

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО В МЕХАНИКЕ РАСТУЩИХ ТЕЛ¹

© 2004 А.В. Манжиров,² М.Н. Михин³

В работе исследованы плоская задача и задача кручения для растущих вязкоупругих стареющих тел. Даны постановки этих задач. Предложены методы их решения с использованием подходов, развитых на основе теории функций комплексного переменного.

1. Плоская задача механики растущих тел

Пусть вязкоупругое однородное стареющее тело занимает плоскую многосвязную область Π_0 с границей L_0 и до момента загрузки τ_0 свободно от напряжений. От момента загрузки до момента наращивания τ_1 на участке границе $L_\sigma \subset L_0$ на тело действует самоуравновешенная нагрузка, а участок границы L^* , к которому предполагается добавлять новый материал, не загружается.

В момент времени $\tau_1 \geq \tau_0$ начинается непрерывное наращивание тела элементами, изготовленными одновременно с ним. В процессе роста тело занимает область $\Pi(t)$ с границей $L(t)$, которая состоит из двух участков: $L(t) = L_\sigma \cup L^*(t)$, где $L^*(t)$ — граница или кривая роста, к которой в рассматриваемый момент времени осуществляется приток материала, при этом $L^*(t) = L^*$ при $\tau < \tau_1$; $L_\sigma(t)$ — граница, на которой задана нагрузка.

Будем считать, что граница роста $L^*(t)$ не загружается в процессе наращивания. В этом случае задаваемый на ней полный тензор напряжений согласован с нулевыми внешними силами. Будем также считать, что момент приложения нагрузки к приращиваемым элементам $\tau_0(x_1, x_2)$ совпадает с моментом их присоединения к растущему телу $\tau^*(x_1, x_2)$.

В момент $\tau_2 \geq \tau_1$ наращивание пластины прекращается, и с этого момента оно занимает область $\Pi_1 = \Pi(\tau_2)$, ограниченную контуром $L_1 = L(\tau_2) = L_\sigma(\tau_2) \cup L^*(\tau_2)$.

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

²Манжиров Александр Владимирович (manzh@ipmnet.ru), лаборатория математического моделирования в механике деформируемого твердого тела Института проблем механики РАН, 119526, Россия, г. Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.

³Михин Михаил Николаевич (kashira_mgapi@mail.ru), кафедра высшей математики Московской государственной академии приборостроения и информатики, 107846, Россия, г. Москва, ул. Стромынка, 20.

Для определенности рассмотрим случай плоского напряженного состояния. Будем далее рассматривать достаточно медленные процессы такие, что в уравнениях равновесия можно пренебречь инерционными членами. Объемные силы положим равными нулю.

Краевая задача для основного (исходного) вязкоупругого однородного стареющего тела на интервале времени $[\tau_0, \tau_1]$ представляет собой традиционную задачу теории вязкоупругости.

Таким образом, имеем уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0; \quad (1.1)$$

краевое условие на границе L_σ

$$n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{12} = p_1, \quad n_1 \sigma_{12} + n_2 \sigma_{22} = p_2, \quad (1.2)$$

где n_1, n_2 — компоненты единичного вектора нормали; p_1, p_2 — компоненты вектора поверхностных сил;

краевое условие на границе L^*

$$n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{12} = 0, \quad n_1 \sigma_{12} + n_2 \sigma_{22} = 0; \quad (1.3)$$

соотношения Коши

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \quad (1.4)$$

уравнения состояния

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2G(I + N(\tau_0, t)) 2 \left(\frac{2K}{K+1} \varepsilon_{11} + \frac{K-1}{K+1} \varepsilon_{22} \right), \\ \sigma_{12} &= 2G(I + N(\tau_0, t)) \varepsilon_{12}, \\ \sigma_{22} &= 2G(I + N(\tau_0, t)) \left(\frac{K-1}{K+1} \varepsilon_{11} + \frac{2K}{K+1} \varepsilon_{22} \right), \\ (I - L(\tau_0, t)) &= (I + N(\tau_0, t))^{-1}, \quad 2G = \frac{E}{1+\nu}, \quad K = \frac{1}{1-2\nu}, \\ L(\tau_0, t) f(t) &= \int_{\tau_0}^t f(\tau) K_1(t, \tau) d\tau, \\ K_1(t, \tau) &= G(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[G^{-1}(t) + \omega(t, \tau) \right], \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2, t)$ — компоненты тензора напряжений, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_1, x_2, t)$ — компоненты тензора деформации, $u_i = u_i(x_1, x_2, t)$ — компоненты вектора перемещений ($i, j = 1, 2$), $E = E(t)$ и $G = G(t)$ — модули упругомгновенной деформации при растяжении и сдвиге, $\omega(t, \tau)$ — мера ползучести при сдвиге, $K_1(t, \tau)$ — ядро ползучести при сдвиге, коэффициенты Пуассона упругомгновенной деформации и деформации ползучести совпадают и равны ν , I — тождественный оператор. Выше, в ряде очевидных случаев аргументы опущены. Будем опускать их и далее, воспроизводя лишь в случаях, когда их отсутствие может затруднить понимание.

Полагая

$$\sigma^0 = (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0, t)) \sigma G^{-1},$$

преобразуем краевую задачу (1.1)–(1.4) к удобному для исследования виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}^0}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial x_2} &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^0}{\partial x_2} = 0, \\ (x_1, x_2) \in L_\sigma : \quad n_1 \sigma_{11}^0 + n_2 \sigma_{12}^0 &= (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0, t)) p_1 G^{-1} = p_1^0, \\ n_1 \sigma_{12}^0 + n_2 \sigma_{22}^0 &= (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0, t)) p_2 G^{-1} = p_2^0, \\ (x_1, x_2) \in L^* : \quad n_1 \sigma_{11}^0 + n_2 \sigma_{12}^0 &= 0, \quad n_1 \sigma_{12}^0 + n_2 \sigma_{22}^0 = 0, \\ e_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \\ \sigma_{11}^0 &= 2G \left(\frac{2K}{K+1} \varepsilon_{11} + \frac{K-1}{K+1} \varepsilon_{22} \right), \\ \sigma_{22}^0 &= 2G \left(\frac{K-1}{K+1} \varepsilon_{11} + \frac{2K}{K+1} \varepsilon_{22} \right), \\ \sigma_{12}^0 &= 2G \varepsilon_{12}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

В краевой задаче (1.6) время входит параметрически, и она математически эквивалентна краевой задаче теории упругости с некоторым параметром t .

Решив (1.6), восстановим истинные напряжения по формуле

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, t) = G(t) \left[\sigma_{ij}(x_1, x_2, t) + \int_{\tau_0}^t \sigma_{ij}^0(x_1, x_2, t) R_1(t, \tau) d\tau \right], \tag{1.7}$$

где $R_1(t, \tau)$ — резольвента ядра $K_1(t, \tau)$.

Заметим, что для решения (1.6) могут быть использованы эффективные в плоской теории упругости методы теории функций комплексного переменного, к которым мы обратимся далее.

Рассмотрим теперь непосредственно процесс наращивания деформируемого тела на интервале времени $t \in [\tau_1, \tau_2]$. Для растущего тела имеем [1–4]: уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0; \tag{1.8}$$

краевое условие на неподвижной части границы $L_\sigma(t)$

$$n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{12} = p_1, \quad n_1 \sigma_{12} + n_2 \sigma_{22} = p_2; \tag{1.9}$$

начально-краевое условие на границе роста $L^*(t)$, где задается полный тензор напряжений

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, t) = \sigma_{ij}^*(x_1, x_2) \quad (t = \tau^*(x_1, x_2)), \tag{1.10}$$

который согласован с нулевыми внешними силами, т.е.

$$n_1 \sigma_{11}^* + n_2 \sigma_{12}^* = 0, \quad n_1 \sigma_{12}^* + n_2 \sigma_{22}^* = 0; \tag{1.11}$$

соотношения между скоростями деформации и перемещений

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \quad D_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \quad D_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right), \\ v_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad v_2 = \frac{\partial u_2}{\partial t}, \quad D_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}; \end{aligned} \quad (1.12)$$

уравнения состояния в форме

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2G(I + N(\tau_0, t)) \left(\frac{2K}{K+1} \varepsilon_{11} + \frac{K-1}{K+1} \varepsilon_{22} \right), \\ \sigma_{12} &= 2G(I + N(\tau_0, t)) \varepsilon_{12}, \\ \sigma_{22} &= 2G(I + N(\tau_0, t)) \left(\frac{K-1}{K+1} \varepsilon_{11} + \frac{2K}{K+1} \varepsilon_{22} \right), \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\tau_0(x_1, x_2) = \begin{cases} \tau_0, & (x_1, x_2) \in \Pi_0, \\ \tau^*(x, y), & (x_1, x_2) \in \Pi(t) \setminus \Pi_0. \end{cases} \quad (1.14)$$

Соотношения (1.8)–(1.14) представляют собой начально-краевую задачу для непрерывно растущего тела, операторы $(I + N(\tau_0(x_1, x_2), t))$ и $(I - L(\tau_0(x_1, x_2), t))$ определяются из уравнения (1.5) заменой τ_0 на $\tau_0(x_1, x_2)$.

Отличительными особенностями начально-краевой задачи для нарастающего тела (1.8)–(1.14), выводящими ее за рамки классических задач механики деформируемого твердого тела, являются специфическое начально-краевое условие на поверхности роста; нарушение условия совместности деформаций в области, занимаемой дополнительным телом, и выполнение лишь его аналога и аналога соотношений Коши в скоростях соответствующих величин (это обстоятельство позволяет учитывать тот факт, что приращиваемые элементы до момента присоединения к основному телу могут подвергаться деформирующим воздействиям независимо от процессов, протекающих в самом теле); зависимость определяющих соотношений от функции $\tau_0(x, y)$, которая может иметь разрывы первого рода.

Представим уравнение границы роста $L^*(t)$ при $t = \tau_1$ ($L^*(\tau_1) = L^*$) в виде $\tau^*(x_1, x_2)\tau_1^{-1} - 1 = 0$, где $\tau^*(x_1, x_2)\tau_1^{-1} - 1 < 0$ при $(x_1, x_2) \in \Pi_0$ и $\tau^*(x_1, x_2)\tau_1^{-1} - 1 \geq 0$ при $(x_1, x_2) \in \Pi(t) \setminus \Pi_0$. Будем считать, что $\tau^*(x_1, x_2)$ — достаточно гладкая функция и $\nabla \tau^*(x_1, x_2) \neq 0$ при $\tau^*(x_1, x_2)\tau_1^{-1} - 1 = 0$. Введем характеристическую функцию $h(\tau^*(x_1, x_2)\tau_1^{-1} - 1)$, равную единице в случае, когда ее аргумент больше либо равен нулю, и равную нулю при отрицательном аргументе [5]. Теперь оператор $(I - L(\tau_0(x_1, x_2), t))$ запишем в виде

$$\begin{aligned} (I - L(\tau_0(x_1, x_2), t)) f(t) &= (I - L(\tau^0(x_1, x_2), t)) f(t) - \\ &- \left[1 - h(\tau^*(x_1, x_2)\tau_1^{-1} - 1) \right] L^t(\tau_0, \tau_1) f(t), \\ L^t(\tau_0, \tau_1) f(t) &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\tau) K_1(t, \tau) d\tau, \\ \tau^0(x_1, x_2) &= \tau_1 + h(\tau^*(x_1, x_2)\tau_1^{-1} - 1)(\tau^*(x_1, x_2) - \tau_1). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Поддействуем оператором (1.15) на соотношения (1.8)–(1.14), содержащие напряжения σ_{12} , σ_{11} и σ_{22} , предварительно разделив на G . Учитывая обо-

значения $\sigma^0 = (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0, t))\sigma G^{-1}$, будем иметь

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}^0}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial x_2} &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^0}{\partial x_2} = 0, \\
(x_1, x_2) \in L_\sigma: \quad n_1 \sigma_{11}^0 + n_2 \sigma_{12}^0 &= (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0, t)) p_1 G^{-1} = p_1^0, \\
n_1 \sigma_{12}^0 + n_2 \sigma_{22}^0 &= (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0, t)) p_2 G^{-1} = p_2^0, \\
(x_1, x_2) \in L^*(t) : \quad \sigma_{ij}^0(x_1, x_2, t) &= \sigma_{ij}^*(x_1, x_2) G^{-1}(x_1, x_2)(t = \tau^*(x_1, x_2)), \\
n_1 \sigma_{11}^0 + n_2 \sigma_{12}^0 &= 0, \quad n_1 \sigma_{12}^0 + n_2 \sigma_{22}^0 = 0, \\
D_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \quad D_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \quad D_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right), \\
\sigma_{11}^0 = 2G \left(\frac{2K}{K+1} \varepsilon_{11} + \frac{K-1}{K+1} \varepsilon_{22} \right) &= \\
= 2G \left(\frac{K-1}{K+1} \varepsilon_{11} + \frac{2K}{K+1} \varepsilon_{22} \right), \quad \sigma_{12}^0 &= 2G \varepsilon_{12}.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Дифференцируя по t уравнения равновесия, граничное условие на $L_\sigma(t)$ и уравнения состояния из (1.16), а также действуя оператором дивергенции на начально-краевое условие, краевую задачу для растущего тела приведем к виду

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_2} &= 0, \quad \frac{\partial S_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{22}}{\partial x_2} = 0, \\
(x_1, x_2) \in L_\sigma: \quad n_1 S_{11} + n_2 S_{12} &= R p_1 = q_1, \\
n_1 S_{12} + n_2 S_{22} &= R p_2 = q_2, \\
(x_1, x_2) \in L^*(t) : \quad n_1 S_{11} + n_2 S_{12} &= \left(\frac{\partial \sigma_{11}^*}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}^*}{\partial x_2} \right) \times \\
&\quad \times G^{-1}(\tau^*(x_1, x_2)) \left| \nabla \tau^*(x_1, x_2) \right|^{-1}, \\
n_1 S_{12} + n_2 S_{22} &= \left(\frac{\partial \sigma_{12}^*}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^*}{\partial x_2} \right) \times \\
&\quad \times G^{-1}(\tau^*(x_1, x_2)) \left| \nabla \tau^*(x_1, x_2) \right|^{-1}, \\
S_{11} &= 2 \left(\frac{2K}{K+1} D_{11} + \frac{K-1}{K+1} D_{22} \right), \\
S_{22} &= 2 \left(\frac{K-1}{K+1} D_{11} + \frac{2K}{K+1} D_{22} \right), \\
S_{12} &= 2D_{12}, \quad S_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial t},
\end{aligned} \tag{1.17}$$

где оператор $\mathbf{R}$ определяется выражением

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}f(x_1, x_2, t) &= \frac{1}{G(t)} \frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial t} + \int_{\tau_0(x_1, x_2)}^t \frac{\partial f(x_1, x_2, t)}{\partial \tau} \frac{\partial \omega(t, \tau)}{\partial t} d\tau + \\
&+ f(x_1, x_2, \tau_0(x_1, x_2)) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(x_1, x_2))}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Краевая задача (1.17) совпадает по форме с краевой задачей теории упругости с параметром t . Ее решение может быть построено любым эффективным в теории упругости аналитическим или численным методом. Решение исходной начально-краевой задачи наращивания вязкоупругого стареющего тела (1.8)–(1.14) при $t \in [\tau_1, \tau_2]$ можно восстановить затем по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x_1, x_2, t) = G(t) & \left\{ \frac{\sigma_{ij}(x_1, x_2, \tau_0(x_1, x_2))}{G(\tau_0(x_1, x_2))} \left[1 + \int_{\tau_0(x_1, x_2)}^t R(t, \tau) d\tau \right] + \right. \\ & + \left. \int_{\tau_0(x_1, x_2)}^t \left[S_{ij}(x_1, x_2, \tau) + \int_{\tau_0(x_1, x_2)}^{\tau} S_{ij}(x_1, x_2, \zeta) d\zeta R(t, \tau) \right] d\tau \right\}, \quad (1.18) \\ u_i(x_1, x_2, t) = u_i(x_1, x_2, \tau_0(x_1, x_2)) & + \int_{\tau_0(x_1, x_2)}^t v_i(x_1, x_2, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Основные соотношения задачи для тела, наращивание которого прекращено, имеют вид (1.8)–(1.14), где отсутствует условие на границе роста. Она приводится к виду (1.17), причем формулы, по которым восстанавливаются истинные характеристики напряженно-деформированного состояния, сохраняют вид (1.18).

Изложение основной, оригинальной части метода решения плоской задачи для растущего тела завершено. Краевые задачи для всех основных этапов эволюции тела приведены к краевым задачам, совпадающим по форме с краевыми задачами теории упругости с некоторым параметром. Для исследования последних применим методы теории функций комплексного переменного.

Поскольку краевые задачи на всех этапах математически совершенно идентичны (см., например, (1.6) и (1.17)), рассмотрим только краевую задачу (1.17). Для ее решения выразим напряжения через функцию Эри $U(x_1, x_2, t)$ [6]:

$$S_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}, \quad S_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}, \quad S_{12} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (1.19)$$

которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta \Delta U = \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial x_2^4} = 0,$$

т.е. является бигармонической функцией.

Как известно, любую бигармоническую функцию можно представить с помощью аналитических функций комплексного переменного [6]:

$$U = \frac{1}{2} \left(z\varphi_1(z, t) + \overline{z\varphi_1(z, t)} + \chi_1(z, t) + \overline{\chi_1(z, t)} \right). \quad (1.20)$$

Тогда комплексное представление величин S_{ij} имеет вид

$$S_{11} + S_{22} = 4 \operatorname{Re}(\varphi_1(z, t))', \quad S_{22} - S_{11} + 2iS_{12} = 2(\bar{z}\varphi_1''(z, t) + \psi'(z, t)), \quad (1.21)$$

$$\psi(z, t) = \chi'_1(z, t),$$

где штрихом обозначено дифференцирование по z .

Для величин v_i комплексное представление запишем в форме

$$2(v_1 + iv_2) = \frac{5K+1}{3K-1} \varphi_1(z, t) - \overline{z\varphi_1(z, t)} - \overline{\psi(z, t)}. \quad (1.22)$$

Таким образом, S_{ij} и v_i выражаются через две аналитические функции комплексного переменного.

Краевое условие можно представить в виде

$$\varphi_1(z, t) + \overline{z\varphi'_1(z, t)} + \overline{\psi(z, t)} = f,$$

где $f = i(T_1 + T_2)$, причем T_1 и T_2 — заданные на контуре функции.

В случае бесконечной области $\Pi(t)$, ограниченной простым замкнутым контуром $L(t)$ (например, бесконечная плоскость с отверстием), справедливы формулы

$$\begin{aligned} \varphi_1(z, t) &= -\frac{T_1 + iT_2}{2\pi} \frac{K-1}{8K} \ln z + \Gamma z + \varphi_{1,0}(z, t), \\ \psi_1(z, t) &= -\frac{T_1 + iT_2}{2\pi} \frac{5K+1}{8K} \ln z + \Gamma' z + \psi_{1,0}(z, t), \end{aligned} \quad (1.23)$$

где Γ и Γ' — комплексные постоянные, определяющие распределения напряжений на бесконечности и вращение на бесконечности, $\varphi_{1,0}(z, t)$ и $\psi_{1,0}(z, t)$ — функции, аналитические в области $|z| \geq R$, включая бесконечно удаленную точку.

Во многих приложениях необходимо иметь выражения искомых функций в ортогональной системе координат, которая определяется с помощью конформного отображения $z = \omega(\zeta, t)$ ($\zeta = \rho e^{i\theta}$). В этом случае будем иметь

$$\begin{aligned} S_{\rho\rho}(\zeta, t) + S_{\theta\rho}(\zeta, t) &= 4Re(\varphi_1(\zeta, t))', \\ S_{\theta\rho}(\zeta, t) - S_{\rho\rho}(\zeta, t) + 2iS_{\theta\theta}(\zeta, t) &= \\ &= \frac{2\zeta^2}{p^2\omega'(\zeta, t)} \left[\overline{\omega(\zeta, t)\varphi'_1(\zeta, t)} + \omega'(\zeta, t)\psi'(\zeta, t) \right], \\ 2(v_\rho(\zeta, t) + iv_\theta(\zeta, t)) &= \\ &= \frac{\overline{\zeta\omega'(\zeta, t)}}{|\omega'(\zeta, t)|} \left[\frac{5K+1}{3K-1} \varphi(\zeta, t) - \frac{\omega(\zeta, t)}{\overline{\omega'(\zeta, t)}} \overline{\varphi'(\zeta, t)} - \overline{\psi(\zeta, t)} \right]. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Поскольку во многих задачах рассматриваемая область отображается на единичный круг (или на плоскость с выброшенным единичным кругом), то приведем следующие полезные формулы:

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta, t) &= \varphi_1(z, t) = -\frac{T_1 + iT_2}{2\pi} \frac{3K-1}{8K} \ln \zeta + \frac{\Gamma c(t)}{\zeta} + \varphi_0(\zeta, t), \\ \psi(\zeta, t) &= \psi_1(z, t) = -\frac{T_1 - iT_2}{2\pi} \frac{5K+1}{8K} \ln \zeta + \frac{\Gamma' c(t)}{\zeta} + \psi_0(\zeta, t), \end{aligned} \quad (1.25)$$

где $\varphi_0(\zeta, t)$ и $\psi_0(\zeta, t)$ — функции, аналитические внутри и непрерывные вплоть до границы круга. Функции $\varphi_0(\zeta, t)$ и $\psi_0(\zeta, t)$ удовлетворяют тем

же уравнениям, что и функции $\varphi(\zeta, t)$ и $\psi(\zeta, t)$, если везде функцию f заменить функцией

$$f_0 = f - \frac{T_1 + iT_2}{2\pi} \ln \sigma - \frac{\Gamma c(t)}{\sigma} - \frac{\omega(\sigma, t)}{\omega'(\sigma, t)} \left(\frac{T_1 - iT_2}{2\pi} \frac{3K-1}{8K} \sigma - \Gamma \overline{c(t)} \sigma^2 \right) - \Gamma' \overline{c(t)} \sigma.$$

Таким образом, отыскав две гармонические функции по краевым условиям, можно найти искомые функции S_{ij} и v_i , и затем по формулам (1.18) восстановить истинные значения напряжений и перемещений в растущем теле.

Решение каждой конкретной задачи наращивания деформируемых тел представляет собой самостоятельную и трудоемкую проблему. Однако уже сейчас по виду полученных математических соотношений можно предсказать такие органические присущие растущим телам явления, как возникновение остаточных напряжений после снятия нагрузок, появление в наращиваемом теле поверхностей разрыва напряжений, зависимость напряженно-деформированного состояния вязкоупругих тел от скорости и способа их наращивания. В качестве примера возможных приложений теории отметим задачи о зарастании различных отверстий в пластинах.

2. Кручение растущих тел

Рассмотрим однородное вязкоупругое стареющее тело, изготовленное в нулевой момент времени, занимающее некоторую цилиндрическую область Π_0 . В момент приложения нагрузки τ_0 к торцам цилиндрического тела прикладываются усилия, статически эквивалентные паре с моментом $M(t)$. Боковая поверхность тела Π_0 свободна от напряжений. В момент времени $\tau_1 \geq \tau_0$ начинается непрерывное наращивание тела элементами, изготовленными одновременно с ним. При этом новые приращиваемые элементы не напряжены. Обозначим через $L(t)$ границу поперечного сечения $\Omega(t)$, которая изменяется с течением времени, при этом $L(\tau_0) = L_0$ и $\Omega(\tau_0) = \Omega_0$. Будем считать, что момент приложения нагрузки к приращиваемым элементам $\tau_0(x_1, x_2)$ совпадает с моментом их присоединения к растущему телу $\tau^*(x_1, x_2)$. В момент $\tau_2 \geq \tau_1$ наращивание тела прекращается, и с этого момента оно занимает область $\Pi_1 = \Pi(\tau_2)$ с поперечным сечением $\Omega_1 = \Omega_1(\tau_2)$, имеющим границу $L_1 = L(\tau_2)$. Заметим, что всюду далее рассматриваются достаточно медленные процессы, такие, что в уравнениях равновесия можно пренебречь инерционными членами.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние вязкоупругого стареющего тела на интервале времени $t \in [\tau_0, \tau_1]$. Имеем следующую краевую задачу (см., например, [1–3]):
уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0; \quad (2.1)$$

соотношения Коши

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = 0, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right);\end{aligned}\tag{2.2}$$

краевое условие на боковой поверхности

$$(x_1, x_2) \in L_0 : \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 = 0;\tag{2.3}$$

уравнения состояния:

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= 2G(\mathbf{I} + \mathbf{N}(\tau_0, t))\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23} = 2G(\mathbf{I} + \mathbf{N}(\tau_0, t))\varepsilon_{23}, \\ (\mathbf{I} + \mathbf{N}(\tau_0, t))^{-1} &= (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0, t)), \quad L(\tau_0, t)f(t) = \int_{\tau_0}^t f(\tau)K_1(t, \tau)d\tau, \\ K_1(t, \tau) &= G(\tau)\frac{\partial}{\partial \tau} [G^{-1}(\tau) + \omega(t, \tau)].\end{aligned}\tag{2.4}$$

Кроме того, должны выполняться условия равновесия торцевых сечений

$$\iint_{\Omega} \sigma_{13}dx_1dx_2 = \iint_{\Omega} \sigma_{23}dx_1dx_2 = 0,\tag{2.5}$$

$$M(t) = \iint_{\Omega} (x_1\sigma_{23} - x_2\sigma_{13})dx_1dx_2.\tag{2.6}$$

Преобразуем краевую задачу для основного тела. Для этого выражения (2.1)–(2.6), содержащие напряжения σ_{13} , σ_{23} , разделим на G и подействуем на них оператором $(\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0, t))$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{13}^0}{\partial x_3} &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{23}^0}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{13}^0}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}^0}{\partial x_2} = 0, \\ \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = 0, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right); \\ (x_1, x_2) \in L_0 &: \sigma_{13}^0 n_1 + \sigma_{23}^0 n_2 = 0, \\ \sigma_{13}^0 &= 2\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23}^0 = 2\varepsilon_{23},\end{aligned}\tag{2.7}$$

причем σ_{ij}^0 и σ_{ij} связаны соотношением

$$\sigma_{ij}^0 = (\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0, t))\sigma_{ij}G^{-1},\tag{2.8}$$

В краевую задачу (2.7) в отличие от задачи (2.1)–(2.4) время входит параметрически, и она математически эквивалентна краевой задаче теории упругости с некоторым параметром t .

Для компонент перемещений положим [6, 7]:

$$u_1 = -\theta(t) x_2 x_3, \quad u_2 = \theta(t) x_3 x_1, \quad u_3 = \theta(t) \varphi(x_1, x_2, \tau_0), \quad (2.9)$$

где $\varphi(x_1, x_2, \tau_0)$ — некоторая функция от переменных x_1 и x_2 , подлежащая определению. Она называется функцией кручения и характеризует искривление поперечных сечений. А $\theta(t)$ является углом закручивания (круткой). Таким образом, получим

$$\sigma_{13}^0 = \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2 \right), \quad \sigma_{23}^0 = \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1 \right). \quad (2.10)$$

Функция кручения $\varphi(x_1, x_2, \tau_0)$ является гармонической функцией в области Ω_0 . Она должна удовлетворять краевому условию

$$(x_1, x_2) \in L_0 : \frac{\partial \varphi}{\partial n} = x_2 n_1 - x_1 n_2.$$

Таким образом, решение задачи кручения при помощи функции кручения $\varphi(x_1, x_2, \tau_0)$ сведено к определению в области поперечного сечения Ω_0 гармонической функции $\varphi(x_1, x_2, \tau_0)$ по заданному значению ее нормальной производной на контуре L_0 (задача Неймана).

Учитывая, что

$$x_1 \sigma_{23}^0 - x_2 \sigma_{13}^0 = \theta(t) \left(x_1^2 + x_2^2 + x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right),$$

соотношение (2.6) примет вид:

$$M^0(t) = \theta(t) D, \quad D = \iint_{\Omega_0} \left(x_1^2 + x_2^2 + x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2, \quad (2.11)$$

где коэффициент пропорциональности D называется жесткостью при кручении. Он зависит только от формы сечения.

Рассмотрим два возможных варианта постановки задачи:

- 1) задан момент $M(t)$, а требуется определить напряжения σ_{ij} , перемещения u_i и крутку $\theta(t)$,
- 2) задана крутка $\theta(t)$, а требуется определить σ_{ij} , u_i и момент $M(t)$.

Решение для первого варианта постановки можно построить следующим образом:

- по краевому условию определим функцию $\varphi(x_1, x_2, \tau_0)$,
- по формулам (2.11) найдем $\theta(t)$,
- по формулам (2.9) и (2.10) найдем u_i и σ_{ij}^0 ,
- наконец, истинные напряжения σ_{ij} восстановим по формуле

$$\sigma_{ij}(x, t) = G(t) \left[\sigma_{ij}^0(x, t) + \int_{\tau_0}^t \sigma_{ij}^0(x, \tau) R_1(t, \tau) d\tau \right], \quad (2.12)$$

где $R_1(t, \tau)$ — резольвента ядра $K_1(t, \tau)$.

Для второго варианта постановки:

- определим $\varphi(x_1, x_2, \tau_0)$,
- найдем u_i и σ_{ij}^0 по формулам (2.9) и (2.10),
- восстановим σ_{ij} при помощи (2.12),
- определим $M(t)$ на основании (2.6).

Иногда удобно исследовать задачу для основного тела в скоростях соответствующих величин, что обусловлено использованием информации об этих скоростях для решения задачи на этапе наращивания. Не останавливаясь подробно на этом вопросе, приведем лишь основные соотношения задачи для основного тела в скоростях. Для этого продифференцируем по t (здесь и всюду далее будем понимать дифференцирование в смысле обобщенных функций) соотношения (2.7). Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_{13}}{\partial x_3} &= 0, \quad \frac{\partial S_{23}}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial S_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{23}}{\partial x_2} = 0, \\
D_{11} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0, \quad D_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \quad D_{33} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0, \\
D_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = 0, \quad D_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right), \\
D_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right); \\
(x_1, x_2) &\in L_0 : S_{13}n_1 + S_{23}n_2 = 0, \\
S_{13} &= 2\varepsilon_{13}, \quad S_{23} = 2\varepsilon_{23}, \\
S_{ij} &= \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial t}, \quad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad D_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Для величин v_1 и S_{ij} справедливы формулы

$$v_1 = -\dot{\theta}(t) x_2 x_3, \quad v_2 = \dot{\theta}(t) x_3 x_1, \quad v_3 = \dot{\theta}(t) \varphi(x_1, x_2, \tau_0), \tag{2.14}$$

$$S_{13} = \dot{\theta}(t) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2 \right), \quad S_{23} = \dot{\theta}(t) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1 \right),$$

где точка обозначает дифференцирование по t . Будем использовать это обозначение в дальнейшем.

Продифференцированное соотношение (2.11) примет вид

$$\begin{aligned}
\dot{M}^0(t) &= \dot{\theta}(t) D, \quad \dot{M}^0(t) = \frac{\dot{M}(t)}{G(t)} + \\
&+ \int_{\tau_0}^t \frac{\partial M(t)}{\partial \tau} \frac{\partial \omega(t, \tau)}{\partial t} d\tau + M(\tau_0) \frac{\partial \omega(t, \tau_0)}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Истинные напряжения, перемещения и крутка в исходном теле могут быть

восстановлены по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x_1, x_2, t) &= G(t) \left\{ \frac{\sigma_{ij}(x_1, x_2, \tau_0)}{G(\tau_0)} \left[1 + \int_{\tau_0}^t R(t, \tau) d\tau \right] + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tau_0}^t \left[S_{ij}(x_1, x_2, \tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} S_{ij}(x_1, x_2, \zeta) d\zeta R_{ij}(t, \tau) \right] d\tau \right\}, \\ u(x_1, x_2, t) &= u(x_1, x_2, \tau_0) + \int_{\tau_0}^t v(x_1, x_2, \tau) d\tau, \\ \theta(t) &= \theta(\tau_0) + \int_{\tau_0}^t \dot{\theta}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Легко видеть, что для решения краевой задачи в скоростях (2.13)–(2.15) может быть использован рассмотренный выше метод, а оба варианта постановки задачи могут быть решены аналогично предыдущему с учетом формул (2.16).

Рассмотрим теперь непосредственно процесс непрерывного наращиваемого деформируемого тела $t \in [\tau_1, \tau_2]$. Для растущего тела имеем [1–4, 8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} &= 0, \\ D_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right), \quad D_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right), \\ (x_1, x_2) \in L(t) : \sigma_{13} &= 2G(\mathbf{I} + \mathbf{N}(\tau_0(x_1, x_2), t))_{13}^e, \\ \sigma_{23} &= 2G(\mathbf{I} + \mathbf{N}(\tau_0(x_1, x_2), t))_{23}^e, \\ \sigma_{13} &= \sigma_{13}^* = 0, \quad \sigma_{23} = \sigma_{23}^* = 0 \quad (t = \tau^*(x_1, x_2)), \\ D_{ij} &= \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}, \quad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \\ \tau_0(x_1, x_2) &= \begin{cases} \tau_0, & (x_1, x_2) \in \Omega_0, \\ \tau^*(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega(t) \setminus \Omega_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.17)$$

где оператор $(\mathbf{I} - \mathbf{L}(\tau_0(x_1, x_2), t))$ и обратный к нему $(\mathbf{I} + \mathbf{N}(\tau_0(x_1, x_2), t))$ определяется из (2.4) заменой τ_0 на $\tau_0(x_1, x_2)$; $\sigma_{13}^*(x_1, x_2) = \sigma_{13}(x_1, x_2, \tau^*(x_1, x_2))$ и $\sigma_{23}^*(x_1, x_2) = \sigma_{23}(x_1, x_2, \tau^*(x_1, x_2))$ — компоненты задаваемого на $L(t)$ полного тензора напряжений, удовлетворяющих условию

$$(x_1, x_2) \in L(t) : \sigma_{13}^*(x_1, x_2) n_1 + \sigma_{23}^*(x_1, x_2) n_2 = 0. \quad (2.19)$$

Заметим, что исследуемый процесс наращивания новыми элементами в общем случае приводит к определяющим соотношениям, содержащим разрывы на поверхности раздела основного и дополнительных тел. Поэтому применим подход, являющийся эффективным в задачах данного класса [5]. Для этого представим уравнение растущей границы $L(t)$ при $t = \tau_1$ в виде $\tau^*(x_1, x_2) \tau_1^{-1} - 1 = 0$, где $\tau^*(x_1, x_2) \tau_1^{-1} - 1 < 0$ при

$(x_1, x_2) \in L_0$ и $\tau^*(x_1, x_2)\tau_1^{-1} - 1 \geq 0$ при $(x_1, x_2) \in L(t) \setminus L_0$. Будем считать, что $\tau^*(x_1, x_2)$ — достаточно гладкая функция, такая, что $\nabla \tau^*(x_1, x_2) \neq 0$ при $\tau^*(x_1, x_2)\tau_1^{-1} - 1 = 0$. Введем характеристическую функцию $h(\tau^*(x_1, x_2)\tau_1^{-1} - 1)$, равную единице в случае, когда ее аргумент больше либо равен нулю, и равную нулю при отрицательном аргументе [5]. Теперь оператор $(I - L(\tau_0(x_1, x_2), t))$ запишем в виде

$$\begin{aligned} (I - L(\tau_0(x_1, x_2), t))f(t) &= (I - L(\tau^0(x_1, x_2), t))f(t) - \\ &- [1 - h(\tau^*(x_1, x_2)\tau_1^{-1} - 1)]L^t(\tau_0, \tau_1)f(t), \\ L^t(\tau_0, \tau_1)f(t) &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\tau)K_1(t, \tau)d\tau, \\ \tau^0(x_1, x_2) &= \tau_1 + h(\tau^*(x_1, x_2)\tau_1^{-1} - 1)(\tau^*(x_1, x_2) - \tau_1). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Поддействуем оператором (2.20) на соотношения (2.17), содержащие напряжения σ_{13} , σ_{23} , предварительно разделив на G . Учитывая обозначения

$$\sigma^0 = (I - L(\tau_0, t))\sigma G^{-1},$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{13}^0}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}^0}{\partial x_2} &= 0, \\ D_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right), \quad D_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right), \\ \sigma_{13}^0 &= 2\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23}^0 = 2\varepsilon_{23}, \\ (x_1, x_2) \in L(t) : \sigma_{13}^0 &= \sigma_{13}^{0*} = \sigma_{13}^* G^{-1} = 0, \\ \sigma_{23}^0 &= \sigma_{23}^{0*} = \sigma_{23}^* G^{-1} = 0, \quad \sigma_{13}^* n_1 + \sigma_{23}^* n_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Преобразуем начально-краевую задачу (2.21) к краевой задаче относительно скоростей деформации, скоростей перемещений и скоростей операторных напряжений. Для этого продифференцируем по t уравнение равновесия и уравнения состояния. Для вывода граничного условия на $L(t)$ поддействуем оператором дивергенции на начально-краевое условие на поверхности роста.

В итоге получим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{23}}{\partial x_2} &= 0, \\ D_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right), \quad D_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right), \\ (x_1, x_2) \in L(t) : n_1 S_{13} + n_2 S_{23} &= 0, \\ S_{13} = 2D_{13}, \quad S_{23} = 2D_{23}, \quad S_{ij} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Для величин S_{ij} и v_i справедливы формулы, получаемые из (2.14) заменой аргумента τ_0 функции φ на t :

$$v_1 = -\dot{\theta}(t)x_2x_3, \quad v_2 = \dot{\theta}(t)x_3x_1, \quad v_3 = \dot{\theta}(t)\varphi(x_1, x_2, t). \quad (2.23)$$

$$S_{13} = \dot{\theta}(t) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2 \right), \quad S_{23} = \dot{\theta}(t) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1 \right).$$

Функция $\varphi(x_1, x_2, t)$ является гармонической в области $\Omega(t)$ и удовлетворяет краевому условию

$$(x_1, x_2) \in L(t) : \frac{\partial \varphi}{\partial n} = x_2 n_1 - x_1 n_2.$$

Крутящий момент для растущего тела выражается формулой

$$M(t) = \iint_{\Omega(t)} (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13}) dx_1 dx_2. \quad (2.24)$$

Можно показать, что при условии отсутствия натяга приращиваемых элементов

$$\dot{M}^0(t) = \iint_{\Omega(t)} (x_1 S_{23} - x_2 S_{13}) dx_1 dx_2, \quad (2.25)$$

где s_n — скорость движения поверхности по нормали.

Очевидно, что с учетом (2.23) и (2.25)

$$\dot{M}^0(t) = \dot{\theta}(t) D(t), \quad D(t) = \iint_{\Omega(t)} (x_1^2 + x_2^2 + x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}) dx_1 dx_2, \quad (2.26)$$

где $D(t)$ — переменная жесткость растущего тела при кручении, $\varphi(x_1, x_2, t)$ — искомая гармоническая функция (см. также (2.15)).

На этапе роста скручиваемого тела также возможны два указанных ранее варианта постановки задачи.

Для решения первого варианта постановки задачи (когда задан крутящий момент $M(t)$) следует:

- по краевому условию найти $\varphi(x_1, x_2, t)$,
- по формулам (2.26) найти скорость крутки,
- затем найти величины v_i и S_{ij} по формулам (2.23),
- восстановить истинные напряжения, перемещения и крутку по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x_1, x_2, t) &= G(t) \left\{ \frac{\sigma_{ij}(x_1, x_2, \tau_0(x_1, x_2))}{G(\tau_0(x_1, x_2))} \left[1 + \int_{\tau_0(x_1, x_2)}^t R(t, \tau) d\tau \right] + \right. \\ &+ \left. \int_{\tau_0(x_1, x_2)}^t \left[S_{ij}(x_1, x_2, \tau) + \int_{\tau_0(x_1, x_2)}^{\tau} S_{ij}(x_1, x_2, \zeta) d\zeta R(t, \tau) \right] d\tau \right\}, \\ u_i(x_1, x_2, t) &= u_i(x_1, x_2, \tau_0(x_1, x_2)) + \int_{\tau_0(x_1, x_2)}^t v_i(x_1, x_2, \tau) d\tau, \\ \theta(t) &= \dot{\theta} + \int_{\tau_0(x_1, x_2)}^t \theta(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Для решения второго варианта постановки задачи (когда задана крутка $\theta(t)$) необходимо:

- найти $\varphi(x_1, x_2, t)$,
- определить v_i и S_{ij} по формулам (2.23),
- восстановить u_i и σ_{ij} по формулам (2.27),
- найти величину момента по формуле (2.24).

Таким образом, задача кручения растущего тела на этапе его непрерывного наращивания исследована.

Рассмотрим теперь этап кручения тела после остановки роста. Пусть в момент времени τ_2 наращивание тела прекращается. В этот момент оно занимает область Π_1 с поперечным сечением Ω_1 , ограниченным контуром L_1 . В этом случае получаем задачу, аналогичную (2.13). В данном случае для величин v_i и S_{ij} применимы формулы (2.14), в которых необходимо заменить τ_0 на τ_2 . Напряжения, перемещения и крутка в этом случае отыскиваются по формулам (2.27).

На этом завершено изложение основной части метода решения задачи кручения наращиваемого вязкоупругого стареющего тела. В итоге неклассические краевые задачи приведены к известным краевым задачам, содержащим некоторый параметр. По найденным решениям последних полностью восстанавливается напряженно-деформированное состояние тела при помощи представленных формул расшифровки (2.27).

Для решения классических краевых задач с параметром применим методы теории функций комплексного переменного.

Введем в рассмотрение сопряженную с $\varphi(x_1, x_2, t)$ гармоническую функцию $\psi(x_1, x_2, t)$, связанную с ней условиями Коши—Римана [5]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}.$$

Граничное условие для функции $\psi(x_1, x_2, t)$ примет вид

$$(x_1, x_2) \in L(t) : \psi = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + C(t),$$

где $C(t)$ — некоторая функция, которую можно приравнять к нулю.

Таким образом, задачу кручения можно считать решенной, если мы сумеем отобразить конформно область $\Omega(t)$ на круг [6]. В этом случае, естественно, область $\Omega(t)$ должна быть односвязной.

Пусть $z = x_1 + ix_2 = \omega(\zeta, t)$ — конформное отображение области Ω на круг $|\zeta| < 1$, окружность обозначим γ .

Определим комплексную функцию кручения

$$F(z, t) = \varphi + i\psi, \tag{2.28}$$

где φ — функция кручения, а ψ — сопряженная с ней функция. Если функция $F(z, t)$ будет выражена через ζ , т.е. $F(z, t) = f(\zeta, t)$, то $f(\zeta)$ будет функцией, голоморфной внутри γ .

Действительная часть ψ функции

$$-if(\zeta, t) = \psi - i\varphi \quad (2.29)$$

будет удовлетворять на γ граничному условию $\psi = (x_1^2 + x_2^2)/2$. Обозначая через $\sigma = e^{i\rho}$ точки на контуре, получим, что на γ имеем

$$\psi = \frac{\omega(\sigma, t) \overline{\omega}(\sigma, t)}{2}. \quad (2.30)$$

Теперь найдем голоморфную внутри γ функцию по граничным значениям ее действительной части [6]:

$$f(\zeta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma, t) \overline{\omega}(\sigma, t)}{\sigma - \zeta} d\sigma + C_1(t), \quad (2.31)$$

где $C_1(t)$ — произвольная функция.

Используя (2.31) (см., например, [6]), мы можем определить как функцию $\psi(x_1, x_2, t)$, которая является действительной частью функции $-if(\zeta, t)$, так и функцию $\varphi(x_1, x_2, t)$, которая является мнимой частью функции $-if(\zeta, t)$.

Таким образом, по найденной гармонической функции можно определить при помощи (2.6), (2.9)–(2.12) и (2.23)–(2.27) напряжения, перемещения и крутку (или момент) растущего призматического тела в любой момент времени.

Выводы

- В работе развита теория плоских задач и задач кручения механики растущих тел.
- Рассмотрены возникающие классические и неклассические начально-краевые задачи механики деформируемого твердого тела.
- Предложены методы решения таких задач, основанные на приведении неклассических задач наращивания вязкоупругих стареющих тел к задачам теории упругости с некоторым параметром, использовании теории аналитических функций для решения последних и восстановления истинных характеристик напряженно-деформированного состояния тел при помощи полученных формул расшифровки.
- Полученные результаты могут служить основой для решения многих важных прикладных задач механики растущих тел.

Литература

- [1] Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. 320 с.
- [2] Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с.

- [3] Манжиров А.В. Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 836–848.
- [4] Манжиров А.В., Михин М.Н. Плоская задача для растущего тела // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды VI международной конференции, 19–23 июня 2000 г. Т. 2. Ростов н/Д: Изд-во СКНЦ ВШ, 2001. С. 106–109.
- [5] Гельфанд И.Н., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439 с.
- [6] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954. 647 с.
- [7] Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
- [8] Манжиров А.В. О кручении растущего цилиндра жестким штампом // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 842–850.

Поступила в редакцию 15/XI/2004;
в окончательном варианте — 15/XI/2004.

METHODS OF THE THEORY OF FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE IN GROWING SOLIDS MECHANICS⁴

© 2004 A.V. Manzhirov,⁵ M.N. Mikhin⁶

The theory of plain and torsion problems of growing solids mechanics is developed. Arising classical and non-classical initial boundary-value problems of solid mechanics are considered. Methods for solving problems of growing solids mechanics are proposed. These methods are based on the I) reduction of non-classical problems of accretion of viscoelastic aging solids to the problems of elasticity with a parameter, II) utilizing the theory of analytic functions for solving the latter problems, and III) reconstruction of true characteristics of stress-strain state by the aid of obtained decoding formulas. The results of this work can be used for solving a number of important applied problems of growing solids mechanics.

Paper received 15/XI/2004.

Paper accepted 15/XI/2004.

⁴Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Y.N. Radayev.

⁵Manzhirov Alexander Vladimirovich (manzh@ipmnet.ru), Laboratory of Mathematical Modelling in Solid Mechanics, Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Science, Moscow, 119526, Russia.

⁶Mikhin Mikhail Nikolayevich (kashira_mgapi@mailru.com), Dept. of Higher Mathematics, Moscow State Academy of Engineering and Computer Science, Moscow, 107846, Russia.