n(X_1^{(k_i)}, X_3^{(k_i)}, y)}{dy} (y_i) = 0 \quad (n = \overline{1, l}). \quad (2.11)$$

Таким образом, сформулированы (2.5)–(2.11) все необходимые соотношения для решения задачи предельного равновесия жесткопластических оболочек. Особенность этой многоточечной краевой задачи для систем обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений заключается в том, что заранее не известны ни область определения задачи $y \in [\bar{y}_0, \bar{y}_N]$, ни последовательность состояний (выполняющихся уравнений) k_i ($i = \overline{1, N}$). Неизвестными являются также границы сопряжения y_i ($i = \overline{1, N-1}$) различных состояний.

3. Приведение уравнений к "стандартной" форме

Для решения многоточечных краевых задач разработан ряд методов [9], но поскольку в рассматриваемом случае неизвестными являются границы определения задачи, каждого из состояний и их число, то прямое применение этих методов для данной задачи крайне затруднительно. Вычисление границ сопряжения различных состояний и области пластичности можно решить посредством увеличения порядка системы дифференциальных уравнений, например, путем сведения многоточечной краевой задачи (2.5)–(2.11) к "стандартной" форме [10]. Для этого запишем уравнения (2.5) в виде:

$$\frac{d\vec{Y}^{(k_i)}}{d\xi} = \vec{R}^{(k_i)}(\vec{Y}^{(k_i)}, \xi, \lambda_0); \quad \xi \in [0, 1], \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{Y}^{(k_i)} &= \left(\left(\vec{X}^{(k_i)} \right)^T, y_i \right)^T; \\ \vec{R}^{(k_i)}(\vec{Y}^{(k_i)}, \xi, \lambda_0) &= j(y_i - y_{i-1}) \left(\left(\vec{Z}^{(k_i)} \right)^T, 0 \right)^T; \\ y &= \begin{cases} y_{i-1} + \xi(y_i - y_{i-1}), & \text{если } i = 1, 3, 5, \dots; \\ y_i - \xi(y_i - y_{i-1}), & \text{если } i = 2, 4, 6, \dots; \end{cases} \\ j &= \begin{cases} 1, & \text{если } i = 1, 3, 5, \dots \\ -1, & \text{если } i = 2, 4, 6, \dots \end{cases}. \end{aligned}$$

Краевые условия для систем уравнений (3.1) определяются при помощи условий сопряжения (2.7)–(2.8), соотношения (2.6) и краевых условий (2.9)–(2.10):

$$\begin{aligned} \vec{\Xi}^{(1)}(\vec{Y}^{(k_i)}, \vec{Y}^{(k_{i+1})}, \lambda_0, 0) &= 0 \quad (i = 2, 4, 6, \dots); \\ \vec{\Xi}^{(2)}(\vec{Y}^{(k_i)}, \vec{Y}^{(k_{i+1})}, \lambda_0, 1) &= 0 \quad (i = 1, 3, 5, \dots); \\ \vec{\Xi}^{(j)} &= (\Xi_1^{(j)}, \dots, \Xi_7^{(j)})^T \quad (j = 1, 2); \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\vec{\Sigma}^{(0)}(\vec{Y}^{(k_1)}, 0) = 0; \quad \vec{\Sigma}^{(1)}(\vec{Y}^{(k_1)}, \lambda_0, 0) = 0; \quad \vec{\Sigma}^{(2)}(\vec{Y}^{(k_N)}, \lambda_0, \xi) = 0,$$

где $\xi = \begin{cases} 0, & \text{если } N = 2, 4, 6, \dots; \\ 1, & \text{если } N = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$; $\vec{\Sigma}^{(j)} = (\Sigma_1^{(j)}, \Sigma_2^{(j)}, \Sigma_3^{(j)}, \Sigma_4^{(j)})^T \quad (j = 1, 2)$.

Пусть в пластической области реализуется некоторая последовательность состояний k_i , ($i = \overline{1, N}$), тогда системы уравнений (3.1) можно объединить в единую систему нелинейных дифференциальных уравнений $(7 \times N + 2)$ порядка:

$$\frac{d\vec{X}}{d\xi} = \vec{Z}(\vec{X}, \xi), \quad \xi \in [0, 1], \quad (3.3)$$

где $\vec{X} = \left(\left(\vec{Y}^{(k_1)} \right)^T, \dots, \left(\vec{Y}^{(k_N)} \right)^T, y_0, \lambda_0 \right)^T$;
 $\vec{Z}(\vec{X}, \xi) = \left(\left(\vec{R}^{(k_1)} \right)^T, \dots, \left(\vec{R}^{(k_N)} \right)^T, 0, 0 \right)^T$.

Соответствующие $(7 \times N + 2)$ краевые условия (3.2) запишем в форме:

$$\vec{\Theta}_1(\vec{X}, 0) = 0; \quad \vec{\Theta}_2(\vec{X}, 1) = 0, \quad (3.4)$$

где $\vec{\Theta}_k$, ($k = 1, 2$) — векторы длины n_1, n_2 соответственно и $n_1 + n_2 = (7 \times N + 2)$.

Таким образом, независимо от места расположения пластической области, числа состояний задача о несущей способности осесимметрических оболочек сводится к решению двухточечной краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений (3.3)–(3.4). Численное решение этой задачи при известной последовательности состояний k_i ($i = \overline{1, N}$) можно проводить при помощи метода коллокаций [10].

4. Алгоритм вычисления последовательности состояний

Для вычисления последовательности k_i ($i = \overline{1, N}$) рассмотрим дерево задач, в вершинах которого расположим "решения", полученные при всевозможных комбинациях пластических состояний. В корень этого дерева поместим решение, полученное на основе приближенной поверхности текучести, образованной пересечением только части гиперповерхностей (2.2), например:

$$F_n(t_1, m_1, y) = 0; F_k(t_2, m_2, y) = 0 \quad (n = \overline{1, l}; k = \overline{l+1, l+2}).$$

При использовании такого набора гиперповерхностей решение и последовательность режимов k_i ($i = \overline{1, l+2}$) можно вычислить аналогично [11].

На последующих уровнях дерева в вершины поместим решения с уточненной поверхностью текучести, где уточнение будем проводить, последовательно добавляя ранее не учтенные гиперповерхности (на уровне τ будем добавлять гиперповерхность с номером $\Upsilon_\tau = \tau + l + 2$, $\tau \in [0, L]$). Число уровней в построенном таким образом дереве равно $L - l - 2$. Решение задачи, соответствующее вершине с порядковым номером α уровня τ , являющейся "потомком" вершины уровня $\tau - 1$ с номером β , определяется путем численного решения краевой задачи (3.3)–(3.4) при заданной последовательности $K_{(\alpha)}^{(\tau, \beta)} = \langle k_{(\alpha), 1}^{(\tau, \beta)}, \dots, k_{(\alpha), J_\alpha}^{(\tau, \beta)} \rangle$, $(k_{(\alpha), i}^{(\tau, \beta)} \in [l + 1, l + 2 + \tau]; J_\alpha = N_{\tau, \alpha})$ состояний. Допустим, что при переходе на следующий уровень дерева с номером τ в пределах определения каждого из состояний $k_{(\beta), j}^{(\tau-1, \beta-1)}$ гиперповерхность Υ_τ может выполняться $\theta + 1$ раз. Тогда общее число вершин, исходящих из вершины уровня $\tau - 1$ с номером β , равно $2^{\theta N_{\tau-1, \beta}}$, а число вершин с $\eta = 0$ ($\theta N_{\tau-1, \beta}$) реализациями состояния Υ_τ в пластической области равно $C_{(\theta N_{\tau-1, \beta})}^\eta$.

Таким образом, при известном решении, соответствующем корню, строится дерево, включающее всевозможные комбинации реализаций пластических состояний. Решение, соответствующее каждой из вершины уровня $\tau = \overline{1, (L - l - 2)}$, определяется посредством интегрирования краевой задачи (3.3)–(3.4). Каждое из этих решений характеризуется значением предель-

ного параметра нагрузки $\lambda_0^{(\tau)}$ и последовательностью координат сопряжения различных состояний $y_i^{(\tau)} (i = \overline{0, N_{\tau, \alpha}})$.

Из всех соответствующих дереву решений истинное должно соответствовать конечной вершине (листу) $\tau = L - l - 2$. Поскольку переход на следующий уровень дерева задач характеризуется уточнением поверхности текучести, то в соответствии с теоремами предельного равновесия [1–3] для истинной последовательности состояний должны выполняться неравенства:

$$\lambda_0^{(\tau-1)} \geq \lambda_0^{(\tau)}; \quad (4.1)$$

$$y_{i-1}^{(\tau)} < y_i^{(\tau)} \quad (i = \overline{1, N_{\tau, \alpha}}); \quad (4.2)$$

$$F_n(\vec{t}, y) \leq 0 \quad (y \in [y_0^{(\tau)}, y_{N_{\tau, \alpha}}^{(\tau)}]; \quad n = \overline{1, l + 2 + \tau}). \quad (4.3)$$

Таким образом, правило построения дерева задач сформулировано и заданы условия, которым должно удовлетворять решение.

Задача такого типа из области "искусственного интеллекта" [12] строится методом проб и ошибок. Как правило, процесс проб и ошибок представляется как поисковый процесс, который постепенно строит, просматривает и обрезает дерево подзадач. Обычно такие задачи наиболее естественно описываются с помощью рекурсии [12]. В рассматриваемом случае алгоритм поиска требуемой вершины на дереве задач можно построить методом с отходом назад [12]. Этот рекурсивный алгоритм можно сформулировать следующим образом:

АЛГОРИТМ I.

Шаг I.1. Зададим нумерацию гиперповерхностей Υ .

Шаг I.2. При помощи метода [11] построим решение, соответствующее корню дерева.

Шаг I.3. <Обход дерева>.

АЛГОРИТМ <ОБХОД ДЕРЕВА>.

Шаг 1. Перенумеруем потомки рассматриваемой вершины.

Шаг 2. Выбираем следующую возможную вершину из списка очередных.

Шаг 3. Решаем задачу (3.3)–(3.4).

Шаг 4. IF <Условия (4.1)–(4.3) выполняются> THEN
Записываем решение;
IF <Вершина не конечная> THEN <ОБХОД ДЕРЕВА>;
IF <Неудача> THEN Стираем предыдущее решение
END FI; END FI; END FI.

Шаг 5. IF <Выбор вершины был неудачным> AND
<Возможно дальнейшее движение по дереву> THEN
GOTO <Шаг 2> END FI.

END <АЛГОРИТМ ОБХОД ДЕРЕВА>.

END <АЛГОРИТМ I>.

Следует отметить, что поскольку ширина дерева задач растет по экспоненциальному закону, то сложность алгоритма I описывается суперэкспонентой [13]. Обычно в подобных ситуациях при организации поискового процесса дерево решений обрезают, используя различные методы [14]. Для данной задачи можно организовать поисковый процесс методом ветвей и границ, если в качестве характеристик множества решений использовать верхние или нижние оценки для параметра нагружения. Такие оценки в принципе можно построить на основе кинематических и статических теорем [1–3], но эти задачи сами являются достаточно трудоемкими [4, 5]. Другой способ прохода по дереву решений можно организовать на основе условий (4.1)–(4.3).

Пусть построено решение, соответствующее вершине α уровня τ , с последовательностью состояний $K_{(\alpha)}^{(\tau, \beta)}$. Проведем анализ распределений обобщенных напряжений и выявим области и порядок расположения режимов (пластических состояний), где выполняются условия $F_{\tau+1}(\vec{t}, y) > 0$. В соответствии с полученной последовательностью состояний $K_{(\mu)}^{(\tau+1, \alpha)}$ выберем вершину $\tau+1$ уровня с порядковым номером μ . Если решение задачи (3.3)–(3.4) для вновь выбранной вершины удовлетворяет условиям (4.1)–(4.3), то продолжаем процесс дальше. В противном случае переопределяем вершину с номером μ , а соответствующие ветви дерева решений обрезаются. Замену вершины μ будем проводить по следующему правилу: если нарушаются условия (4.1), то переходим к вершине уровня $\tau+1$ с последовательностью $K_{(\mu)}^{(\tau+1, \alpha)} = K_{(\alpha)}^{(\tau, \beta)}$; если условия (4.2) или (4.3) не выполняются, то в соответствии с условиями (4.1)–(4.3) производим корректировку последовательности состояний.

Алгоритм I поиска решения с учетом изложенного преобразуется к следующему виду:

АЛГОРИТМ II.

Шаг II.1. Зададим нумерацию гиперповерхностей Υ .

Шаг II.2. При помощи метода [11] построим решение, соответствующее корню дерева.

Шаг II.3. <ПРОХОД ПО ДЕРЕВУ>.

АЛГОРИТМ <ПРОХОД ПО ДЕРЕВУ>.

Шаг 1. Перенумеруем потомки рассматриваемой вершины.

Шаг 2. В соответствии с условиями (4.3) и распределением напряжений выбираем возможную вершину следующего уровня.

Шаг 3. Решаем задачу (3.3)–(3.4).

Шаг 4. IF <Условия (4.1)–(4.3) выполняются> THEN
Записываем решение;
IF <Вершина не конечная> THEN
<ПРОХОД ПО ДЕРЕВУ>;
IF <Неудача> THEN Обрезаем ветвь;

Стираем предыдущее решение
END FI; END FI; END FI.

Шаг 5. IF <Условия (4.2) или (4.3) не выполняются> AND
<Возможно дальнейшее движение по дереву> THEN
В соответствии с условиями (4.3) и (4.3)
выбираем вершину уровня τ ;
GOTO <Шаг 3> END FI.

Шаг 6. IF <Условия (4.1) не выполняются> AND
<Возможно дальнейшее движение по дереву> THEN
 $\tau = \tau + 1$; Запоминаем номер τ ;
GOTO <Шаг 2> END FI.

END ПРОХОД ПО ДЕРЕВУ.

Шаг II.4. Из номеров гиперповерхностей τ
построим новую последовательность Υ .

Шаг II.5. IF < $\Upsilon \neq \emptyset$ > THEN
GOTO <Шаг II.3> ELSE STOP END FI.

END АЛГОРИТМ II.

Алгоритм I позволяет определить последовательность состояний, а соответствующее решение задачи (3.3)–(3.4) даст искомое значение предельного параметра нагрузки λ_0 . Отметим еще, что для многослойных (число слоев составляет трехзначное число) оболочек мощность множества возможных пластических состояний пропорциональна числу слоев материала. Поскольку для таких конструкций высота дерева задач достаточно велика, то обычно его обрезают, используя различные эвристические соображения [12], и тем самым количество вычислений сводят к разумным пределам.

Применительно к задачам предельного равновесия оболочек такое обрезание дерева подзадач производилось неявно [4–6], например, при решении задач часто принимают [4–6], что поверхность текучести образована только частью гиперповерхностей (2.2). Это равносильно эвристическому алгоритму, где вводится ограничение на высоту дерева задач. Можно построить другие подобные алгоритмы, где дерево подзадач обрезается на основе различных условий или предположений, например, в качестве такого условия можно принять $|\lambda_\tau - \lambda_\eta| \leq \varepsilon$, где λ_τ , λ_η — предельные параметры, определенные при учете $\tau+l+2$ и $\eta+l+2$ гиперповерхностей. Величины ε , $\min(\tau)$ и $\eta - \tau$ задаются для каждой задачи.

5. Результаты расчетов

В качестве примера рассматривались многослойные армированные оболочки, форма образующей которых описывается следующими соотношениями (рис. 1):

$$\frac{R^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = 1; \quad \alpha = R_0^2;$$

$$\beta = \frac{4(\bar{y}_N - \bar{y}_0)^2}{(1 - (R_*/R_0)^2)};$$

$$\frac{l}{R_0} = 0.3; \quad \frac{2H}{R_0} = 0.03;$$

$$R_0 = R(\bar{y}_0); \quad R_* = R(\bar{y}_N).$$

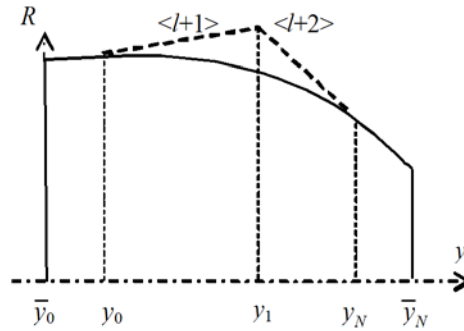
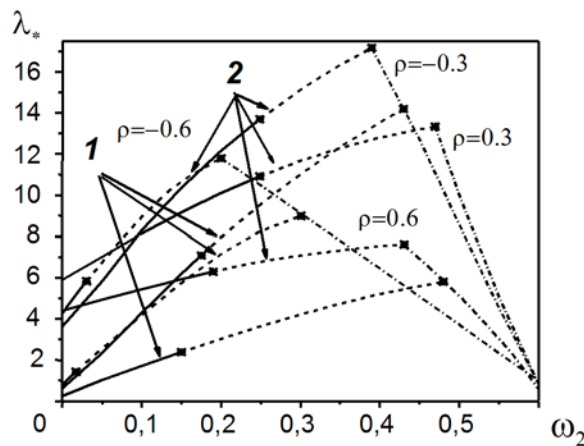


Рис. 1. Сечение оболочки

Во всех слоях постоянной толщины армирующие волокна уложены вдоль меридиана и в тангенциальном направлении, где интенсивность осевого армирования ω_1 определяется из условия постоянства сечения волокон. Суммарная интенсивность в каждом сечении определяется из условия $\max_{y \in [\bar{y}_0, \bar{y}_N]} (\omega_1 + \omega_2)(y) = 0.6$; $\omega_2 = \text{const}$. Условие пластичности материала оболочки в каждом сечении описывается шестиугольником [15] (материал связующего подчиняется условию пластичности Треска с пределом текучести σ_0 ; предел текучести одномерных армирующих волокон равен $10^2 \sigma_0$).

Рис. 2. Зависимость λ_* от ω_2 при различных значениях параметра ρ : 1 — зависимости для консольных оболочек, 2 — для оболочек с защемленными краями

На рис. 2 приведены зависимости параметра нагружения $\lambda_* = \lambda_0 l / (2\sigma_0 H)$ от интенсивности тангенциального армирования ω_2 при различных значениях геометрического параметра $\rho = (1 - R_*/R_0)$, полученного при помощи алгоритма II, где кривые помечены индексом "1" в случае консольных оболочек (при $y = \bar{y}_0$ имеет место жесткое защемление и при $y = \bar{y}_N$ — край не загружен) и индексов "2" для оболочек с защемленными краями. На рис. 2 сплошными линиями приведены зависимости при реализации пластического состояния во всем пролете оболочки, штриховыми — в некоторой ее части и штрихпунктирными зависимости, когда пластическое состояние реализуется только в одном сечении.

В результате численных экспериментов при решении задачи (3.3)–(3.4) с использованием состояний, соответствующих только сторонам условия пластичности, методом коллокаций была отмечена быстрая сходимость, а при подключении пластических режимов, соответствующих вершинам [15], необходимое число итераций существенно увеличивается. Кроме этого, было отмечено, что отличие точного значения предельного параметра λ_0 от приближенного, полученного при использовании только гиперповерхностей, отвечающих сторонам условия пластичности, не превосходит 7%.

Литература

- [1] Ерхов М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций. М.: Наука, 1978. 352 с.
- [2] Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
- [3] Мосолов П.П., Мясников В.П. Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
- [4] Савчук А. О пластическом анализе оболочек: Сб. статей // Механика деформируемых твердых тел. Направления развития / Под ред. Г.С. Шапиро. М.: Мир, 1983. С. 276–309.
- [5] Ходж Ф.Г. Расчет конструкций с учетом пластических деформаций. М.: Машгиз, 1963. 380 с.
- [6] Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. 1. Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001. 448 с.
- [7] Немировский Ю.В., Налимов А.В. Предельное равновесие армированных оболочек нулевой гауссовой кривизны // Прикладная механика. 1989. Т. 25. В. 9. С. 72–79.
- [8] Save M.A., Massonnet C. Plastic analysis and design of plates, shells and disk. Amsterdam-London: North-Holland Publ. Co. 1972. 478 p.
- [9] Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979. 312 с.
- [10] Ascher U., Russell R.D. Reformulation of boundary value problems into "standard" form // SIAM REVIEW. 1981. V. 23. No. 2. P. 238–254.

- [11] Немировский Ю.В., Налимов А.В. Решение задач предельного равновесия армированных оболочек при помощи метода пристрелки // Материалы X Всесоюзной конференции "Численные методы решения задач теории упругости и пластичности". Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1988. С. 199–211.
- [12] Вирт Н. Алгоритмы + структуры данных = программы. М.: Мир, 1985. 406 с.
- [13] Косовский Н.К. Основы теории элементарных алгоритмов. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1987. 152 с.
- [14] Кнут Д. Искусство программирования. Т. 3. Сортировка и поиск. М.: Мир, 1978. 844 с.
- [15] Nemirovsky Y.V. Limit analysis of stiffened axisymmetrical shells // Int. Journal Solid and Structures. 1969. V. 5. No. 10. P. 1037–1058.

Поступила в редакцию 11/IX/2004;
в окончательном варианте — 11/IX/2004.

NUMERICAL ALGORITHM SOLUTION FOR MULTIPOINT BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THE THEORY OF PLASTIC LIMIT ANALYSIS⁴

© 2004 Y.V. Nemirovsky⁵ A.V. Nalimov⁶

In the paper a numerical method for multipoint boundary value problems for systems of nonlinear differential equations with free boundaries is developed. Number of points and the order of realization are not previously known.

The method for solution such problems especially the problems of the rigid plastic medium analysis with piecewise-linear potential is proposed.

Paper received 11/IX/2004.

Paper accepted 11/IX/2004.

⁴Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. I.A. Blatov.

⁵Nemirovsky Yuriy Vladimirovich, Siberian Institute of Mechanics, Novosibirsk, 630090, Russia.

⁶Nalimov Aleksandr Vasiljevich (nalimov@bti.secna.ru), Dept. of Information and Control Systems, Biysky Technological Institute, Biysk, 659305, Russia.