

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ УПРУГОСТИ¹

© 2004 А.Г. Жигалин²

В статье предлагается асимптотический метод решения динамических задач теории упругости. В качестве примера рассмотрена нестационарная задача для полой цилиндрической оболочки. Данный метод, по сравнению с известными численными процедурами, позволяет существенно снизить время счета, особенно при определении динамической реакции оболочек малой толщины.

1. Постановка задачи

Рассмотрим однородную цилиндрическую оболочку радиуса R и длины l , изготовленную из изотропного материала. Направим ось z правой декартовой системы координат по внутренней нормали к срединной поверхности, а оси x и y — по касательным к линиям кривизны оболочки (рис. 1). Будем предполагать, что к торцу оболочки с координатой $x = 0$ приложена равномерно распределенная ударная нагрузка. Допустим также, что второй торец ($x = l$) свободен. Перемещения торцов, возникающие в процессе распространения возмущений по оболочке, будем считать малыми по сравнению с ее длиной. Ограничим рассмотрение динамического процесса таким временным интервалом, на протяжении которого волна возмущений не успевает достичь свободного торца оболочки.

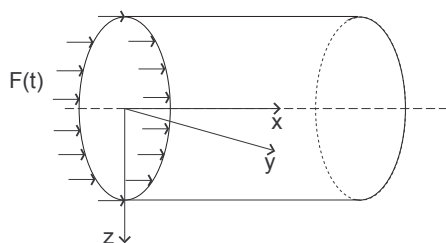


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка

Принимая во внимание ударный характер нагрузки и динамические эффекты в оболочке, вызванные этим ударом, в качестве математической модели описанной задачи представляется целесообразным использовать оболочечную модель второго приближения, также известную в литературе как модель Миндлина—Тимошенко. В этой модели принята гипотеза о том,

что нормаль к срединной поверхности оболочки после деформации не

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

²Жигалин Александр Григорьевич, кафедра математического моделирования в механике Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

искривляется и сохраняет свою длину, хотя, в отличие от теории Кирхгофа—Лява, не обязательно остается нормальной к срединной поверхности. Кроме того, в модели Миндлина—Тимошенко учитываются сдвиговые деформации и инерция вращения элементов оболочки.

Система уравнений типа Тимошенко в общем случае имеет следующий вид [2, стр. 42]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + p_x - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + k_x N_x + k_y N_y + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + T \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ \quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_x - \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y - \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь N_x , N_y — нормальные усилия в срединной поверхности оболочки по направлениям x и y соответственно; T — касательное усилие; Q_x , Q_y — поперечные усилия; M_x , M_y — изгибающие моменты; H — крутящий момент; p_x , p_y , q — интенсивности внешних нагрузок по направлениям x , y , z ; u и v — перемещения по направлениям x и y ; w — прогиб в направлении внутренней нормали к срединной поверхности, ψ_x , ψ_y — углы поворота нормали. Кроме того, k_x , k_y — главные кривизны оболочки; ρ — плотность материала оболочки; h — ее толщина; t — время.

В случае осевой симметрии при отсутствии внешних сил на боковой поверхности, принимая во внимание, что $k_x = 0$, $k_y = 1/R$, где R — радиус срединной поверхности оболочки, система уравнений (1) приводится к виду [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_x}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{R} N_y = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}. \end{array} \right. \quad (2)$$

Чтобы замкнуть систему уравнений (2), нужно записать выражения для искомых величин N_x , N_y , Q_x , M_x через неизвестные u , w , ψ_x и добавить эти выражения к исходной системе. Это несложно сделать, если учесть тот факт, что величины N_x , N_y , Q_x , M_x могут быть выражены через компоненты тензора деформаций, а те, в свою очередь, через u , w , ψ_x (материал оболочки считается линейно упругим, то есть для него справедлив закон

Гука). Имеем [2]:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), & N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \\ M_x &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\varepsilon_x^* + \nu\varepsilon_y^*), & Q_x &= k^2 \frac{Eh}{2(1+\nu)} \beta_x. \end{aligned}$$

При этом $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon_y = \frac{w}{R}$ — деформации в срединной поверхности оболочки, $\varepsilon_x^* = \frac{\partial \psi_x}{\partial x}$, $\varepsilon_y^* = \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = 0$ — деформации изгиба, отнесенные к координате x , $\beta_x = \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}$ — деформация сдвига, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. Коэффициент k характеризует распределение касательных напряжений по толщине оболочки. В соответствии с [3] для рассматриваемой задачи принято $k^2 = 1$. На основании вышеизложенного искомые величины выразятся так:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{R} w \right), & N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R} w \right), \\ M_x &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, & Q_x &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Появившиеся здесь множители $D_N = \frac{Eh}{1-\nu^2}$ и $D_M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ называются соответственно цилиндрической жесткостью растяжения и цилиндрической жесткостью изгиба оболочки.

Если подставить выражения (3) в исходную систему (2), получим систему уравнений в перемещениях, описывающую распространение упругих волн в цилиндрической оболочке [2]. Но нам в дальнейшем будет удобнее рассматривать эти семь уравнений (2), (3) совместно, не выполняя такой подстановки.

Начальные условия для поставленной задачи можно сформулировать в следующем виде:

$$u(x, 0) = w(x, 0) = \psi_x(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = \frac{\partial \psi_x(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

граничное условие, описывающее приложенную продольную импульсную силовую нагрузку $F(t)$ на торце $x = 0$:

$$N_x|_{x=0} = F(t),$$

остальные граничные условия:

$$M_x|_{x=0} = Q_x|_{x=0} = N_x|_{x=l} = M_x|_{x=l} = Q_x|_{x=l} = 0.$$

Введем безразмерные величины: $\bar{N}_x = \frac{N_x}{D_N}$, $\bar{N}_y = \frac{N_y}{D_N}$, $\bar{M}_x = \frac{M_x R}{D_M}$, $\bar{Q}_x = \frac{Q_x}{D_N b}$, где $b = \frac{1-\nu}{2}$, $\bar{x} = \frac{x}{R}$, $\bar{y} = \frac{y}{R}$, $\bar{w} = \frac{w}{R}$, $\bar{t} = \frac{t}{R} C_0$, где $C_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ — скорость распространения упругих продольных волн в материале оболочки. Безразмерная протяженность оболочки полагается равной $\bar{l} = \frac{l}{R}$, а безразмерная функция нагружения — $f(t) = \frac{F(t)}{D_N}$. Тогда, чтобы удовлетворить поставленному

ограничению о рассматриваемом временном диапазоне, нужно потребовать выполнения неравенства $\bar{t} < \bar{l}$.

Далее будем опускать знак черты над безразмерными величинами. Тогда начально-краевая задача в безразмерных переменных примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial N_x}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b \frac{\partial Q_x}{\partial x} + N_y, \\ \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{b}{a^2} Q_x, \\ N_x = \frac{\partial u}{\partial x} + v w, \\ N_y = v \frac{\partial u}{\partial x} + w, \\ M_x = \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \\ Q_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x, \end{array} \right. \quad (4)$$

$$u(x, 0) = w(x, 0) = \psi_x(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = \frac{\partial \psi_x(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad (5)$$

$$N_x|_{x=0} = f(t), \quad M_x|_{x=0} = Q_x|_{x=0} = N_x|_{x=l} = M_x|_{x=l} = Q_x|_{x=l} = 0, \quad (6)$$

где введено обозначение $a^2 = \frac{h^2}{12R^2}$. Функцию нагружения примем равной

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ Ate^{-pt}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Здесь $A > 0$ и $p > 0$ — константы, определяющие пиковое значение нагрузки и скорость ее затухания соответственно.

2. Построение асимптотической системы уравнений

В системе (4) можно исключить одно уравнение, выражая, например, N_y через N_x :

$$N_y = v(N_x - vw) + w.$$

Таким образом получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial N_x}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b \frac{\partial Q_x}{\partial x} + v N_x + (1 - v^2) w, \\ \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{b}{a^2} Q_x, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} N_x = \frac{\partial u}{\partial x} + v w, \\ M_x = \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \\ Q_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x. \end{array} \quad (1)$$

Преобразуем систему (1), вычислив частные производные по времени от левых и правых частей тех уравнений, в которые такие производные

не входят. Вводя новые переменные

$$\frac{\partial u}{\partial t} = U, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = W, \quad \frac{\partial \psi_x}{\partial t} = \Psi,$$

приходим к системе уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial N_x}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial t} - b \frac{\partial Q_x}{\partial x} - v N_x - (1 - v^2) W = 0, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{b}{a^2} Q_x = 0, \\ \frac{\partial N_x}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial x} - v W = 0, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial t} - \frac{\partial W}{\partial x} - \Psi = 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} - W = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

Теперь мы можем записать полученную систему в форме матричного уравнения:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x} + \mathbf{D} \mathbf{X} = 0, \quad (3)$$

где $\mathbf{X} = (U, W, \Psi, N_x, Q_x, M_x, w)$ — вектор неизвестных, а ненулевые элементы c_{ij} и d_{ij} матриц $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ будут иметь следующие значения: $c_{14} = -1$, $c_{25} = -b$, $c_{36} = -1$, $c_{41} = -1$, $c_{52} = -1$, $c_{63} = -1$, $d_{24} = -v$, $d_{27} = v^2 - 1$, $d_{35} = \frac{b}{a^2}$, $d_{42} = -v$, $d_{53} = -1$, $d_{72} = -1$.

С целью дальнейшего упрощения системы уравнений (2) преобразуем матрицу $\mathbf{C}$ к диагональной форме. Известно, что матрица $\mathbf{Z}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{Z}$ будет диагональной, если матрица $\mathbf{Z}$ составлена из собственных векторов матрицы $\mathbf{C}$. Поэтому в матричном уравнении (3) сделаем замену переменной $\mathbf{X} = \mathbf{Z} \mathbf{Y}$, где $\mathbf{Y}$ — новый вектор неизвестных, и умножим его на $\mathbf{Z}^{-1}$ слева. Тогда матричное уравнение (3) запишется таким образом:

$$\mathbf{Z}^{-1} \mathbf{Z} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{Z} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} + \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{Z} \mathbf{Y} = 0$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t} + \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{Z} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} + \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{Z} \mathbf{Y} = 0. \quad (4)$$

Вид матрицы $\mathbf{Z}$, столбцами которой являются найденные собственные векторы, зависит от порядка, в котором эти векторы используются при записи матрицы. Во избежание неопределенности примем такой порядок,

когда матрица $\mathbf{Z}$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{b} & -\sqrt{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда обратная к $\mathbf{Z}$ матрица запишется в форме:

$$\mathbf{Z}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{b}} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\sqrt{b}} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ненулевые элементы λ_{ij} матрицы $\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{CZ}$ совпадают с собственными числами матрицы $\mathbf{C}$ и при оговоренном порядке следования собственных векторов, используемом для записи матрицы $\mathbf{Z}$, имеют следующие значения: $\lambda_{11} = -1$, $\lambda_{22} = 1$, $\lambda_{33} = -\sqrt{b}$, $\lambda_{44} = \sqrt{b}$, $\lambda_{55} = -1$, $\lambda_{66} = 1$. Матрица $\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{DZ}$, также входящая в уравнение (4), примет вид:

$$\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{DZ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{v\sqrt{b}}{2} & \frac{v\sqrt{b}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{v\sqrt{b}}{2} & -\frac{v\sqrt{b}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{2\sqrt{b}} & -\frac{v}{2\sqrt{b}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{v^2-1}{2\sqrt{b}} \\ \frac{v}{2\sqrt{b}} & \frac{v}{2\sqrt{b}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{v^2-1}{2\sqrt{b}} \\ 0 & 0 & \frac{b}{2a^2} & \frac{b}{2a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2a^2}{b} & -\frac{2a^2}{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{b} & \sqrt{b} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В таком случае, согласно произведенной ранее замене переменных

$(\mathbf{X} = \mathbf{ZY})$, справедливы соотношения:

$$\begin{cases} U = y_1 - y_2, & W = \sqrt{b}(y_3 - y_4), \\ \Psi = y_5 - y_6, & N_x = y_1 + y_2, \\ Q_x = y_3 + y_4, & M_x = y_5 + y_6, \quad w = y_7. \end{cases} \quad (5)$$

Переходя от матричной записи обратно к системе уравнений, получим каноническую форму системы (2):

$$\begin{cases} \frac{\partial y_1}{\partial t} - \frac{\partial y_1}{\partial x} - \frac{v\sqrt{b}}{2}(y_3 - y_4) = 0, \\ \frac{\partial y_2}{\partial t} + \frac{\partial y_2}{\partial x} - \frac{v\sqrt{b}}{2}(y_3 - y_4) = 0, \\ \frac{\partial y_3}{\partial t} - \sqrt{b}\frac{\partial y_3}{\partial x} - \frac{v}{2\sqrt{b}}(y_1 + y_2) - \frac{1}{2}(y_5 - y_6) + \frac{v^2 - 1}{2\sqrt{b}}y_7 = 0, \\ \frac{\partial y_4}{\partial t} + \sqrt{b}\frac{\partial y_4}{\partial x} + \frac{v}{2\sqrt{b}}(y_1 + y_2) - \frac{1}{2}(y_5 - y_6) - \frac{v^2 - 1}{2\sqrt{b}}y_7 = 0, \\ \frac{\partial y_5}{\partial t} - \frac{\partial y_5}{\partial x} + \frac{b}{2a^2}(y_3 + y_4) = 0, \\ \frac{\partial y_6}{\partial t} + \frac{\partial y_6}{\partial x} - \frac{b}{2a^2}(y_3 + y_4) = 0, \\ \frac{\partial y_7}{\partial t} - \sqrt{b}(y_3 - y_4) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Для решения этой системы воспользуемся интегральным преобразованием Лапласа по времени. Как известно, преобразование Лапласа осуществляется по формуле

$$\tilde{g}(x, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} g(x, t) dt,$$

где $g(x, t)$ — функция-оригинал, $\tilde{g}(x, s)$ — функция-образ, а s — параметр преобразования.

Используя операционные свойства преобразования Лапласа [1], предполагая достаточную гладкость решения и принимая во внимание соотношения (5), начальные условия (5) и граничные условия (6), преобразуем си-

стему уравнений (6) к виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} s\tilde{y}_1 - \frac{d\tilde{y}_1}{dx} - \frac{\nu\sqrt{b}}{2}(\tilde{y}_3 - \tilde{y}_4) = 0, \\ s\tilde{y}_2 + \frac{d\tilde{y}_2}{dx} - \frac{\nu\sqrt{b}}{2}(\tilde{y}_3 - \tilde{y}_4) = 0, \\ s\tilde{y}_3 - \sqrt{b}\frac{d\tilde{y}_3}{dx} - \frac{\nu}{2\sqrt{b}}(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) - \frac{1}{2}(\tilde{y}_5 - \tilde{y}_6) + \frac{\nu^2 - 1}{2\sqrt{b}}\tilde{y}_7 = 0, \\ s\tilde{y}_4 + \sqrt{b}\frac{d\tilde{y}_4}{dx} + \frac{\nu}{2\sqrt{b}}(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) - \frac{1}{2}(\tilde{y}_5 - \tilde{y}_6) - \frac{\nu^2 - 1}{2\sqrt{b}}\tilde{y}_7 = 0, \\ s\tilde{y}_5 - \frac{d\tilde{y}_5}{dx} + \frac{b}{2a^2}(\tilde{y}_3 + \tilde{y}_4) = 0, \\ s\tilde{y}_6 + \frac{d\tilde{y}_6}{dx} - \frac{b}{2a^2}(\tilde{y}_3 + \tilde{y}_4) = 0, \\ s\tilde{y}_7 - \sqrt{b}(\tilde{y}_3 - \tilde{y}_4) = 0. \end{array} \right. \quad (7)$$

Согласно теореме о предельных значениях оригинала и изображения (теорема Абеля), имеет место равенство:

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(x, t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\tilde{g}(s, t).$$

Применительно к рассматриваемой задаче это означает, что при достаточно малых значениях времени t параметр преобразования s будет принимать сколь угодно большие значения. Поэтому в ходе получения приближенного решения, предназначенного для оценки искомых величин именно при малых значениях времени, будем пренебрегать слагаемыми высших порядков малости при $s \rightarrow \infty$.

Из последней системы имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{y}_1 = \frac{1}{s} \left[\frac{d\tilde{y}_1}{dx} + \frac{\nu\sqrt{b}}{2}(\tilde{y}_3 - \tilde{y}_4) \right], \\ \tilde{y}_2 = \frac{1}{s} \left[-\frac{d\tilde{y}_2}{dx} + \frac{\nu\sqrt{b}}{2}(\tilde{y}_3 - \tilde{y}_4) \right], \\ \tilde{y}_3 = \frac{1}{s} \left[\sqrt{b}\frac{d\tilde{y}_3}{dx} + \frac{\nu}{2\sqrt{b}}(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) + \frac{1}{2}(\tilde{y}_5 - \tilde{y}_6) + \frac{1 - \nu^2}{2\sqrt{b}}\tilde{y}_7 \right], \\ \tilde{y}_4 = \frac{1}{s} \left[-\sqrt{b}\frac{d\tilde{y}_4}{dx} - \frac{\nu}{2\sqrt{b}}(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) + \frac{1}{2}(\tilde{y}_5 - \tilde{y}_6) - \frac{1 - \nu^2}{2\sqrt{b}}\tilde{y}_7 \right], \\ \tilde{y}_5 = \frac{1}{s} \left[\frac{d\tilde{y}_5}{dx} - \frac{b}{2a^2}(\tilde{y}_3 + \tilde{y}_4) \right], \\ \tilde{y}_6 = \frac{1}{s} \left[-\frac{d\tilde{y}_6}{dx} + \frac{b}{2a^2}(\tilde{y}_3 + \tilde{y}_4) \right], \\ \tilde{y}_7 = \frac{\sqrt{b}}{s}(\tilde{y}_3 - \tilde{y}_4). \end{array} \right.$$

Таким образом, величины $\tilde{y}_i$ являются величинами порядка $\frac{1}{s}$. Тогда, отбрасывая в уравнениях системы слагаемые порядка $\frac{1}{s^2}$, приближенно можно

записать:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{y}_1}{dx} - s\tilde{y}_1 = 0, & \frac{d\tilde{y}_2}{dx} + s\tilde{y}_2 = 0, \\ \sqrt{b}\frac{d\tilde{y}_3}{dx} - s\tilde{y}_3 = 0, & \sqrt{b}\frac{d\tilde{y}_4}{dx} + s\tilde{y}_4 = 0, \\ \frac{d\tilde{y}_5}{dx} - s\tilde{y}_5 = 0, & \frac{d\tilde{y}_6}{dx} + s\tilde{y}_6 = 0, & \tilde{y}_7 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

3. Результирующие соотношения

Нетрудно видеть, что решением системы (8) будут служить величины:

$$\begin{cases} \tilde{y}_1 = c_1 e^{sx}, & \tilde{y}_2 = c_2 e^{-sx}, & \tilde{y}_3 = c_3 e^{\frac{s}{\sqrt{b}}x}, \\ \tilde{y}_4 = c_4 e^{-\frac{s}{\sqrt{b}}x}, & \tilde{y}_5 = c_5 e^{sx}, & \tilde{y}_6 = c_6 e^{-sx}, & \tilde{y}_7 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, образы искомых величин $\tilde{N}_x$, $\tilde{Q}_x$ и $\tilde{M}_x$, согласно (5), выражаются так:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_x &= \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = c_1 e^{sx} + c_2 e^{-sx}, \\ \tilde{Q}_x &= \tilde{y}_3 + \tilde{y}_4 = c_3 e^{\frac{s}{\sqrt{b}}x} + c_4 e^{-\frac{s}{\sqrt{b}}x}, \\ \tilde{M}_x &= \tilde{y}_5 + \tilde{y}_6 = c_5 e^{sx} + c_6 e^{-sx}. \end{aligned}$$

Неизвестные константы c_i определяются подстановкой в полученные формулы граничных условий (6) и, следовательно, должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \tilde{f}(s), & c_3 + c_4 = 0, & c_5 + c_6 = 0, \\ c_1 e^{sl} + c_2 e^{-sl} = 0, & c_3 e^{\frac{s}{\sqrt{b}}l} + c_4 e^{-\frac{s}{\sqrt{b}}l} = 0, & c_5 e^{sl} + c_6 e^{-sl} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Решение системы (1) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{\tilde{f}(s) e^{-sl}}{2 \operatorname{sh} sl}, & c_2 = \frac{\tilde{f}(s) e^{sl}}{2 \operatorname{sh} sl}, & c_3 = 0, \\ c_4 = 0, & c_5 = 0, & c_6 = 0. \end{cases}$$

После подстановки найденных значений c_i в выражения для образов получим:

$$\tilde{N}_x = -\frac{\tilde{f}(s) e^{-sl}}{2 \operatorname{sh} sl} e^{sx} + \frac{\tilde{f}(s) e^{sl}}{2 \operatorname{sh} sl} e^{-sx}, \quad \tilde{Q}_x = 0, \quad \tilde{M}_x = 0.$$

Для получения результирующего выражения для N_x осталось только выполнить обратное преобразование Лапласа. Известно, что в общем случае оно может быть выполнено численными методами. Однако в данной задаче удастся получить аналитическое выражение для продольного усиления, что делает ненужным использование численных методов.

Преобразуем выражение для $\tilde{N}_x$:

$$\tilde{N}_x = \frac{\tilde{f}(s)}{2 \operatorname{sh} sl} (e^{s(l-x)} - e^{-s(l-x)}) = \tilde{f}(s) \frac{e^{s(l-x)} - e^{-s(l-x)}}{e^{sl} - e^{-sl}} = \tilde{f}(s) \frac{e^{s(l-x)} - e^{-s(l-x)}}{e^{sl} (1 - e^{-2sl})}.$$

Разложим множитель $(1 - e^{-2sl})^{-1}$ в биномиальный ряд. Как известно, такой ряд абсолютно сходится при $-1 < -e^{-2sl} < 1$. В данном случае это условие выполняется, так как решение строится в предположении, что $s \rightarrow \infty$. Получим:

$$\begin{aligned} (1 - e^{-2sl})^{-1} &= 1 + (-1)(-e^{-2sl}) + \frac{(-1)(-2)(-e^{-2sl})^2}{2!} + \dots = \\ &= 1 + e^{-2sl} + e^{-4sl} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nsl}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\tilde{N}_x = \tilde{f}(s) \frac{e^{s(l-x)} - e^{-s(l-x)}}{e^{sl}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nsl} = \tilde{f}(s) \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-s(2nl+x)} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-s(2l(n+1)-x)} \right).$$

Окончательно будем иметь:

$$\tilde{N}_x = \tilde{f}(s) \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-s(2nl+x)} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s(2nl-x)} \right).$$

Следует отметить, что рассматриваемая функция нагружения $f(t)$ удовлетворяет определению оригинала некоторого преобразования Лапласа, так как она равна нулю при отрицательных значениях аргумента, непрерывна и имеет ограниченный показательный рост.

Введем в рассмотрение функцию Хевисайда:

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Очевидно, что в дальнейшем вместо функции нагружения $f(t)$ можно использовать функцию $f_{\eta}(t) = f(t)\eta(t)$.

Применив к функции $f_{\eta}(t)$ теорему запаздывания [1], получим:

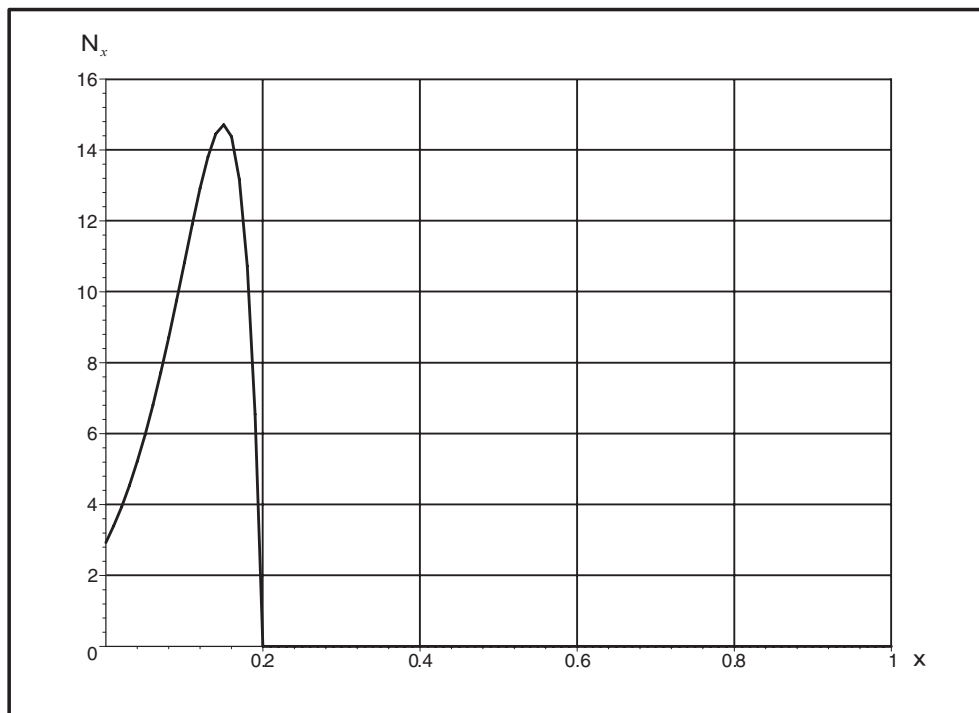
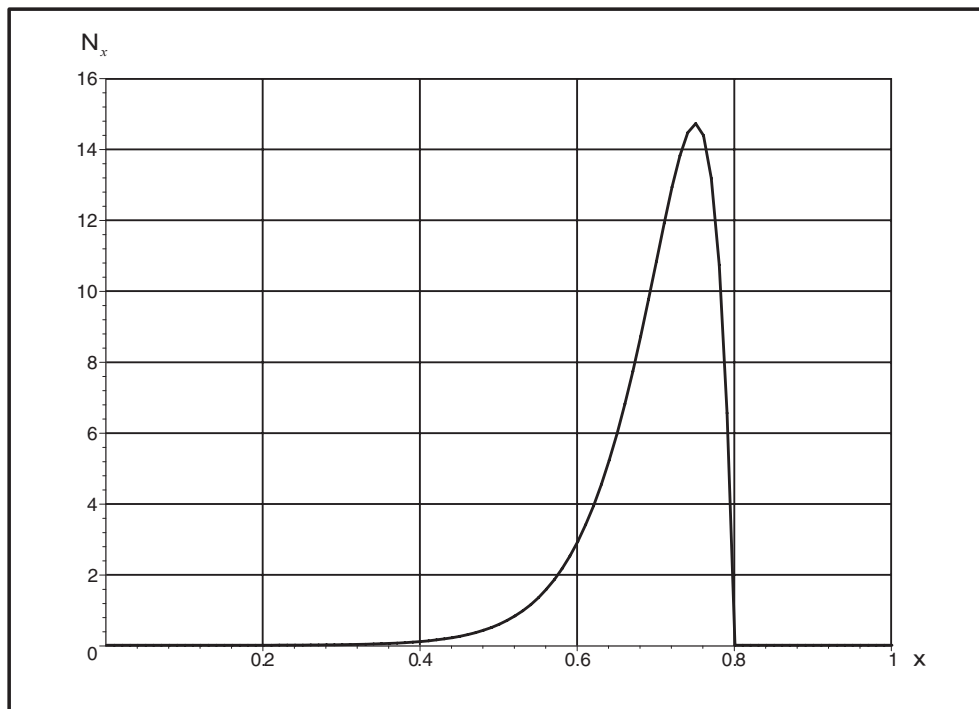
$$\tilde{f}(s) \doteq f(t)\eta(t) \Rightarrow \tilde{f}(s)e^{-as} \doteq f(t-a)\eta(t-a),$$

то есть безразмерное усилие выразится через безразмерную протяженность оболочки:

$$N_x(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(t - 2nl - x)\eta(t - 2nl - x) - \sum_{n=1}^{\infty} f(t - 2nl + x)\eta(t - 2nl + x).$$

Формула (2) является окончательной формулой, применяемой для расчета нормального усилия $N_x(x, t)$. По причине вхождения функции Хевисайда в качестве сомножителя в слагаемые рядов, составляющих данную формулу, все такие слагаемые, начиная с некоторого номера, будут равны нулю. Следовательно, суммы этих рядов находятся точным образом за конечное число операций сложения, что повышает эффективность расчетов.

Таким образом, в ходе проведенных расчетов удалось получить в аналитическом виде приближенное выражение для продольного усилия в задаче

Рис. 2. Распределение безразмерного продольного усилия при $t = 0,2$ Рис. 3. Распределение безразмерного продольного усилия при $t = 0,8$

о полой цилиндрической оболочке, испытывающей нагрузку ударного типа. На рис. 2 и 3 приведены графики распределения продольного усилия по длине оболочки при значениях безразмерных констант $A = 800$ и $p = -20$ для двух различных моментов времени.

Автор выражает благодарность С.А. Лычеву за постоянное внимание к работе.

Литература

- [1] Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: МГТУ им. Баумана, 1999. 228 с.
- [2] Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
- [3] Нетребко А.В., Новотный С.В., Созоненко Ю.А. Некоторые задачи динамики цилиндрических оболочек. М.: Институт механики МГУ, 1998. 89 с.

Поступила в редакцию 29/IX/2004;
в окончательном варианте – 29/IX/2004.

AN ASYMPTOTIC METHOD FOR SOLVING PROBLEMS OF DYNAMIC ELASTICITY³

© 2004 A.G. Zhigalin⁴

In the paper the asymptotic method for solving dynamic problems from the elasticity theory is given. A sample problem for a flat cylindrical shell is considered. The proposed method in comparison with other numerical procedures allows to reduce the time of computation especially for a dynamic problems for thin shells.

Paper received 29/IX/2004.

Paper accepted 29/IX/2004.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Y.N. Radaev.

⁴Zhigalin Alexandr Grigoryevich, Dept. of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.