УДК 511.334

МОДУЛЯРНЫЕ ФОРМЫ И ГРУППЫ ПОРЯДКА 2^n [1]

© 2004 Г.В. Воскресенская[2]

В работе изучаются такие группы порядка 16 и 32, что параболические формы, ассоциированные со всеми элементами этих групп с помощью некоторого точного представления, являются модулярными формами из специального класса с мультипликативными коэффициентами Фурье.

Введение

В этой статье продолжаются исследования проблемы нахождения таких конечных групп, что модулярные формы, ассоциированные со всеми элементами этих групп с помощью некоторого точного представления, принадлежат специальному классу модулярных форм, которые называются мультипликативными η-произведениями. Это открытая проблема: все такие группы до сих пор не найдены. Для получения полной классификации необходимо найти все такие группы порядка, равного степени числа 2. Но этот случай является и самым трудным. Случай групп нечетного порядка практически исследован. Мы рассмотрим подробно соответствия между модулярными формами и представлениями групп порядков 16 и 32. Для одного и того же типа групп возможны иногда различные варианты соответствия.

Эта-функция Дедекинда $\eta(z)$ определяется формулой

$$\eta(z) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \qquad q = e^{2\pi i z},$$

z лежит в верхней комплексной полуплоскости.

Мы рассматриваем модулярные формы, которые полностью описываются следующими условиями: это параболические формы целого веса с характерами, собственные относительно всех операторов Гекке, все нули которых сосредоточены в параболических вершинах с кратностью 1. Заранее мы не

[1]Представлена доктором физико-математических наук профессором В.Е. Воскресенским.

[2]Воскресенская Галина Валентиновна (vosk@ssu.samara.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

предполагаем, что эти функции являются модифицированными произведениями η-функций Дедекинда. Однако фактически это так, таких функций ровно 28; приведем их полный список.

Формы веса 1:

$$\eta(23z)\eta(z),\ \ \eta(22z)\eta(2z),\ \ \eta(21z)\eta(3z),\ \ \eta(20z)\eta(4z),$$
$$\eta(18z)\eta(6z),\ \ \eta(16z)\eta(8z),\ \ \eta^2(12z).$$

Формы веса 2:

$$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z),\ \ \eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z),\ \ \eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z),$$
$$\eta^2(11z)\eta^2(z),\ \ \eta^2(10z)\eta^2(2z),\ \ \eta^2(9z)\eta^2(3z),\ \ \eta^2(8z)\eta^2(4z),\ \ \eta^4(6z).$$

Формы веса 3:

$$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z),\ \ \eta^3(7z)\eta^3(z),\ \ \eta^3(6z)\eta^3(2z),\ \ \eta^6(4z).$$

Формы веса 4:

$$\eta^4(5z)\eta^4(z),\ \ \eta^4(4z)\eta^4(2z),\ \ \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z),\ \ \eta^8(3z).$$

Форма веса 5: $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$.

Формы веса 6: $\eta^6(3z)\eta^6(z)$, $\eta^{12}(2z)$.

Форма веса 8: $\eta^8(2z)\eta^8(z)$.

Форма веса 12: $\eta^{24}(z)$.

К этому списку добавим еще 2 параболические формы полуцелого веса: $\eta(24z)$, $\eta^3(8z)$.

Эти функции мы назовем *мультипликативными* η*-произведениями*, так как они имеют мультипликативные коэффициенты Фурье.

С различных точек зрения эти функции изучались в ряде недавних работ американских и японских математиков [1–8].

Сопоставление элементам конечных групп модулярных форм осуществляется по следующему правилу. Пусть Φ — представление конечной группы G унимодулярными матрицами в пространстве V, размерность которого делится на 24. И пусть для любого элемента $g \in G$ характеристический многочлен оператора $\Phi(g)$ имеет вид:

$$P_g(x) = \prod_{k=1}^{s}(x^{a_k} - 1)^{t_k},\ \ a_k \in \mathbf{N},\ \ t_k \in \mathbf{Z}.$$

С каждым элементом $g \in G$ можно связать функцию

$$\eta_g(z) = \prod_{k=1}^{s} \eta^{t_k}(a_k z).$$

Функция $\eta_g(z)$ является параболической формой определенного уровня $N(g)$ и веса $k(g) = \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{s} t_k$ с характером, равным характеру квадратичного поля $\mathbf{Q}\sqrt{\prod_{k=1}^{s}(ia_k)^{t_k}}$.

Будем называть представление группы *искомым* или *представлением допустимого типа*, если с помощью этого представления с элементами группы ассоциируются мультипликативные η-произведения.

Допустимые группы указываются с точностью до изоморфизма.

Искомые группы могут содержать элементы порядков, не превосходящих 24 и не равных 13, 17, 19. Непосредственно проверяется, что если некоторому элементу группы соответствует мультипликативное η-произведение, то всем его степеням также соответствуют параболические формы из указанного выше списка. Используя этот факт, при исследовании групп достаточно рассматривать представления только для элементов, не лежащих в одной циклической группе. Единичному элементу группы соответствует параболическая форма $\eta^{24}(z)$.

1. Группа $\mathbf{Z_2} \times \mathbf{Z_2} \times \mathbf{Z_2} \times \mathbf{Z_2}$ и мультипликативные η-произведения

В статье [14] был разобран только один из возможных вариантов.

Здесь мы подробно разберем еще несколько возможностей.

Пусть T — искомое представление, χ — его характер. Этими символами мы будем обозначать искомое представление и его характер всюду в тексте до конца статьи.

Обозначим через u количество элементов, соответствующих параболической форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, через v — количество элементов, соответствующих параболической форме $\eta^{12}(2z)$.

1.1. Случай $u = 1$, $v = 14$.

Пусть элемент g соответствует $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальные элементы порядка 2 соответствуют $\eta^{12}(2z)$. В искомое представление одномерные представления, переводящие элемент g в 1, входят с кратностью 2, одномерные представления, переводящие элемент g_1 в -1, входят с кратностью 1.

1.2. Случай $u = 3$, $v = 12$.

Пусть элементы g_1, g_2, g_3 соответствуют модулярной форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальные элементы второго порядка соответствуют функции $\eta^{12}(2z)$.

Здесь следует рассмотреть два различных случая:

1) элементы g_1, g_2, g_3, g_4 являются порождающими элементами для группы G. Элемент g_4 сооответствует $\eta^{12}(2z)$. В следующей таблице указаны кратности всех одномерных представлений, с которыми они входят в искомое допустимое представление. Каждый столбец указывает значение каждого одномерного представления на образующих элементах. В последней строке указана кратность;

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
m	3	3	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	0	0

2) элемент $g_3 = g_1 \cdot g_2$. В этом случае 4 представления, переводящие элементы g_1 и g_2 в 1, входят в искомое представление с кратностью 3. Остальные одномерные представления входят в искомое с кратностью 1.

1.3. Случай $u = 5$, $v = 10$.

Пусть порождающие элементы g_1, g_2, g_3, g_4 соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$. В этом случае этой форме должен соответствовать также еще один элемент. Возможны три принципиально разных случая:

1) этот элемент $g_1g_2g_3$. Пусть Φ — такое одномерное представление, что $\Phi(g_k) = -1, k = 1, 2, 3, 4$. Вычислим кратность, с которой оно входит в искомое представление. Это число может равняться нулю, но не может быть дробным или отрицательным. Однако получим:

$$< \chi, \chi_\Phi >= \frac{1}{16}(24 - 8 \cdot 5) = -1.$$

Это противоречие показывает, что случай не является допустимым. Два остальных случая являются допустимыми;

2) параболической форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$ соответствуют элементы g_1, g_2, g_3, g_4, g_1g_2. Кратность вхождения каждого одномерного представления в искомое указана в следующей таблице;

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
m	4	3	3	2	2	1	1	0	2	1	1	0	2	1	1	0

3) параболической форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$ соответствуют элементы g_1, g_2, g_3, g_4, $g_1g_2g_3g_4$. Таблица кратностей:

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
m	4	2	2	2	2	2	2	0	2	2	2	0	2	0	0	0

1.4. Случай $u = 7$, $v = 8$.

1) Рассмотрим случай, когда в группе существует подгруппа восьмого порядка, все неединичные элементы которой соответствуют параболической форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$. Этот вариант является допустимым: неприводимые представления, тождественные на этой подгруппе, входят в искомое представление с кратностью 5, остальные 14 представлений — с кратностью 1;

2) в группе существует подгруппа восьмого порядка, в которой содержатся 5 элементов, соответствующих параболической форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$. Пусть группа порождается элементами g_1, g_2, g_3, g_4. Группа будет допустимой, например, в случае, если элементы g_1g_2, g_1g_3, g_2g_3, g_3g_4, $g_1g_2g_3$, g_3, g_4 соответствуют параболической форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальные элементы порядка 2 соответствуют $\eta^{12}(2z)$.

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
m	5	3	0	0	2	0	1	1	2	0	1	1	3	1	2	2

В подгруппе $< g_1 > \times < g_2 > \times < g_1g_2g_3 >$ содержатся в точности 3 элемента, соответствующих $\eta^8(2z)\eta^8(z)$; в подгруппе $< g_1 > \times < g_2 > \times < g_1g_2 >$ содержатся 2 элемента, соответствующих $\eta^8(2z)\eta^8(z)$; в подгруппе, состоящей из произведений четного числа порождающих элементов, содержатся 4 таких элемента.

Здесь возможен и второй вариант.

Элементы g_1, g_2, g_3, g_4, g_1g_4, g_2g_4, g_1g_3, g_1g_2 соответствуют параболической форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальные элементы порядка 2 соответствуют $\eta^{12}(2z)$;

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
m	5	2	4	1	2	1	1	0	2	1	1	0	1	2	0	2

3) в группе существует подгруппа H восьмого порядка, в которой содержится только один элемент g_1, соответствующих параболической форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$. Пусть элементы g_2, g_3 не лежат в подгруппе F и соответствуют $\eta^{12}(2z)$. Эта группа является допустимой только в случае, если $g_1 \neq g_2g_3$. В этом случае можно считать, что группа порождается элементами g_1, g_2, g_3, g_4.

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
m	5	1	1	2	1	2	3	3	0	0	1	1	0	1	1	2

В подгруппе $< g_1 > \times < g_2 > \times < g_1g_2g_3 >$ содержатся в точности 3 элемента, соответствующих $\eta^8(2z)\eta^8(z)$; в подгруппе $< g_1 > \times < g_2 > \times < g_1g_2 >$ содержатся 2 элемента, соответствующих $\eta^8(2z)\eta^8(z)$; в подгруппе, состоящей из произведений четного числа порождающих элементов, содержатся 4 таких элемента.

1.5. Случай $u = 9$, $v = 6$.

Эта группа является допустимой только в следующих двух принципиальных разных случаях:

1) элементы g_1, g_2, g_3, g_4, g_1g_2, g_3g_4 соответствуют параболической форме $\eta^{12}(2z)$;

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
m	6	0	0	0	0	2	2	2	0	2	2	2	0	2	2	2

2) элементы g_1, g_2, g_3, g_4, g_1g_2, $g_1g_2g_3g_4$ соответствуют параболической форме $\eta^{12}(2z)$;

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
m	6	0	0	0	1	1	1	3	1	1	1	3	0	2	2	2

1.6. Случай $u = 11$, $v = 4$.

Группа является допустимой только в том случае, когда все элементы, соответствующие параболической форме $\eta^{12}(2z)$, являются образующими для нашей группы. Запишем таблицу кратностей.

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
m	7	0	0	1	1	0	0	2	0	1	1	2	0	2	2	3

1.7. Случай $u = 13$, $v = 2$.

Можно считать, что среди четырех образующих первые две g_1 и g_2 соответствуют $\eta^{12}(2z)$. Тогда единичное представление входит в искомое с кратностью 8, неприводимые представления, принимающие на g_1 и g_2 разные знаки, входят с кратностью 1, неединичные представления, равные 1 на g_1 и g_2 в искомое представление не входят, остальные представления входят с кратностью 2.

1.8. Случай $u = 15$, $v = 0$.

Единичное представление входит в искомое представление с кратностью 9. Остальные представления входят в искомое с кратностью 1.

2. Группа $\mathbf{Z_4} \times \mathbf{Z_4}$ и мультипликативные η-произведения

$Z_4 \times Z_4 \cong < f > \times < h >$.

Рассмотрим все возможные случаи:

1) все элементы порядка 2 соответствуют $\eta^{12}(2z)$, все элементы порядка 4 соответствуют $\eta^6(4z)$.

Этот случай не является допустимым, так в этом случае кратность единичного представления m_1 равняется дробному числу;

2) элемент f^2 соответствует $\eta^{12}(2z)$, элементы h^2, f^2h^2 соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$.

Этот случай не является допустимым, так в этом случае кратность единичного представления m_Φ равняется дробному числу, где $\Phi(f) = i, \Phi(h) = i$;

3) элементы f^2, h^2 соответствуют $\eta^{12}(2z)$, элементы f^2h^2 соответствует $\eta^8(2z)\eta^8(z)$.

Пусть s элементов соответствуют параболической форме $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$, t элементов соответствуют параболической форме $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(2z)$. Число $0 \leqslant t \leqslant 4$. Получим

$$m_1 = \frac{1}{16}(24 + 8 + 4t).$$

Следовательно, $t = 0$ или $t = 4$. Оба эти варианта являются допустимыми.

Случай $t = 0$.

В этом случае 8 представлений, при которых f^2h^2 переходит в 1, входят в искомое представление с кратностью 2, остальные неприводимые представления входят с кратностью 1.

Случай $t = 4$.

В этом случае элементы fh, f^3h, fh^3, f^3h^3 соответствуют $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(2z)$. Запишем таблицу кратностей.

f	1	1	1	1	i	i	i	i	-1	-1	-1	-1	-i	-i	-i	-i
h	1	i	-1	-i	1	i	-1	-i	1	i	-1	-i	1	i	-1	-i
m	3	1	1	1	1	2	1	2	1	1	3	1	1	2	1	2

4)Все элементы порядка 2 соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$.

Пусть s элементов соответствуют параболической форме $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$, t элементов соответствуют параболической форме $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(2z)$. Число $0 \leqslant t \leqslant 12$. Получим

$$m_1 = \frac{1}{16}(24 + 24 + 4t).$$

Следовательно, t может равняться одному из чисел 0, 4, 8, 12. Все эти варианты являются допустимыми.

Случай $t = 0$.

В этом случае 4 представлений, при которых f и h переходит в 1 и -1, входят в искомое представление с кратностью 3, остальные неприводимые представления входят с кратностью 1.

Случай $t = 4$.

В этом случае можно считать, что элементы f, f^3, fh^2, f^3h^2 соответствуют $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(2z)$. Запишем таблицу кратностей.

f	1	1	1	1	i	i	i	i	-1	-1	-1	-1	-i	-i	-i	-i
h	1	i	-1	-i	1	i	-1	-i	1	i	-1	-i	1	i	-1	-i
m	4	1	4	1	1	1	1	1	2	1	2	1	1	1	1	1

Случай $t = 8$.

В этом случае можно считаь, что элементы f, f^3, fh^2, f^3h^2 соответствуют $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$. Запишем таблицу кратностей.

f	1	1	1	1	i	i	i	i	-1	-1	-1	-1	-i	-i	-i	-i
h	1	i	-1	-i	1	i	-1	-i	1	i	-1	-i	1	i	-1	-i
m	5	1	1	1	1	1	1	1	3	1	3	1	1	1	1	1

Случай $t = 12$.

Это допустимый вариант. Запишем таблицу кратностей.

f	1	1	1	1	i	i	i	i	-1	-1	-1	-1	-i	-i	-i	-i
h	1	i	-1	-i	1	i	-1	-i	1	i	-1	-i	1	i	-1	-i
m	6	1	2	1	1	1	1	1	2	1	2	1	1	1	1	1

Группы $Z_4 \times Z_2 \times Z_2$ и $Z_8 \times Z_2$ рассматривались в статье [14].

3. Группа $\mathbf{Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2}$ и мультипликативные η-произведения

Эта группа является допустимой только при одном возможном наборе значений для элементов u и v.

$u = 21, v = 10$.

Пусть элементы g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 являются порождающими элементами для группы G. Эта группа является допустимой, если элементы

$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_1g_2,\ g_1g_2g_3g_4,\ g_1g_3g_5,\ g_1g_2g_5,\ g_3g_4g_5,\ g_1g_4g_5$$

соответствуют параболической форме $\eta^{12}(2z)$.

Кратность вхождения каждого одномерного представления в искомое указана в следующей таблице.

g_1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1
g_4	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1
g_5	1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
m	6	1	1	1	2	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2

Остальные неприводимые представления не входят в допустимое 24-мерное представление.

При других значениях элементов для элементов u и v допустимое представление построить нельзя.

Покажем, как это доказать при $u = 1$. Пусть g соответствует $\eta^8(2z)\eta^8(z)$. Пусть $\Phi(g) = -1$. Тогда $m_\Phi = 1/2$. Следовательно, этот случай не является допустимым. В остальных случаях доказательство проводится аналогичными рассуждениями.

4. Неабелевы группы порядка 32 и мультипликативные η-произведения

В этом параграфе мы рассмотрим неабелевы допустимые группы порядка 32.

Все неабелевы группы порядка 16 встречаются как подгруппы в этих группах, мы укажем это в соответствующих примерах.

Группа D_{16} является допустимой. Следовательно, группа

D_8 также является допустимой [9].

4.1. Группа $D_4 \times Z_4$.

Генетический код этой группы:

$< a, b, c : a^4 = b^2 = c^4 = e,\ b^{-1}ab = a^3,\ ac = ca,\ bc = cb >$.

В группе 20 классов сопряженных элементов.

Перечислим все неприводимые представления этой группы. В сокращенном виде одномерные представления можно задать так:

$$T_k(a) = (-1)^k,\ T_k(b) = 1,\ k = \overline{1,8};\ T_k(a) = (-1)^k,\ T_k(b) = -1,\ k = \overline{8,16};$$

$$T_k(c) = i^k,\ k = \overline{1,16}.$$

Двумерные неприводимые представления:

$$T_k(a) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ T_k(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ k = \overline{17,20};$$

$$T_k(c) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}^k,\ k = \overline{17,20}.$$

Допустимым представлением является прямая сумма всех неприводимых представлений. При этом элементы a, a^3, ac^2, a^3c^2 соответствуют параболической форме $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$, остальные элементы порядка 4 соответствуют $\eta^6(4z)$, элемент a^2 соответствует параболической форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальные элементы порядка 2 соответствуют форме $\eta^{12}(2z)$.

Эта группа содержит подгруппу $D_4 \times Z_2$.

4.2. Группа $Q_8 \times Z_4$.

Генетический код этой группы:

$< a, b, c : a^4 = b^4 = c^4 = e,\ b^{-1}ab = a^3,\ a^2 = b^2,\ ac = ca,\ bc = cb >$.

В группе 20 классов сопряженных элементов.

Перечислим все неприводимые представления этой группы. В сокращенном виде одномерные представления можно задать так:

$$T_k(a) = (-1)^k, T_k(b) = 1, k = \overline{1,8};\ \ T_k(a) = (-1)^k, T_k(b) = -1, k = \overline{8,16};$$

$$T_k(c) = i^k, k = \overline{1,16}.$$

Двумерные неприводимые представления:

$$T_k(a) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ \ T_k(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \ k = \overline{17,20};$$

$$T_k(c) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}^k,\ k = \overline{17,20}.$$

Допустимым представлением является прямая сумма всех неприводимых представлений. При этом элементы a, a^3, b, b^3, ab, a^3b, ac^2, a^3c^2, bc^2, b^3c^2, a^2c^2, abc^2, a^3bc^2 соответствуют параболической форме $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$, остальные элементы порядка 4 соответствуют $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$, $\eta^6(4z)$, элемент a^2 соответствует параболической форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальные элементы порядка 2 соответствуют форме $\eta^{12}(2z)$.

Эта группа содержит подгруппу $Q_8 \times Z_2$.

4.3. Группа $< a, b : a^8 = e,\ b^4 = e,\ b^{-1}ab = a^3 >$.

В группе 14 классов сопряженных элементов.

Перечислим все неприводимые представления этой группы.

$$T_k(a) = 1,\ T_k(b) = i^k,\ k = \overline{1,4};\ T_k(a) = -1,\ T_k(b) = i^k,\ k = \overline{5,8};$$

двумерные неприводимые представления:

$$T_9(a) = T_{10}(a) = \begin{pmatrix} \zeta_8 & 0 \\ 0 & \zeta_8^3 \end{pmatrix},\quad T_{11}(a) = T_{12}(a) = \begin{pmatrix} \zeta_8^5 & 0 \\ 0 & \zeta_8^7 \end{pmatrix},$$

$$T_{13}(a) = T_{14}(a) = \begin{pmatrix} \zeta_8^2 & 0 \\ 0 & \zeta_8^6 \end{pmatrix},\qquad T_9(b) = T_{11}(b) = T_{13}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_{10}(b) = T_{12}(b) = T_{14}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Допустимым представлением является прямая сумма, в которую представления T_{13} и T_{14} входят с кратностью 2, остальные представления входят с кратностью 1. При этом все элементы порядка 8 соответствуют параболической форме $\eta^2(8z)\eta^2(4z)$, элементы a^2, a^6, a^2b^2, a^6b^2 соответствуют параболической форме $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$, остальные элементы порядка 4 соответствуют форме $\eta^6(4z)$, элемент a^4 соответствует параболической форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальные элементы порядка 2 соответствуют форме $\eta^{12}(2z)$.

Эта группа содержит неабелеву подгруппу порядка 16 с генетическим кодом $< a, b : a^8 = e,\ b^2 = e,\ b^{-1}ab = a^3 >$.

4.4. Группа $< a, b : a^8 = e,\ b^4 = e,\ b^{-1}ab = a^5 >$.

В группе 20 классов сопряженных элементов.

Перечислим все неприводимые представления этой группы.

$T_k(a) = 1,\ T_k(b) = i^k, 1,\ k = \overline{1,4};$
$T_k(a) = -1, T_k(b) = i^k,\ k = \overline{5,8};$
$T_k(a) = i, T_k(b) = i^k, 1,\ k = \overline{9,12};$
$T_k(a) = -i, T_k(b) = i^k,\ k = \overline{13,16}.$

Двумерные неприводимые представления:

$$T_{17}(a) = T_{18}(a) = \begin{pmatrix} \zeta_8 & 0 \\ 0 & \zeta_8^5 \end{pmatrix}, \quad T_{19}(a) = T_{20}(a) = \begin{pmatrix} \zeta_8^3 & 0 \\ 0 & \zeta_8^7 \end{pmatrix},$$

$$T_{17}(b) = T_{19}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{18}(b) = T_{20}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Допустимым представлением является прямая сумма всех неприводимых представлений с кратностью 1. При этом все элементы порядка 8 соответствуют параболической форме $\eta^2(8z)\eta^2(4z)$, элементы a^2, a^6, a^2b^2, a^6b^2 соответствуют параболической форме $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$, остальные элементы порядка 4 соответствуют форме $\eta^6(4z)$, элемент a^4 соответствует параболической форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальные элементы порядка 2 соответствуют форме $\eta^{12}(2z)$.

Эта группа содержит неабелеву подгруппу порядка 16 с с генетическим кодом $< a, b : a^8 = e,\ b^2 = e,\ b^{-1}ab = a^5 >$.

4.5. Группа $< a, b : a^8 = e,\ b^4 = e,\ b^{-1}ab = a^7 >$.

В группе 14 классов сопряженных элементов.

Перечислим все неприводимые представления этой группы.

$$T_k(a) = 1,\ T_k(b) = i^k,\ 1, k = \overline{1,4};\ T_k(a) = -1,\ T_k(b) = i^k,\ k = \overline{5,8};$$

Двумерные неприводимые представления:

$$T_9(a) = T_{10}(a) = \begin{pmatrix} \zeta_8 & 0 \\ 0 & \zeta_8^7 \end{pmatrix}, \quad T_{11}(a) = T_{12}(a) = \begin{pmatrix} \zeta_8^3 & 0 \\ 0 & \zeta_8^5 \end{pmatrix},$$

$$T_{13}(a) = T_{14}(a) = \begin{pmatrix} \zeta_8^2 & 0 \\ 0 & \zeta_8^6 \end{pmatrix}, \quad T_9(b) = T_{11}(b) = T_{13}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_{10}(b) = T_{12}(b) = T_{14}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Допустимым представлением является прямая сумма, в которую представления T_{13} и T_{14} входят с кратностью 2, остальные представления входят с кратностью 1. При этом все элементы порядка 8 соответствуют параболической форме $\eta^2(8z)\eta^2(4z)$, элементы a^2, a^6, a^2b^2, a^6b^2 соответствуют параболической форме $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$, остальные элементы порядка 4 соответствуют форме $\eta^6(4z)$, элемент a^4 соответствует параболической форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальные элементы порядка 2 соответствуют форме $\eta^{12}(2z)$.

Эта группа содержит неабелеву подгруппу порядка 16 с с генетическим кодом $< a, b : a^8 = e,\ b^2 = e,\ b^{-1}ab = a^7 >$ и подгруппу с генетическим кодом $< a, b : a^4 = e,\ b^4 = e,\ b^{-1}ab = a^3 >$.

4.6. Группа $< 2, 2, 2 >_2 \times Z_2$.

Генетический код этой группы:

$< a, b, c, d : a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e,\ abc = bca = cab,\ ad = da,\ bd = db,\ cd = dc >$.

В этой группе 20 классов сопряженных элементов. Перечислим их.

$$1.\{e\}2.\{abc\}3.\{acb\}4.\{(ba)^2\}5.\{d\}6.\{a, bab\}7.\{b, aba\}8.\{c, aca\}9.\{ab, ba\}10.\{bc, cb\}$$
$$11.\{ac, ca\}12.\{abcd\}13.\{acbd\}14.\{d(ba)^2\}15.\{ad, babd\}16.\{bd, abad\}17.\{cd, acad\}$$
$$18.\{abd, bad\}19.\{bcd, cbd\}20.\{acd, cad\}$$

Коммутант группы $G' \cong < (bc)^2 >$.

$G/G' \cong Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2$.

У этой группы 16 одномерных неприводимых представлений (значения 1 и -1 чередуются на элементах a, b, c, d.)

Двумерные неприводимые представления:

$$T_1(a) = T_2(b) = T_3(a) = T_4(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_1(c) = T_2(c) = T_3(c) = T_4(c) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_2(a) = T_1(b) = T_4(a) = T_3(b) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

$$T_1(d) = T_2(d) = E, T_3(d) = T_4(d) = -E.$$

Допустимым представлением является прямая сумма всех неприводимых представлений. При этом все элементы соответствуют параболической форме $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$, элемент $(ab)^2$ соответствует параболической форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальные элементы порядка 2 соответствуют форме $\eta^{12}(2z)$.

Эта группа содержит неабелеву подгруппу порядка 16 с с генетическим кодом $< a, b, c : a^2 = b^2 = c^2 = e,\ abc = bca = cab >$.

4.7. Группа $G \cong < a, b, c : a^4 = b^4 = c^2 = (ab)^2 = (a^3b)^2 = e,\ ca = ac,\ bc = cb >$.

В этой группе 20 классов сопряженных элементов. Перечислим их.

$$1.\{e\}2.\{a^2\}3.\{b^2\}4.\{a^2b^2\}5.\{c\}6.\{b, a^2b^3\}7.\{b^3, a^2b\}8.\{a, a^3b^2\}9.\{a^3, ab^2\}10.\{ab, a^3b^3\}$$
$$11.\{ab^3, a^3b\}12.\{a^2c\}13.\{b^2c\}14.\{a^2b^2c\}15.\{bc, a^2b^3c\}16.\{b^3c, a^2bc\}17.\{ac, a^3b^2c\}$$
$$18.\{a^3c, ab^2c\}19.\{abc, a^3b^3c\}20.\{ab^3c, a^3bc\}$$

Коммутант группы $G' \cong < a^2b^2 >$.

$G/G' \cong Z_2 \times Z_2 \times Z_4$.

У этой группы 16 одномерных неприводимых представлений.

Двумерные неприводимые представления:

$$T_1(a) = T_3(a) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},\ T_2(a) = T_4(a) = T_1(b) = T_3(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$T_2(b) = T_4(b) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$T_k(c) = (i)^k E,\ k = \overline{1,4}.$$

Искомое представление является прямой суммой всех неприводимых представлений. При этом все элементы порядка 4 соответствуют параболической форме $\eta^6(4z)$, все элементы порядка 2 соответствуют форме $\eta^{12}(2z)$.

4.8. Группа $< a,b,c\ :\ b^2 = a^4 = (ab)^2,\ a^8 = e,\ b^{-1}ab = a^7,\ ac = ca,\ bc = = cb >$.

В группе 14 классов сопряженных элементов.

Эта группа является прямым произведением группы Z_2 и группы обобщенных кватернионов.

Перечислим все неприводимые представления этой группы.

Коммутант группы $G' \cong < (a)^2 >$.

$G/G' \cong Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2$.

У этой группы 16 одномерных неприводимых представлений (значения 1 и -1 чередуются на элементах a,b,c,d.)

Двумерные неприводимые представления:

$$T_1(a) = T_4(a) = \begin{pmatrix} \zeta_8 & 0 \\ 0 & \zeta_8^7 \end{pmatrix}, \quad T_2(a) = T_5(a) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$T_3(a) = T_6(a) = \begin{pmatrix} \zeta_8^3 & 0 \\ 0 & \zeta_8^5 \end{pmatrix}, \quad T_1(b) = T_3(b) = T_4(b) = T_6(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_2(b) = T_5(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Допустимым представлением является прямая сумма всех неприводимых представлений, в которую все неприводимые представления входят с кратностью 1, а представления T_2, T_5 входят с кратностью 2. При этом все элементы порядка 8 соответствуют параболической форме $\eta^2(8z)\eta^2(4z)$, все элементы порядка 2 соответствуют параболической форме $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$, элемент a^4 соответствует параболической форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальные элементы порядка 2 соответствуют форме $\eta^{12}(2z)$.

Эта группа содержит неабелеву подгруппу порядка 16 с генетическим кодом $< a,b : b^2 = a^4 = (ab)^2,\ a^8 = e,\ b^{-1}ab = a^7 >$.

4.9. Группа $< a,b : a^{16} = e,\ b^2 = e,\ b^{-1}ab = a^7 >$.

В группе 11 классов сопряженных элементов. Центр группы порожден элементом a^8.

Перечислим все неприводимые представления этой группы.

$T_k(a) = 1,\ T_k(b) = i^k, 1,\ k = \overline{1,4}$;

$T_k(a) = -1,\ T_k(b) = i^k,\ k = \overline{5,8}$;

двумерные неприводимые представления:

$$T_k(a) = \begin{pmatrix} \zeta_{16}^k & 0 \\ 0 & \zeta_{16}^{7k} \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1,4}; \quad T_5(a) = \begin{pmatrix} \zeta_{16}^6 & 0 \\ 0 & \zeta_{16}^{10} \end{pmatrix},$$

$$T_6(a) = \begin{pmatrix} \zeta_{16}^9 & 0 \\ 0 & \zeta_{16}^{15} \end{pmatrix}, \quad T_7(a) = \begin{pmatrix} \zeta_{16}^{11} & 0 \\ 0 & \zeta_{16}^{13} \end{pmatrix},$$

$$T_k(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1,7}.$$

Одномерные неприводимые представления:

$T_k(a) = 1,\ T_k(b) = (-1)^k,\ k = 8,\ 9;$

$T_k(a) = -1,\ T_k(b) = (-1)^k,\ k = 10,\ 11.$

Допустимым представлением является прямая сумма, в которую представления T_2, T_4, T_5 входят с кратностью 2, остальные неприводимые представления входят с кратностью 1. При этом все элементы порядка 16 соответствуют параболической форме $\eta(16z)\eta(8z)$, все элементы порядка 8 соответствуют параболической форме $\eta^2(8z)\eta^2(4z)$, элементы a^4, a^{12} соответствуют параболической форме $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$, элемент a^8 соответствует параболической форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальные элементы порядка 2 соответствуют форме $\eta^{12}(2z)$.

Эта группа содержит неабелеву подгруппу порядка 16 с с генетическим кодом $< a, b : a^8 = e,\ b^2 = e,\ b^{-1}ab = a^7 >$.

4.10. Группа $< a, b : a^{16} = e,\ b^2 = e,\ b^{-1}ab = a^9 >$.

В группе 20 классов сопряженных элементов. Центр группы порожден элементом a^2.

Перечислим все неприводимые представления этой группы.

$T_k(a) = \zeta_8^k,\ T_k(b) = 1,\ k = \overline{1,8};$

$T_k(a) = \zeta_8^k,\ T_k(b) = -1,\ k = \overline{9,16};$

двумерные неприводимые представления:

$$T_{17}(a) = \begin{pmatrix} \zeta_{16} & 0 \\ 0 & \zeta_{16}^9 \end{pmatrix}, \quad T_{18}(a) = \begin{pmatrix} \zeta_{16}^3 & 0 \\ 0 & \zeta_{16}^{11} \end{pmatrix},$$

$$T_{19}(a) = \begin{pmatrix} \zeta_{16}^5 & 0 \\ 0 & \zeta_{16}^{13} \end{pmatrix}, \quad T_{20}(a) = \begin{pmatrix} \zeta_{16}^7 & 0 \\ 0 & \zeta_{16}^{15} \end{pmatrix},$$

$$T_k(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \overline{17,20}.$$

Допустимым представлением является прямая сумма всех неприводимых представлений с кратностью 1. При этом все элементы порядка 16 соответствуют параболической форме $\eta(16z)\eta(8z)$, все элементы порядка 8 соответствуют параболической форме $\eta^2(8z)\eta^2(4z)$, все элементы порядка 4 соответствуют параболической форме $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$, элемент a^8 соответствует параболической форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальные элементы порядка 2 соответствуют форме $\eta^{12}(2z)$.

Литература

[1] Dummit D., Kisilevsky H., McKay J. Multiplicative products of η-functions Contemp. Math. 1985. V. 45. P. 89–98.

[2] Mason G. Finite groups and Hecke operators // Math. Ann. 1989. V. 282. P. 381–409.

[3] Mason G. M_{24} and certain automorphic forms // Contemp. Math. 1985. V. 45. P. 223–244.

[4] Koike M. On McKay's conjecture // Nagoya Math. J. 1984. V. 95. P. 85–89.

[5] Kondo T. Examples of multiplicative η-products // Sci. Pap. Coll. Arts and Sci. Univ. Tokyo. 1986. V. 35. P. 133–149.

[6] Martin Y., Ken O. Eta-quotients and elliptic curves // Proc. Amer. Math. Soc., 1997. V. 125. No. 11. P. 3169–3176.

[7] Gordon B., Sinor S. Multiplicative properties of η-products // Lecture Notes in Math. Springer-Verlag. 1989. V. 1395. P. 173–200.

[8] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. 2004. 216 p.

[9] Воскресенская Г.В. Модулярные формы и представления групп диэдра // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 1. С. 130–133.

[10] Воскресенская Г.В. Параболические формы и конечные подгруппы в $SL(5,\mathbf{C})$ // Функцион. анализ и его прил. 1995. Т. 29. № 2. С. 1–73.

[11] Воскресенская Г.В. Модулярные формы и регулярные представления групп порядка 24 // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 2. С. 292–294.

[12] Voskresenskaya G.V. One special class of modular forms and group representations // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux. 1999. V. 11. P. 247–262.

[13] Воскресенская Г.В. Метациклические группы и модулярные формы // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 2. С. 18–25.

[14] Воскресенская Г.В. Абелевы группы и модулярные формы // Вестник СамГУ. 2003. №2(28). С. 21–35.

Поступила в редакцию 19/ V/2004;
в окончательном варианте – 19/ V/2004.

MODULAR FORMS AND GROUPS OF ORDER 2^n [3]

© 2004 G.V. Voskresenskaya[4]

In the paper groups of order 16 and 32 are studied. It is shown that their cusp forms associated with all elements of these groups by a faithful representation are modular forms from the special class with multiplicative Fourier coefficients.

Paper received 19/ V/2004.
Paper accepted 19/ V/2004.

---

[3]Communicated by Dr. Sci (Phys. & Math.) Prof. V.E. Voskresenskii.

[4]Voskresenskaya Galina Valentinovna (vosk@ssu.samara.ru), Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.