УДК 539.374

ГРУППЫ СИММЕТРИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

© 2004 Ю.Н. Радаев, В.А. Гудков[1]

В работе дан групповой анализ системы дифференциальных уравнений в частных производных, представляющей интерес с точки зрения анализа напряженного состояния пластического тела в условиях осевой симметрии. Предполагается, что текучесть описывается критерием Треска и соответствует ребру призмы Треска. Система сформулирована относительно изостатической координатной сетки. Вычислены группы симметрий этой системы дифференциальных уравнений и определены инвариантные решения. Показано, что стандартный групповой анализ позволяет получить, в частности, найденные ранее на основе соображений автомодельности и выбора автомодельной переменной в форме произведения степеней изостатических координат решения.

1. Постановка задачи и основные уравнения

Представляемая работа посвящена построению групп симметрий дифференциальных уравнений в частных производных осесимметричной задачи теории идеальной пластичности с критерием текучести Треска, сформулированных в изостатической системе координат, и нахождению решений, инвариантных относительно указанных групп симметрий.

Вывод уравнений осесимметричной задачи теории идеальной пластичности для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Треска, в координатной сетке линий главных напряжений приведен в работе [1]. В [2, 3] найдены автомодельные решения этих уравнений и показано, что автомодельная переменная может быть выбрана в форме произведения изостатических координат в меридиональной плоскости. Общий групповой анализ пространственных уравнений теории идеальной пластичности на ребре призмы Треска, представленных в декартовых координатах, дан в [4, с. 73–77]. Там же приводятся инвариантные и частично-инвариантные решения трехмерных уравнений. Групповой анализ уравнений осесимметрич-

[1]Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru), Гудков Василий Александрович (goodkov@ssu.samara.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

ной задачи теории идеальной пластичности в изостатических координатах ранее, по-видимому, не проводился.

Методы группового анализа применительно к системам дифференциальных уравнений в частных производных изложены в классических монографиях [5, 6][2].

Задача о равновесии тела, напряженное состояние которого соответствует ребру призмы Треска, статически определима, если граничные условия заданы в напряжениях. Уравнения равновесия могут быть формально рассмотрены независимо от кинематических уравнений. Для ребра призмы Треска, определяемого условием $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$ (σ_1, σ_2, σ_3 — главные нормальные напряжения, k — предел текучести при сдвиге), уравнения равновесия можно представить в форме одного векторного уравнения

$$\mathrm{grad}\sigma_3 \mp 2k\mathrm{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) = \mathbf{0}, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{n}$ — единичное векторное поле, имеющее направление главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему (наименьшему) собственному значению σ_3 тензора напряжений. Уравнение (1.1) принадлежит к гиперболическому типу.

Ключевым для анализа уравнения (1.1) выступает условие расслоенности векторного поля $\mathbf{n}$ в зоне пластического течения.

Для разрешимости уравнения (1.1) необходима расслоенность векторного поля $\mathbf{n}$, т.е. $\mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{n} = 0$, а с расслоенным полем естественным образом связано каноническое преобразование координат (см. [7])

$$x_i = f_i(\omega^1, \omega^2, \omega^3) \quad (i = 1, 2, 3), \tag{1.2}$$

где ω^j — канонические изостатические координаты, причем поверхности $\omega^3 = \mathrm{const}$ являются слоями поля $\mathbf{n}$. В случае осевой симметрии каноническое преобразование координат записывается в виде (ω^2 — угловая координата)

$$x_1 = f(\omega^1, \omega^3)\cos\omega^2, \quad x_2 = f(\omega^1, \omega^3)\sin\omega^2, \quad x_3 = h(\omega^1, \omega^3). \tag{1.3}$$

Здесь f — горизонтальная координата в меридиональной плоскости, а h — вертикальная пространственная координата.

Отображающие функции f, h должны удовлетворять следующей системе уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f}{\partial\omega^3} + \dfrac{\partial h}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial h}{\partial\omega^3} = 0, \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial h}{\partial\omega^3} - \dfrac{\partial f}{\partial\omega^3}\dfrac{\partial h}{\partial\omega^1}\right) f = \pm 1. \end{cases} \tag{1.4}$$

Левые части этих уравнений обозначим соответственно через E_1 и E_2.

[2]Оригинальное изложение теории групп Ли читатель может найти в книге: Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. С. 139–198.

При использовании неканонических изостатических координат ξ^1, ξ^3 вместо системы уравнений (1.4) имеем следующие уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \xi^1}\dfrac{\partial f}{\partial \xi^3} + \dfrac{\partial h}{\partial \xi^1}\dfrac{\partial h}{\partial \xi^3} = 0, \\ \left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial \xi^3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial \xi^3}\right)^2\right]\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial \xi^1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial \xi^1}\right)^2\right] f^2 = G_1(\xi^1)G_3(\xi^3), \end{cases} \tag{1.5}$$

где $G_1(\xi^1)$, $G_3(\xi^3)$ — некоторые функции.

Заметим также, что

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \xi^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \xi^3}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \xi^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \xi^1}\right)^2\right] = \\ = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi^1}\frac{\partial h}{\partial \xi^3} - \frac{\partial f}{\partial \xi^3}\frac{\partial h}{\partial \xi^1}\right)^2. \tag{1.6}$$

Ясно, что пары изостатических координат ξ^1, ξ^3 и ω^1, ω^3 связаны посредством следующего соотношения:

$$\omega^1 = \int \sqrt{G_1(\xi^1)}d\xi^1, \qquad \omega^3 = \int \sqrt{G_3(\xi^3)}d\xi^3. \tag{1.7}$$

В целях более компактного представления для переменных ω^1, ω^3 введем новые обозначения υ^1, υ^2.

Поставим задачу об отыскании непрерывных групп преобразований, относительно которых система дифференциальных уравнений в частных производных (1.4) (или (1.5)) будет инвариантной.

2. Вычисление группы инвариантности системы уравнений осесимметричной задачи

Для решения поставленной задачи рассмотрим, следуя [5], непрерывную однопараметрическую группу преобразований зависимых и независимых переменных (группу Ли)

$$\begin{aligned} \tilde{\upsilon}^1 &= \tilde{\upsilon}^1(\upsilon^1, \upsilon^2, f, h, \varepsilon) = \upsilon^1 + \varepsilon\Xi^1(\upsilon^1, \upsilon^2, f, h) + \dots, \\ \tilde{\upsilon}^2 &= \tilde{\upsilon}^2(\upsilon^1, \upsilon^2, f, h, \varepsilon) = \upsilon^2 + \varepsilon\Xi^2(\upsilon^1, \upsilon^2, f, h) + \dots, \\ \tilde{f} &= \tilde{f}(\upsilon^1, \upsilon^2, f, h, \varepsilon) = f + \varepsilon \mathrm{H}^1(\upsilon^1, \upsilon^2, f, h) + \dots, \\ \tilde{h} &= \tilde{h}(\upsilon^1, \upsilon^2, f, h, \varepsilon) = h + \varepsilon \mathrm{H}^2(\upsilon^1, \upsilon^2, f, h) + \dots. \end{aligned} \tag{2.1}$$

где ε — скалярный параметр группы преобразований.

Группа преобразований индуцирует касательное векторное поле, которое определяется компонентами [5, с. 55]

$$\varsigma = (\Xi^1(\upsilon^1, \upsilon^2, f, h), \Xi^2(\upsilon^1, \upsilon^2, f, h), \mathrm{H}^1(\upsilon^1, \upsilon^2, f, h), \mathrm{H}^2(\upsilon^1, \upsilon^2, f, h)). \tag{2.2}$$

Составим инфинитезимальный оператор группы [5, с. 55]

$$\varsigma \cdot \partial = \Xi^1\frac{\partial}{\partial \upsilon^1} + \Xi^2\frac{\partial}{\partial \upsilon^2} + \mathrm{H}^1\frac{\partial}{\partial f} + \mathrm{H}^2\frac{\partial}{\partial h}. \tag{2.3}$$

По инфинитезимальному оператору однопараметрическая группа преобразований (2.1) восстанавливается единственным образом (с точностью до замены параметра ε). Для этого необходимо проинтегрировать задачу Коши для автономной системы уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{d\tilde{\upsilon}^1}{d\tau} = \Xi^1(\tilde{\upsilon}^1, \tilde{\upsilon}^2, \tilde{f}, \tilde{h}), \quad \frac{d\tilde{\upsilon}^2}{d\tau} = \Xi^2(\tilde{\upsilon}^1, \tilde{\upsilon}^2, \tilde{f}, \tilde{h}), \\ &\frac{d\tilde{f}}{d\tau} = \mathrm{H}^1(\tilde{\upsilon}^1, \tilde{\upsilon}^2, \tilde{f}, \tilde{h}), \quad \frac{d\tilde{h}}{d\tau} = \mathrm{H}^2(\tilde{\upsilon}^1, \tilde{\upsilon}^2, \tilde{f}, \tilde{h}), \end{aligned} \tag{2.4}$$

где τ — канонический параметр группы, с начальными данными

$$\tilde{\upsilon}^1\big|_{\tau=0} = \upsilon^1, \quad \tilde{\upsilon}^2\big|_{\tau=0} = \upsilon^2, \quad \tilde{f}\big|_{\tau=0} = f, \quad \tilde{h}\big|_{\tau=0} = h.$$

Рассмотрим далее один раз продолженную группу и ее касательное векторное поле $\underset{1}{\varsigma}$. Инфинитезимальный оператор продолженной группы имеет вид

$$\begin{aligned} \underset{1}{\varsigma}\cdot\partial = \Xi^1\frac{\partial}{\partial\upsilon^1} + \Xi^2\frac{\partial}{\partial\upsilon^2} + \mathrm{H}^1\frac{\partial}{\partial f} + \mathrm{H}^2\frac{\partial}{\partial h} + \mathrm{H}^1_1\frac{\partial}{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial\upsilon^1}\right)} + \mathrm{H}^1_2\frac{\partial}{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial\upsilon^2}\right)} + \\ + \mathrm{H}^2_1\frac{\partial}{\partial\left(\dfrac{\partial h}{\partial\upsilon^1}\right)} + \mathrm{H}^2_2\frac{\partial}{\partial\left(\dfrac{\partial h}{\partial\upsilon^2}\right)}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где H^l_j выражается согласно формул первого продолжения [5, с. 58]

$$\mathrm{H}^l_j = \frac{\partial\mathrm{H}^l}{\partial\upsilon^j} + \frac{\partial f_s}{\partial\upsilon^j}\frac{\partial\mathrm{H}^l}{\partial f_s} - \frac{\partial f_l}{\partial\upsilon^s}\left(\frac{\partial\Xi^s}{\partial\upsilon^j} + \frac{\partial f_r}{\partial\upsilon^j}\frac{\partial\Xi^s}{\partial f_r}\right) \qquad (l, j = 1, 2) \tag{2.6}$$

и для сокращения записи принято, что $f_1 = f$ и $f_2 = h$.

Если замена переменных в соответствии с формулами (2.1) преобразует систему дифференциальных уравнений (1.4) в систему в точности того же самого вида

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\tilde{\upsilon}^1}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\tilde{\upsilon}^2} + \frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{\upsilon}^1}\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{\upsilon}^2} = 0, \\ &\left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\tilde{\upsilon}^1}\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{\upsilon}^2} - \frac{\partial\tilde{f}}{\partial\tilde{\upsilon}^2}\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{\upsilon}^1}\right)\tilde{f} = \pm1, \end{aligned} \tag{2.7}$$

то группу преобразований (2.1) называют группой инвариантности системы дифференциальных уравнений (1.4). Говорят также, что система дифференциальных уравнений (1.4) допускает группу (2.1).

Инфинитезимальный оператор один раз продолженной группы, относительно которой уравнения (1.4) инвариантны, обладает тем свойством, что если его применить к указанным дифференциальным уравнениям и поставить условия, что уравнения выполняются, то должны получаться тождественно нулевые выражения. Этим свойством пользуются для нахождения инфинитезимального оператора и группы инвариантности системы дифференциальных уравнений в частных производных.

Применим инфинитезимальный оператор $\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial$ к первому уравнению E_1 системы (1.4):

$$(\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial)\left(\frac{\partial f}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial f}{\partial\upsilon^2}+\frac{\partial h}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial h}{\partial\upsilon^2}\right)=\mathrm{H}_1^1\frac{\partial f}{\partial\upsilon^2}+\mathrm{H}_2^1\frac{\partial f}{\partial\upsilon^1}+\mathrm{H}_1^2\frac{\partial h}{\partial\upsilon^2}+\mathrm{H}_2^2\frac{\partial h}{\partial\upsilon^1}. \tag{2.8}$$

Преобразуем полученное выражение, используя формулы (2.6) для величин H_j^l:[3]

$$\begin{aligned}
(\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial)E_1 = {} & \frac{\partial f}{\partial\upsilon^2}\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial\upsilon^1}+\frac{\partial f}{\partial\upsilon^2}\frac{\partial f}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f}+\frac{\partial f}{\partial\upsilon^2}\frac{\partial h}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial h}-\frac{\partial f}{\partial\upsilon^2}\frac{\partial f}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial \Xi^1}{\partial\upsilon^1}-\frac{\partial f}{\partial\upsilon^2}\left(\frac{\partial f}{\partial\upsilon^1}\right)^2\frac{\partial \Xi^1}{\partial f}-\\
& -\frac{\partial f}{\partial\upsilon^2}\frac{\partial f}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial h}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial \Xi^1}{\partial h}-\left(\frac{\partial f}{\partial\upsilon^2}\right)^2\frac{\partial \Xi^2}{\partial\upsilon^1}-\left(\frac{\partial f}{\partial\upsilon^2}\right)^2\frac{\partial f}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial \Xi^2}{\partial f}-\left(\frac{\partial f}{\partial\upsilon^2}\right)^2\frac{\partial h}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial \Xi^2}{\partial h}+\\
& +\frac{\partial f}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial\upsilon^2}+\frac{\partial f}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial f}{\partial\upsilon^2}\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f}+\frac{\partial f}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial h}{\partial\upsilon^2}\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial h}-\left(\frac{\partial f}{\partial\upsilon^1}\right)^2\frac{\partial \Xi^1}{\partial\upsilon^2}-\\
& -\left(\frac{\partial f}{\partial\upsilon^1}\right)^2\frac{\partial f}{\partial\upsilon^2}\frac{\partial \Xi^1}{\partial f}-\\
& -\frac{\partial f}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial f}{\partial\upsilon^2}\frac{\partial h}{\partial\upsilon^2}\frac{\partial \Xi^1}{\partial h}-\frac{\partial f}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial f}{\partial\upsilon^2}\frac{\partial \Xi^2}{\partial\upsilon^2}-\frac{\partial f}{\partial\upsilon^1}\left(\frac{\partial f}{\partial\upsilon^2}\right)^2\frac{\partial \Xi^2}{\partial f}-\frac{\partial f}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial f}{\partial\upsilon^2}\frac{\partial h}{\partial\upsilon^2}\frac{\partial \Xi^2}{\partial h}+\\
& +\frac{\partial h}{\partial\upsilon^2}\frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial\upsilon^1}+\frac{\partial h}{\partial\upsilon^2}\frac{\partial f}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f}+\frac{\partial h}{\partial\upsilon^2}\frac{\partial h}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial h}-\frac{\partial h}{\partial\upsilon^2}\frac{\partial h}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial \Xi^1}{\partial\upsilon^1}-\\
& -\frac{\partial h}{\partial\upsilon^2}\frac{\partial h}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial f}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial \Xi^1}{\partial f}-\\
& -\frac{\partial h}{\partial\upsilon^2}\left(\frac{\partial h}{\partial\upsilon^1}\right)^2\frac{\partial \Xi^1}{\partial h}-\left(\frac{\partial h}{\partial\upsilon^2}\right)^2\frac{\partial \Xi^2}{\partial\upsilon^1}-\left(\frac{\partial h}{\partial\upsilon^2}\right)^2\frac{\partial f}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial \Xi^2}{\partial f}-\left(\frac{\partial h}{\partial\upsilon^2}\right)^2\frac{\partial h}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial \Xi^2}{\partial h}+\\
& +\frac{\partial h}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial\upsilon^2}+\frac{\partial h}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial f}{\partial\upsilon^2}\frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f}+\frac{\partial h}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial h}{\partial\upsilon^2}\frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial h}-\left(\frac{\partial h}{\partial\upsilon^1}\right)^2\frac{\partial \Xi^1}{\partial\upsilon^2}-\\
& -\left(\frac{\partial h}{\partial\upsilon^1}\right)^2\frac{\partial f}{\partial\upsilon^2}\frac{\partial \Xi^1}{\partial f}-\\
& -\left(\frac{\partial h}{\partial\upsilon^1}\right)^2\frac{\partial h}{\partial\upsilon^2}\frac{\partial \Xi^1}{\partial h}-\frac{\partial h}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial h}{\partial\upsilon^2}\frac{\partial \Xi^2}{\partial\upsilon^2}-\left(\frac{\partial h}{\partial\upsilon^1}\right)^2\frac{\partial h}{\partial\upsilon^2}\frac{\partial f}{\partial\upsilon^2}\frac{\partial \Xi^2}{\partial f}-\frac{\partial h}{\partial\upsilon^1}\left(\frac{\partial h}{\partial\upsilon^2}\right)^2\frac{\partial \Xi^2}{\partial h}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Привлечем затем систему уравнений (1.4) в форме

$$\frac{\partial f}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial f}{\partial\upsilon^2}+\frac{\partial h}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial h}{\partial\upsilon^2}=0,\quad -\frac{\partial h}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial f}{\partial\upsilon^2}+\frac{\partial f}{\partial\upsilon^1}\frac{\partial h}{\partial\upsilon^2}=\frac{1}{f} \tag{2.10}$$

и рассмотрим ее как систему линейных уравнений относительно частных производных по переменной υ^2

$$\frac{\partial f}{\partial\upsilon^2},\quad \frac{\partial h}{\partial\upsilon^2},$$

разрешая которую получим следующую нормальную по переменной υ^2 форму

[3] Преобразования подобного вида ниже выполняются с помощью пакета символьных вычислений Maple V.

Коши:

$$\frac{\partial f}{\partial \upsilon^2}=\frac{-\dfrac{\partial h}{\partial \upsilon^1}}{f\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2\right]},\quad \frac{\partial h}{\partial \upsilon^2}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial \upsilon^1}}{f\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2\right]}. \tag{2.11}$$

Подставляя (2.11) в (2.9) и умножая на

$$f^2\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2\right]^2,$$

получим

$$\begin{aligned}
&f^2\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2\right]^2(\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial)\mathrm{E}_1=f^2\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2\right]^2\times\\
&\quad\times\left[\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial \upsilon^2}-\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2\frac{\partial \Xi^1}{\partial \upsilon^2}+\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial \upsilon^2}-\left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2\frac{\partial \Xi^1}{\partial \upsilon^2}\right]+\\
&+f\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2\right]\left[-\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial \upsilon^1}-\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f}-\left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial h}+\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \Xi^1}{\partial \upsilon^1}+\right.\\
&+\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2\frac{\partial \Xi^1}{\partial f}+\left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \Xi^1}{\partial h}+\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial \upsilon^1}+\\
&\qquad+\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2\frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f}+\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial h}-\\
&-\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \Xi^1}{\partial \upsilon^1}-\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \Xi^1}{\partial f}-\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2\frac{\partial \Xi^1}{\partial h}-\\
&\qquad-\left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2\frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f}+\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial h}+\\
&+\left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^3\frac{\partial \Xi^1}{\partial f}-\left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \Xi^1}{\partial h}-\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \Xi^2}{\partial \upsilon^2}-\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f}+\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial h}+\\
&\qquad\left.+\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \Xi^1}{\partial f}-\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \Xi^1}{\partial h}+\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \Xi^2}{\partial \upsilon^2}\right]-\\
&-\left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2\frac{\partial \Xi^2}{\partial \upsilon^1}-\left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \Xi^2}{\partial f}-\left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^3\frac{\partial \Xi^2}{\partial h}-\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2\frac{\partial \Xi^2}{\partial f}+\\
&\quad+\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2\frac{\partial \Xi^2}{\partial h}-\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2\frac{\partial \Xi^2}{\partial \upsilon^1}-\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2\frac{\partial \Xi^2}{\partial f}-\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \Xi^2}{\partial h}+\\
&\qquad+\left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \Xi^2}{\partial f}-\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2\frac{\partial \Xi^2}{\partial h}.
\end{aligned}\tag{2.12}$$

Условие инвариантности первого уравнения системы (1.4) $(\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial)\mathrm{E}_1=0$, учитывая, что производные

$$\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1},\quad \frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}$$

являются свободными переменными, расщепляется на ряд уравнений, получающихся приравниванием нулю коэффициентов степенного многочлена от этих производных.

Таким образом находим следующие условия инвариантности:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Xi^1}{\partial \upsilon^2} = 0, \quad \frac{\partial \Xi^2}{\partial \upsilon^1} = 0,\\
&\frac{\partial \Xi^2}{\partial h} + \frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial \upsilon^1} f = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial h} + \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f} = 0, \quad \frac{\partial \Xi^1}{\partial f} + \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial \upsilon^2} f = 0,\\
&\frac{\partial \Xi^2}{\partial f} - \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial \upsilon^1} f = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f} - \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial h} = 0, \quad \frac{\partial \Xi^1}{\partial h} - \frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial \upsilon^2} f = 0.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Применим инфинитезимальный оператор $\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial$ ко второму уравнению E_2 системы (1.4), т.е. вычислим

$$(\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial)\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial h}{\partial \upsilon^2} - \frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial f}{\partial \upsilon^2}\right) f. \tag{2.14}$$

Прежде всего имеем

$$(\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial)\mathrm{E}_2 = \left(\mathrm{H}^1_1\frac{\partial h}{\partial \upsilon^2} + \frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\mathrm{H}^2_2 - \frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\mathrm{H}^1_2 - \mathrm{H}^2_1\frac{\partial f}{\partial \upsilon^2}\right) f + \left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial h}{\partial \upsilon^2} - \frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial f}{\partial \upsilon^2}\right)\mathrm{H}^1, \tag{2.15}$$

где H^l_j находятся с помощью (2.6).

Подставим выражения (2.11) в (2.15) и умножим на

$$f^2\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2\right]^2,$$

в результате получим степенной многочлен от свободных частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}, \quad \frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}.$$

После ряда преобразований имеем:

$$\begin{aligned}
f^2\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2\right]^2 (\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial)\mathrm{E}_2 = -\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^3 \frac{\partial \Xi^1}{\partial f} f + \left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^3 f^2 \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial \upsilon^2} -\\
-\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2 \frac{\partial \Xi^1}{\partial \upsilon^1} f - \left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2 \frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \Xi^1}{\partial h} f + \left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2 \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f} f - \left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2 f^2 \frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial \upsilon^2} +\\
+\mathrm{H}^1\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2 \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial h} f - \left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2 \frac{\partial \Xi^2}{\partial \upsilon^2} f - \frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \Xi^2}{\partial h} +\\
+\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial \upsilon^1} f + \frac{\partial f}{\partial \upsilon^1} f^2 \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial \upsilon^2}\left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2 - \frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2 \frac{\partial \Xi^1}{\partial f} f +\\
+\left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2 \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial h} f + \left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2 \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f} f - \left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^3 \frac{\partial \Xi^1}{\partial h} f -\\
-f^2\left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^3 \frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial \upsilon^2} + \mathrm{H}^1\left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2 + \frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial \upsilon^1} f -\\
-\left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2 \frac{\partial \Xi^2}{\partial \upsilon^2} f - \left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2 \frac{\partial \Xi^1}{\partial \upsilon^1} f + \frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial \Xi^2}{\partial f}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Коэффициенты степенного многочлена от свободных частных производных, расположенного в правой части последнего равенства, должны обращаться в нуль:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Xi^2}{\partial f} + \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial \upsilon^1} f = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f} f + \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial h} f - \frac{\partial \Xi^1}{\partial \upsilon^1} f + \mathrm{H}^1 - \frac{\partial \Xi^2}{\partial \upsilon^2} f = 0, \\
&\frac{\partial \Xi^1}{\partial h} + \frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial \upsilon^2} f = 0, \quad \frac{\partial \Xi^2}{\partial h} - \frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial \upsilon^1} f = 0, \quad \frac{\partial \Xi^1}{\partial f} - \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial \upsilon^2} f = 0.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Из полученных равенств (2.13) и (2.17) следует:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Xi^2}{\partial f} = \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial \upsilon^1} = 0, \quad \frac{\partial \Xi^1}{\partial h} = \frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial \upsilon^2} = 0, \\
&\frac{\partial \Xi^2}{\partial h} = \frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial \upsilon^1} = 0, \quad \frac{\partial \Xi^1}{\partial f} = \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial \upsilon^2} = 0.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Следовательно, касательное векторное поле ς имеет компоненты, зависимость которых от преобразуемых под действием группы переменных выражается как

$$\Xi^1(\upsilon^1), \quad \Xi^2(\upsilon^2), \quad \mathrm{H}^1(f,h), \quad \mathrm{H}^2(f,h). \tag{2.19}$$

Учитывая это, получим, что для компонент касательного векторного поля ς остаются только три не тождественно удовлетворяющихся уравнения

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f} f + \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial h} f - \frac{\partial \Xi^1}{\partial \upsilon^1} f + \mathrm{H}^1 - \frac{\partial \Xi^2}{\partial \upsilon^2} f = 0, \\
&\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial h} + \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f} = 0, \\
&\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f} - \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial h} = 0.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Из первого уравнения системы (2.20) получим

$$\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f} + \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial h} + \frac{\mathrm{H}^1}{f} = \frac{\partial \Xi^2}{\partial \upsilon^2} + \frac{\partial \Xi^1}{\partial \upsilon^1}. \tag{2.21}$$

Но, согласно (2.13) и (2.18), Ξ^2 зависит только от переменной υ^2, а Ξ^1 зависит только от переменной υ^1, причем левая часть уравнения зависит только от другой пары переменных f, h, а это может выполняться только в случае, если слагаемые в правой части уравнения являются постоянными:

$$\frac{\partial \Xi^1}{\partial \upsilon^1} = C_1, \quad \frac{\partial \Xi^2}{\partial \upsilon^2} = C_2, \tag{2.22}$$

и, следовательно,

$$2\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f} + \frac{\mathrm{H}^1}{f} = C_1 + C_2. \tag{2.23}$$

Итак, изостатические координаты υ^1 и υ^2 отделяются от пространственных координат f и h.

Последнее уравнение представляет собой однородное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого без труда находится:

$$\mathrm{H}^1 = \frac{-C_3(h)\sqrt{f^{-3}} + C_1 + C_2}{3} f = \frac{C_1 + C_2}{3} f - \frac{C_3(h) f^{-\frac{1}{2}}}{3}. \tag{2.24}$$

Подставив полученное решение в два последних уравнения системы (2.20), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f} &= -\frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial h} == \frac{-C_3'(h) f^{-\frac{1}{2}}}{3}, \\ \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial h} &= \frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f} = \frac{C_1 + C_2}{3} + \frac{C_3(h) f^{-\frac{3}{2}}}{6}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

На основании первого из этих уравнений получаем, что

$$\mathrm{H}^2 = 2\frac{-C_3'(h) f^{\frac{1}{2}}}{3} + C_4(h), \tag{2.26}$$

и, подставляя во второе уравнение, приходим к

$$\frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial h} = 2\frac{-C_3''(h) f^{\frac{1}{2}}}{3} + C_4'(h) = \frac{C_1 + C_2}{3} + \frac{C_3(h) f^{-\frac{3}{2}}}{6}, \tag{2.27}$$

т.е.

$$C_3(h) = 0. \tag{2.28}$$

Компоненты касательного векторного ς поля поэтому есть

$$\begin{aligned} &\mathrm{H}^1 = \frac{C_1 + C_2}{3} f, \quad \mathrm{H}^2 = C_4(h) = \frac{C_1 + C_2}{3} h + C_5, \\ &\Xi^1 = C_1 \upsilon^1 + C_6, \quad \Xi^2 = C_2 \upsilon^2 + C_7. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Полагая

$$C_1' = \frac{C_1 + C_2}{6}, \quad C_2' = \frac{C_1 - C_2}{6}, \tag{2.30}$$

получим, что инфинитезимальный оператор группы инвариантности системы дифференциальных уравнений (1.4) может иметь только следующую форму:

$$\begin{aligned} \varsigma \cdot \partial = {} & (3(C_1' + C_2')\upsilon^1 + C_6)\frac{\partial}{\partial \upsilon^1} + (3(C_1' - C_2')\upsilon^2 + C_7)\frac{\partial}{\partial \upsilon^2} + 2C_1' f \frac{\partial}{\partial f} + \\ & + (2C_1' h + C_5)\frac{\partial}{\partial h} = C_1'(3\upsilon^1 \frac{\partial}{\partial \upsilon^1} + 3\upsilon^2 \frac{\partial}{\partial \upsilon^2} + 2f\frac{\partial}{\partial f} + 2h\frac{\partial}{\partial h}) + \\ & + 3C_2'(\upsilon^1 \frac{\partial}{\partial \upsilon^1} - \upsilon^2 \frac{\partial}{\partial \upsilon^2}) + C_6 \frac{\partial}{\partial \upsilon^1} + C_7 \frac{\partial}{\partial \upsilon^2} + C_5 \frac{\partial}{\partial h}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

3. Инвариантные решения уравнений осесимметричной задачи

Группа, относительно которой система дифференциальных уравнений инвариантна, обладает также тем свойством, что примененная к любому решению этой системы дифференциальных уравнений она снова переводит его в решение этой системы (см. [6, с. 147]).

Пусть имеется произвольное решение

$$f = f(\upsilon^1, \upsilon^2), \quad h = h(\upsilon^1, \upsilon^2)$$

системы дифференциальных уравнений (1.4). Группа преобразований (2.1) позволяет тогда определить зависимости

$$\tilde{f} = \tilde{f}(\tilde{\upsilon}^1, \tilde{\upsilon}^2, \varepsilon), \quad \tilde{h} = \tilde{h}(\tilde{\upsilon}^1, \tilde{\upsilon}^2, \varepsilon).$$

Если они удовлетворяют в точности такой же системе дифференциальных уравнений (2.7), то группа преобразований (2.1) называется группой симметрий системы дифференциальных уравнений (1.4).

Таким образом, группа, относительно которой система дифференциальных уравнений инвариантна, есть также и группа симметрий этой системы. Полная группа симметрий данной системы дифференциальных уравнений — наибольшая группа преобразований, действующая на зависимые и независимые переменные и обладающая свойством переводить решения системы в другие ее решения.

Инвариантными решениями системы дифференциальных уравнений относительно группы преобразований называются решения этой системы, которые переводятся этой группой преобразований сами в себя.

Решение системы дифференциальных уравнений (1.4)

$$f = \Phi(\upsilon^1, \upsilon^2), \quad h = \mathrm{H}(\upsilon^1, \upsilon^2)$$

инвариантно относительно группы преобразований (2.1), если

$$\Phi(\tilde{\upsilon}^1, \tilde{\upsilon}^2) = \Phi(\upsilon^1, \upsilon^2), \quad \mathrm{H}(\tilde{\upsilon}^1, \tilde{\upsilon}^2) = \mathrm{H}(\upsilon^1, \upsilon^2),$$

т.е. разности

$$f - \Phi(\upsilon^1, \upsilon^2), \quad h - \mathrm{H}(\upsilon^1, \upsilon^2)$$

являются инвариантами.

Инфинитезимальный оператор группы инвариантности системы обладает свойством, что если его применить к инварианту I, то получим равное нулю выражение:

$$(\varsigma \cdot \partial)I = 0.$$

Учитывая (2.31), это условие инвариантности можно представить в форме уравнения в частных производных первого порядка:

$$(3(C_1' + C_2')\upsilon^1 + C_6)\frac{\partial I}{\partial \upsilon^1} + (3(C_1' - C_2')\upsilon^2 + C_7)\frac{\partial I}{\partial \upsilon^2} + \\ +2C_1' f\frac{\partial I}{\partial f} + (2C_1' h + C_5)\frac{\partial I}{\partial h} = 0, \tag{3.1}$$

где $I(\upsilon^1, \upsilon^2, f, h)$ — инвариант системы дифференциальных уравнений (1.4).

Для его решения рассмотрим характеристическую систему

$$\frac{d\upsilon^1}{3(C_1' + C_2')\upsilon^1 + C_6} = \frac{d\upsilon^2}{3(C_1' - C_2')\upsilon^2 + C_7} = \frac{df}{2C_1' f} = \frac{dh}{2C_1' h + C_5}, \tag{3.2}$$

три независимых первых интеграла которой без труда находятся

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{(3(C_1' + C_2')\upsilon^1 + C_6)^{1/3/(C_1'+C_2')}}{(3(C_1' - C_2')\upsilon^2 + C_7)^{1/3/(C_1'-C_2')}}, \\ I_2 &= \frac{f}{(3(C_1' + C_2')\upsilon^1 + C_6)^{C_1'/3/(C_1'+C_2')}(3(C_1' - C_2')\upsilon^2 + C_7)^{C_1'/3/(C_1'-C_2')}}, \\ I_3 &= \frac{(2C_1' h + C_5)}{(3(C_1' + C_2')\upsilon^1 + C_6)^{C_1'/3/(C_1'+C_2')}(3(C_1' - C_2')\upsilon^2 + C_7)^{C_1'/3/(C_1'-C_2')}}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Инвариантные решения системы дифференциальных уравнений (1.4) могут получаться только как зависимости между первыми интегралами. В частности, имеются инвариантные решения вида

$$\begin{aligned} &\frac{f}{(3(C_1' + C_2')\upsilon^1 + C_6)^{C_1'/3/(C_1'+C_2')}(3(C_1' - C_2')\upsilon^2 + C_7)^{C_1'/3/(C_1'-C_2')}} = \\ &\qquad = \Phi\left(\frac{(3(C_1' + C_2')\upsilon^1 + C_6)^{1/3/(C_1'+C_2')}}{(3(C_1' - C_2')\upsilon^2 + C_7)^{1/3/(C_1'-C_2')}}\right), \\ &\frac{(2C_1' h + C_5)}{(3(C_1' + C_2')\upsilon^1 + C_6)^{C_1'/3/(C_1'+C_2')}(3(C_1' - C_2')\upsilon^2 + C_7)^{C_1'/3/(C_1'-C_2')}} = \\ &\qquad = \Psi\left(\frac{(3(C_1' + C_2')\upsilon^1 + C_6)^{1/3/(C_1'+C_2')}}{(3(C_1' - C_2')\upsilon^2 + C_7)^{1/3/(C_1'-C_2')}}\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Если считать, что $C_5 = C_6 = C_7 = 0$, что исключает тривиальные преобразования трансляции вдоль вертикальной оси симметрии и трансляции канонических изостатических координат, то инвариантные решения системы дифференциальных уравнений (1.4) приобретают следующую форму ($c_1 = 3(C_1' + C_2')$, $c_2 = 3(C_1' - C_2')$):

$$\begin{aligned} \frac{f}{(c_1\upsilon^1)^{C_1'/3/(C_1'+C_2')}(c_2\upsilon^2)^{C_1'/3/(C_1'-C_2')}} &= \Phi\left(\frac{(c_1\upsilon^1)^{1/3/(C_1'+C_2')}}{(c_2\upsilon^2)^{1/3/(C_1'-C_2')}}\right), \\ \frac{2C_1' h}{(c_1\upsilon^1)^{C_1'/3/(C_1'+C_2')}(c_2\upsilon^2)^{C_1'/3/(C_1'-C_2')}} &= \Psi\left(\frac{(c_1\upsilon^1)^{1/3/(C_1'+C_2')}}{(c_2\upsilon^2)^{1/3/(C_1'-C_2')}}\right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Функции Φ и Ψ должны удовлетворять системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая получается при подстановке (3.5) в (1.4).

Вводя обозначения

$$\frac{1}{3(C_1'+C_2')}=\alpha,\quad \frac{1}{3(C_1'-C_2')}=\beta,$$

инвариантные решения окончательно представим в форме

$$\begin{aligned} f &= (\alpha^{-1}\upsilon^1)^{(1+\alpha/\beta)/6}(\beta^{-1}\upsilon^2)^{(\beta/\alpha+1)/6}\Phi((\alpha^{-1}\upsilon^1)^{\alpha}(\beta^{-1}\upsilon^2)^{-\beta}),\\ h &= \frac{3\alpha\beta}{\alpha+\beta}(\alpha^{-1}\upsilon^1)^{(1+\alpha/\beta)/6}(\beta^{-1}\upsilon^2)^{(\beta/\alpha+1)/6}\Psi((\alpha^{-1}\upsilon^1)^{\alpha}(\beta^{-1}\upsilon^2)^{-\beta}). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Вводя автомодельную переменную $\upsilon=(\alpha^{-1}\upsilon^1)^{\alpha}(\beta^{-1}\upsilon^2)^{-\beta}$, относительно $\Phi(\upsilon)$ и $\Psi(\upsilon)$ получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &(-\Psi'(\upsilon)\Phi(\upsilon)+\Psi(\upsilon)\Phi'(\upsilon))\,\Phi(\upsilon)=\upsilon^{\frac{\beta-\alpha}{2\alpha\beta}-1},\\ &\frac{1}{6^2}\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)^2(\Phi(\upsilon))^2-(\Phi'(\upsilon)\upsilon)^2+\frac{1}{4}(\Psi(\upsilon))^2-\\ &\qquad\qquad-\left(\frac{3\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)^2(\Psi'(\upsilon)\upsilon)^2=0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Здесь штрихом обозначается дифференцирование по автомодельной переменной υ. Последнюю систему можно также привести к виду

$$\begin{aligned} &\Phi(\upsilon)\left[\Psi(\upsilon)\Phi'(\upsilon)-\Phi(\upsilon)\Psi'(\upsilon)\right]=\upsilon^{a-1},\\ &\frac{1}{4}b^2\left[\Phi(\upsilon)\right]^2+\frac{1}{4}\left[\Psi(\upsilon)\right]^2-\left[\Phi'(\upsilon)\upsilon\right]^2-\frac{1}{b^2}\left[\Psi'(\upsilon)\upsilon\right]^2=0, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где введены обозначения

$$a=\frac{\beta-\alpha}{2\alpha\beta},\quad b=\frac{\alpha+\beta}{3\alpha\beta}.$$

Такого вида решения и соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений были получены и проанализированы ранее в работах [2, 3, 8]. Следовательно, все они являются инвариантными решениями системы уравнений (1.4) относительно однопараметрической группы преобразований, определяемой инфинитезимальным оператором (2.31).

Литература

[1] Радаев Ю.Н. О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1990. №1. С. 86–94.

[2] Радаев Ю.Н., Бахарева Ю.Н. К теории осесимметричной задачи математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2003. №4(30). С. 125–139.

[3] Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2004. 147 с.

[4] Аннин Б.Д., Бытев В.О., Сенашов С.И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985. 143 с.

[5] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

[6] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М: Мир, 1989. 639 с.

[7] Радаев Ю.Н. К теории трехмерных уравнений математической теории пластичности // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2003. №5. С. 102–120.

[8] Bahareva Y.N., Radayev Y.N. Self-similar solutions of axially-symmetric problem of the mathematical theory of plasticity / Books of Absracts. XXXII Summer School-Conference Advanced Problems in Mechanics. June 24–July 1, 2004, St. Petersburg (Repino), Russia. P. 24. http://www.eng.abdn.ac.uk/ apm

Поступила в редакцию 18/*VIII*/2004;
в окончательном варианте — 24/*IX*/2004.

ON SYMMETRY GROUPS OF THE AXIALLY-SYMMETRIC EQUATIONS OF THE MATHEMATICAL PLASTICITY

© 2004 Y.N. Radayev, V.A. Gudkov[4]

Group analysis of the system of partial differential equations of axially-symmetric plastic equilibrium is given. The Tresca yielding criterion s employed. It is presumed that stress state corresponds to an edge of the Tresca prism thus allowing to consider only the static equations. The static equilibrium equations are represented in the stress principal lines co-ordinate net (isostatic net). Their symmetry groups are obtained. Then the group invariant solutions of the system are determined. It is shown that by the standard group analysis all known from earlier discussions axially-symmetric solutions can be obtained. It is proved that the self-similar solution based on the representation of the self-similar variable as product of powers of isostatic co-ordinates appears as the group invariant solution of the system.

Paper received 18/*VIII*/2004.
Paper accepted 24/*IX*/2004.

[4]Radayev Yuri Nickolaevich (radayev@ssu.samara.ru), Gudkov Vasiliy Alexandrovich (goodkov@ssu.samara.ru), Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.