

О ГРУППОВЫХ СВОЙСТВАХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ВСЕ РЕШЕНИЯ КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ИНВАРИАНТНЫМИ¹

© 2004 О.Ф. Меньших²

Исследуются группы точечных преобразований для квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, все гладкие решения которых являются функционально-инвариантными. Коэффициенты инфинитезимальных операторов этих уравнений всегда зависят от нескольких произвольных функций. Получен критерий, позволяющий выделить уравнение с указанными свойствами. Построены классы таких уравнений с двумя и тремя независимыми переменными. Вычислены группы преобразований нескольких конкретных уравнений. Среди них отметим уравнение, полученное Г. Монжем и описывающее некоторый класс линейчатых поверхностей, а также известное в физике уравнение Борна—Инфельда, записанное в неявной форме.

1. Введение

1. Работа посвящена изучению групповых свойств специальных квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Предварительно необходимо привести известные факты о функционально-инвариантных решениях (ф.-и. решениях) линейных уравнений второго порядка.

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{ij} + a_i(x)u_i) = 0, \quad (1.1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : a_{ij}(x) \in C^2(D) : a_i(x) \in C^1(D)$, D — некоторая область n -мерного евклидова пространства, $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $(i, j = 1, \dots, n)$.

¹Представлена доктором физико-математических наук Л.М. Берковичем.

²Меньших Олег Федорович, кафедра высшей математики Самарского государственного аэрокосмического университета, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Определение 1.1 [1, 2, 3]. Функция $u(x) \in C^2(D)$ называется ф.-и. решением уравнения (1.1), если $F(u)$ является решением уравнения (1.1) при произвольной функции F , имеющей непрерывные производные до второго порядка включительно.

Если $u(x)$ — ф.-и. решение уравнения (1.1), то оно удовлетворяет также и уравнению характеристик

$$\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_i u_j) = 0. \quad (1.2)$$

Для волнового уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} \quad (1.3)$$

В.И. Смирновым и С.Л. Соболевым [1, 2] была получена формула

$$x + b(u)y + \sqrt{1 + b^2(u)}t + \varphi(u) = 0, \quad (1.4)$$

где $b(u)$ и $\varphi(u)$ — произвольные функции, которая содержит все ф.-и. решения уравнения (1.3). Формула (1.4) нашла широкое применение при решении задач о распространении колебаний в различных средах [2, 4].

Ф.-и. решения в случае линейных уравнений изучались также во многих других работах (см. обзор [3]).

2. Некоторые специальные квазилинейные уравнения второго порядка также могут иметь ф.-и. решения.

Рассмотрим класс квазилинейных уравнений вида

$$L(u) = u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n A_{ij}u_{ij} - 2 \sum_{i=1}^n A_{0i}u_{ti} = 0, \quad (1.5)$$

где

$$u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad u_{ti} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \quad (i = 1 \dots n).$$

Предположим, что коэффициенты A_{ij}, A_{0i} являются однородными функциями нулевой степени относительно первых производных функции u . Точно так же, как и в линейном случае, если уравнение (1.5) допускает ф.-и. решение, то такое решение $u(x, t)$ удовлетворяет и уравнению, аналогичному (1.2):

$$(u_t^2) = \sum_{i,j=1}^n (A_{ij}u_i u_j + 2A_{0i}u_t u_i). \quad (1.6)$$

Здесь возможны два случая. В первом случае уравнение (1.6) тождественно равно нулю и определяет связь между первыми производными функции u . Если система (1.5), (1.6) оказывается совместной, то ф.-и. решения уравнения (1.5) будут вкладываться в класс так называемых бегущих волн уравнения (1.5) или решений с дифференциальными связями [5, 6].

В работах [7, 8] находились ф.-и. решения уравнения (1.5) в некоторых частных случаях. Во втором случае уравнение (1.6) удовлетворяется

тождественно. Это будет иметь место при весьма специальном "устройстве" коэффициентов A_{ij}, A_{ii} ($i, j = 1 \dots n$).

Во втором случае любое решение уравнения (1.5) будет ф.-и. решением.

3. Приведем здесь два важных для дальнейшего изложения примера. Известное в физике уравнение Борна—Инфельда [9, 10, 11] можно записать в такой форме

$$u_{tt} - u_{xx} + (u_x)^2 u_{tt} - 2u_x u_t u_{xt} + (u_t)^2 u_{xx} = 0. \quad (1.7)$$

В работе [9] было обнаружено, что уравнение (1.7) имеет точные ф.-и. решения

$$u = \Phi_1(x - t), \quad u = \Phi_2(x + t), \quad (1.8)$$

где Φ_i — произвольные функции ($i = 1, 2$).

Нелинейное уравнение (1.7) допускает решения (1.8) ввиду того, что "нелинейная часть" уравнения (1.7), т.е. уравнение

$$(u_x)^2 u_{tt} - 2u_x u_t u_{xt} + (u_t)^2 u_{xx} = 0 \quad (1.9)$$

удовлетворяется, если в него подставить решение

$$u = \psi(x + at),$$

где ψ — произвольная функция, a — произвольная постоянная.

Нетрудно проверить, что любое гладкое решение уравнения (1.9) будет ф.-и. решением.

Замечание 1. Уравнение (1.9), которое обычно записывается в форме

$$(u_y)^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (u_x)^2 u_{yy} = 0, \quad (1.10)$$

было выведено Г. Монжем [12] и описывает все линейчатые поверхности, образованные движением прямой линии параллельно плоскости XOY . Оно допускает два промежуточных интеграла [13, с. 62] и широкую группу Ли—Беклунда [14]. Уравнение Борна—Инфельда в случае трех независимых переменных [9, 15, 16] можно также записать в форме, аналогичной записи уравнения (1.7)

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} + (u_x^2 + u_y^2)u_{tt} - 2u_t u_x u_{xt} - 2u_t u_y u_{ty} + \\ + (u_t^2 - u_y^2)u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + (u_t^2 - u_x^2)u_{yy} = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Непосредственной проверкой устанавливается, что все решения уравнения

$$\begin{aligned} (u_x^2 + u_y^2)u_{tt} - 2u_t u_x u_{xt} - 2u_t u_y u_{ty} + (u_t^2 - u_y^2)u_{xx} + \\ + 2u_x u_y u_{xy} + (u_t^2 - u_x^2)u_{yy} = 0, \end{aligned} \quad (1.12)$$

т.е. "нелинейной части" уравнения (1.11), являются ф.-и. решениями.

Это обстоятельство является объяснением такого результата: все ф.-и. решения уравнения (1.11) описываются формулой Смирнова—Соболева (1.4) [15, 16].

Замечание 2. Можно показать, что если искать решение уравнения Борна—Инфельда (1.7) в неявной форме $v(t, x, u) = 0$, то функция $v(t_1, x_1, u_1)$ будет удовлетворять уравнению (1.12) ($t_1 = t$; $x_1 = x$; $u_1 = u$).

4. В данной статье будем рассматривать групповые свойства некоторых квазилинейных уравнений вида (1.5), для которых соответствующее уравнение (1.6) обращается в тождество. В частности, рассмотрим группы точечных преобразований, которые допускаются уравнениями (1.9) и (1.12).

2. Формулировка основных результатов работы

1. Ограничимся рассмотрением класса квазилинейных уравнений (1.5), коэффициенты которых являются однородными функциями нулевой степени относительно u_i , u_t , ($i = 1 \dots n$). Введем следующее

Определение 2.1. Будем говорить, что все решения $u = u(x, t)$ класса C^2 уравнения (1.5) являются ф.-и. решениями, если оператор $L(u)$ в (1.5) удовлетворяет условию

$$L[F(u)] = 0 \leftrightarrow L[u] = 0 \quad (2.1)$$

при любой функции $F[u]$ класса C^2 .

Условие (2.1) эквивалентно тому, что здесь уравнение (1.6) тождественно удовлетворяется. Другими словами, в отличие от линейного случая, здесь произвольная функция от *любого решения* уравнения (1.5) снова будет решением. Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть уравнение (1.5) инвариантно относительно подгруппы точечных преобразований с оператором

$$L_\infty = \psi(u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (2.2)$$

где $\psi(u)$ — достаточно гладкая произвольная функция.

Тогда все гладкие решения уравнения (1.5) являются ф.-и. решениями.

Смысл символа L_∞ поясняется ниже.

2. В случае двух независимых переменных можно записать единое представление уравнений (1.5).

Справедлива

Теорема 2. Для того чтобы все гладкие решения уравнения (1.5) в случае двух независимых переменных были бы ф.-и. решениями, это уравнение должно иметь следующую структуру:

$$H(u) = u_{tt} + 2B(\theta)u_{tx} - [2\theta B(\theta) + \theta^2]u_{xx} = 0, \quad (2.3)$$

где $B(\theta)$ — произвольная функция, $\theta = \frac{u_t}{u_x}$, $u_x \neq 0$.

Приведем примеры уравнений (2.3); некоторые из них будут записаны в несколько иной эквивалентной форме.

Пример 1.

$$B(\theta) = -\theta.$$

Этот пример соответствует уравнению (1.9).

Пример 2 [8].

$$B(\theta) = 0.$$

Здесь получим уравнение вида

$$u_x^2 u_{tt} - u_t^2 u_{xx} = 0. \quad (2.4)$$

Пример 3 [17, с. 304].

$$B(\theta) = -\frac{\theta}{2}.$$

Получим уравнение

$$u_x u_{tt} - u_x u_{tx} = 0, \quad (2.5)$$

которое имеет общее решение

$$u = \varphi(x + \psi(t)). \quad (2.6)$$

Формула (2.6) означает, что уравнение (2.5) может описывать распространение волн произвольной формы, которые распространяются вдоль оси OX с произвольной скоростью.

Пример 4.

$$B(\theta) = \exp(\theta).$$

Здесь придем к следующему модельному уравнению

$$u_{tt} + 2 \exp(\theta) u_{tx} - [\theta^2 + 2\theta \exp(\theta)] u_{xx} = 0. \quad (2.7)$$

3. Для вычисления группы G локальных преобразований, допускаемой уравнениями (2.3), искомый оператор запишем в виде [18–22]

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \varphi \frac{\partial}{\partial u}, \quad (2.8)$$

где искомые функции ξ, τ, φ зависят от x, t, u .

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. Для уравнения (1.9) функции ξ, τ, φ имеют следующее представление:

$$\begin{aligned} \xi &= x_t \psi_1(u) + x^2 \psi_2(u) + x \psi_3(u) + t \psi_4(u) + \psi_5(u), \\ \tau &= x_t \psi_2(u) + t^2 \psi_1(u) + x \psi_6(u) + t \psi_7(u) + \psi_8(u), \\ \varphi &= \psi_9(u), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\psi_i(u)$ — произвольные функции $i = (1 \dots 9)$.

Замечание 3. Таким образом, уравнение (1.9) так же, как и весь класс уравнений (2.3), допускает бесконечномерную алгебру Ли точечных преобразований (см. ниже). Поэтому оператор (2.2) снабжен индексом ∞ .

4. Справедлива

Теорема 4. Уравнение (2.3) при произвольной функции $B(\theta)$ допускает бесконечномерную алгебру Ли [18], преобразований $L_3 \oplus L_\infty$. Ее конечная часть порождается базисными операторами

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}; \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.10)$$

Бесконечномерной части L_∞ допускаемой алгебры соответствует оператор (2.2).

5. Приведем результаты вычислений функций ξ, τ, φ для примеров 2, 3, 4.

Пример 2.

$$\xi = ax + c_2, \quad \tau = c_3 t + c_4; \quad \varphi = \psi(u). \quad (2.11)$$

Пример 3.

$$\begin{aligned} \xi &= \psi_1(x); \quad \tau = c_1 t + \psi_2(x) + \psi_3(u); \\ \varphi &= \psi_4(u), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(u)$ — произвольные функции.

Пример 4. Здесь групповые свойства уравнения (2.7) описываются теоремой (4). В формулах (2.11), (2.12) $\psi(u)$ и $\psi_4(u)$ — произвольные функции.

6. В случае трех независимых переменных уравнение (1.5) будем рассматривать в форме

$$u_{tt} = \sum_{i,j=1}^2 A_{ij}(G_1, G_2) u_{ij} + 2 \sum_{i=1}^2 A_{0i}(G_1, G_2) u_{ti}, \quad (2.13)$$

где $G_1 = \frac{u_1}{u_t}$; $G_2 = \frac{u_2}{u_t}$ ($u_t \neq 0$; $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$) ($i = 1, 2$).

Аналогом теоремы (2) здесь является следующее утверждение

Теорема 5. Для того чтобы все гладкие решения уравнения (2.13) были бы ф.-и. решениями, коэффициенты A_{ij}, A_{0i} должны быть связаны условием:

$$\sum_{i,j=1}^2 A_{ij}(G_1, G_2) G_i G_j + 2 \sum_{i=1}^2 A_{0i}(G_1, G_2) G_i = 1. \quad (2.14)$$

Нетрудно проверить, что для уравнения (1.12) условие (2.14) будет выполняться.

7. Оператор X для уравнения (1.12) запишем в виде

$$X = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial y} + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.15)$$

где ξ_1, η_1, τ_1 зависят от t, x, y, u .

Групповые свойства уравнения (1.12) определяются следующей теоремой.

Теорема 6. Координаты оператора (2.15) для уравнения (1.12) определяются формулами:

$$\begin{aligned} \xi &= \psi_1(u)x + \psi_2(u)y + \psi_3(u)t + \psi_4; \\ \eta &= -\psi_2(u)x + \psi_1(u)y + \psi_5(u)t + \psi_6 u; \\ \tau &= \psi_3(u)x + \psi_5(u)y + \psi_1(u)t + \psi_7(u); \\ \varphi &= \psi_8(u), \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $\psi_i(u)$ — 8 произвольных функций.

3. Краткое доказательство полученных результатов

Доказательство теоремы 1.

Пусть уравнение (1.5) допускает бесконечную подгруппу группы G точечных преобразований с оператором (2.2). Для каждой функции $\psi(u)$ можно построить однопараметрическую группу, преобразования которой получаются интегрированием уравнения Ли [21, с. 8]

$$\frac{\partial u'}{\partial \alpha} = \psi(u'), \quad u'|_{\alpha=0} = u. \quad (3.1)$$

В силу теоремы Коши получим локальное единственное решение задачи (3.1)

$$u' = F(u, \alpha). \quad (3.2)$$

Здесь каждой гладкой функции $\psi(u)$ будет соответствовать функция $F(u, \alpha)$ с параметром α , причем $F(u, 0) = u$.

Таким образом, уравнение (1.5) при наличии оператора (2.2) будет инвариантным относительно точечного преобразования

$$x'_i = x; \quad t' = t; \quad u' = F(u, \alpha). \quad (3.3)$$

А это означает, что для любого решения уравнения (1.5) будет выполняться свойство (2.1), в котором можно заменить $F(u)$ на $F(u, \alpha)$.

2. Доказательство теоремы 2.

В случае двух независимых переменных условие (1.6) будет таким

$$(u_t)^2 = A_{11}(\theta)(u_x)^2 + 2A_{01}(\theta)u_t u_x, \quad (3.4)$$

где $\theta = \frac{u_t}{u_x}$.

Обозначая $B(\theta) = A_{01}(\theta)$, исключая из (3.4) $A_{11}(\theta)$ и подставляя значение $A_{11}(\theta)$ в соответствующее уравнение (1.5), придем к уравнению (2.3).

3. Доказательство теорем 3 и 4.

В настоящее время алгоритм нахождения групп точечных преобразований для различных дифференциальных уравнений достаточно хорошо разработан [19–22], однако даже для сравнительно простых дифференциальных уравнений в частных производных, которые рассматриваются в настоящей статье, необходимо преодолеть большие вычислительные трудности.

Поэтому в данной статье ввиду недостатка места не будем приводить вычисления, а только кратко остановимся на основных моментах указанного алгоритма.

Оператор (2.8) необходимо два раза продолжить [19–22], что приводит к новому оператору

$$X_2 = X + \Phi^x \frac{\partial}{\partial p} + \Phi^t \frac{\partial}{\partial g} + \Phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \Phi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \Phi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}}, \quad (3.5)$$

$$(p = u_x; \quad g = u_t)$$

коэффициенты которого вычисляются по хорошо известным формулам [19–22].

Критерий инвариантности, например, уравнения (2.3) относительно группы точечных преобразований имеет вид:

$$X_2(H)|_{H=0} = 0. \quad (3.6)$$

Подставляя в (3.6) формулы для коэффициентов оператора (3.5) и переходя на многообразие $H = 0$, получим соотношение вида

$$\ell_1 u_{xx} + 2\ell_2 u_{xt} + \ell_3 = 0. \quad (3.7)$$

Коэффициенты ℓ_i не зависят от u_{xx}, u_{xt} , поэтому после "расщепления" (3.7) придем к системе трех уравнений

$$\ell_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.8)$$

Для уравнения (1.9) и для других уравнений, которые здесь будем рассматривать, соотношения (3.8) являются многочленами невысокой степени с коэффициентами, зависящими от производных функций ξ, τ, φ первого и второго порядков. Поэтому необходимо расщепить соотношения (3.8) по p, g , что приводит к искомой системе дифференциальных уравнений в частных производных относительно ξ, τ, φ . Важно отметить, что указанная система уравнений является, как правило, сильно переопределенной, линейной, однородной и совместной [18–21].

Приведем здесь так называемую определяющую систему [18–21] для уравнения (1.9)

$$\begin{aligned} \varphi_x = 0; \quad \varphi_t = 0; \quad \varphi_{xx} = 0; \quad \varphi_{xt} = 0; \quad \varphi_{tt} = 0; \\ \xi_{tt} = 0; \quad \tau_{xx} = 0; \quad \xi_{xx} - 2\tau_{xt} = 0; \quad h_{tt} - 2\xi_{xt} = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из (3.9) видно, что функция φ не зависит от t, x и, значит, является произвольной функцией от u . Это является характерным моментом для всех рассматриваемых здесь уравнений. Интегрируя переопределенную систему (3.9), придем к формулам (2.9).

При доказательстве теоремы (4) необходимо в соотношениях (3.9) приравнять к нулю все коэффициенты при $B(\theta), B^2(\theta), B'(\theta)$. В результате вычислений определяющая система для уравнения (2.3) при произвольной функции $B(\theta)$ будет следующей:

$$\begin{aligned} \varphi_x = 0; \quad \varphi_t = 0; \quad \varphi_{tt} = 0; \quad \varphi_{tx} = 0; \quad \varphi_{xx} = 0, \\ \tau_x = 0; \quad \tau_{tt} = 0; \quad \xi_{tt} = 0; \quad \xi_t = 0; \quad \tau_t - \xi_x = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Общее решение этой системы будет зависеть от одной произвольной функции и трех постоянных, что приводит к формулам (2.2), (2.10).

4. На подробностях получения формул (2.11), (2.12) останавливаться не будем.

5. Доказательство теоремы (5) проводится аналогично доказательству теоремы (2).

6. Теорема (6) доказывается совершенно аналогично теоремам (3) и (4), поскольку алгоритм вычисления точечных групп преобразований "работает" для произвольных систем дифференциальных уравнений. Заметим толь-

ко, что здесь вычисления более громоздкие, чем в случае уравнений с двумя независимыми переменными.

Определяющая система здесь гораздо более сложная и ее приводить не будем.

Заключение

Итак, можно сделать вывод, что каждое уравнение (1.5), все гладкие решения которого являются ф.-и. решениями, инвариантно относительно группы точечных преобразований, связанной с оператором (2.2). Можно показать, что если дано уравнение типа (1.5), коэффициенты которого зависят только от первых производных функции u , то требование инвариантности этого уравнения относительно группы преобразований с оператором (2.2) приводит к определенной однородности коэффициентов A_{ij}, A_{0i} аналогично уравнению (2.13) при $n = 2$.

Когда статья была закончена, Л.М. Беркович сообщил мне о работе [23, с. 139, 446], в которой без доказательства было приведено описание всего класса нелинейных уравнений 2-го порядка с двумя независимыми переменными, все решения которых являются функционально-инвариантными.

Литература

- [1] Смирнов В.И., Соболев С.Л. Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний. Труды сейсмологического института АН СССР. Л.: 1932. Вып. 20. С. 1–37.
- [2] Соболев С.Л. Некоторые вопросы распространения колебаний // Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. О.Н.Р.И., 1937. 1050 с.
- [3] Еругин Н.П., Смирнов М.М. Функционально-инвариантные решения дифференциальных уравнений // Диффер. уравнения. 1981. Т. 17. №5. С. 853–865.
- [4] Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
- [5] Меньших О.Ф. О бегущих волнах для нелинейных уравнений с частными производными второго порядка // Изв. вузов. Математика., 1972. №4. С. 84–92.
- [6] Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984. 270 с.
- [7] Меньших О.Ф. Функционально-инвариантные решения одного класса уравнений с частными производными второго порядка // ДАН СССР, 1972. С. 30–32.

- [8] Меньших О.Ф. О функционально-инвариантных решениях квазилинейных уравнений с частными производными второго порядка // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. №3. С. 533–540.
- [9] Барбашов Б.М., Черников Н.А. Решение задачи о рассеивании двух плоских волн в нелинейной теории поля типа Борна–Инфельда // Журнал эксперимент. и теорет. физики. 1966. Т. 51. №2. С. 658–668.
- [10] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М: Мир, 1977. 591 с.
- [11] Меньших О.Ф. О взаимодействии финитных уединенных волн для уравнений типа Борна–Инфельда // Теорет. и матем. физика. 1989. Т. 79. №1. С. 16–29.
- [12] Монж Г. Приложение анализа к геометрии / Пер. с франц. М. Л., 1936. 315 с.
- [13] Гурса Э., Курс математического анализа / Пер. с франц. Т. 3. Ч. 1. М. Л., 1933. 276 с.
- [14] Хабиров С.В. Вычисление алгебр Ли–Беклунда для уравнений второго порядка // Математ. заметки. 1984. Т. 35. №3. С. 435–444.
- [15] Меньших О.Ф. О точных решениях Борна–Инфельда // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. №8. С. 1410–1416.
- [16] Menshikh O.F. and Timoshin M.I. On group classification of Born–Infeld equation with three independent variables and on some of its special solutions. The International Conference MOGRAN 2000. Modern Group Analysis for the New Millenium Ufa, Russia, 27 September — 03 October, 2000. UFA: 2001. P. 123–127.
- [17] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1969. 544 с.
- [18] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
- [19] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 278 с.
- [20] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 637 с.
- [21] Овсянников Л.В., Ибрагимов Н.Х. Групповой анализ дифференциальных уравнений механики. ВИНТИ. Итоги науки и техники. Общая механика, Т. 2. М.: 1975. С. 5–52.
- [22] Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа. М.: Знание, 1989. 48 с. (Новое в жизни, науке, технике. сер "Математика, кибернетика", №8).
- [23] Арнольд В.И. Задачи Арнольда. М.: Фазис, 2000. 454 с.

Поступила в редакцию 22/X/2004;
в окончательном варианте — 22/X/2004.

ON GROUP PROPERTIES OF SECOND-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FUNCTIONALLY INVARIANT SOLUTIONS³

© 2004 O.F. Menshikh⁴

Point transformation groups technique is applied to the second-order quasilinear partial differential equations with their all functionally invariant smooth solutions. Infinitesimal operators of these equations are always depend on arbitrary functions. A criterion for separating the equations with the above characteristics are found. The two classes of such equations with two and three independent variables are obtained. Transformation groups are calculated for a number of particular equations, two of them being of special interest: the equation obtained by G.Monge describing a class of ruled surfaces, and the implicit form of the Born-Infeld equation which is well-known in physics.

Paper received 22/X/2004.

Paper accepted 22/X/2004.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. L.M. Berkovich.

⁴Menshikh Oleg Feodorovich, Dept. of Mathematics, Samara State Aerospace University, Samara, 443086, Russia.