МАТЕМАТИКА

УДК 517.11

О НОВОМ ПРОЧТЕНИИ "ОСНОВАНИЙ МАТЕМАТИКИ" А. УАЙТХЕДА И Б. РАССЕЛА

© 2004 Г.П. Яровой,[1] Ю.Н. Радаев[2]

В статье обсуждается современное прочтение фундаментальной трехтомной монографии А. Уайтхеда и Б. Рассела "*Principia Mathematica*" в связи с окончанием перевода на русский язык первого тома и перспективным проектом, реализуемым Самарским государственным университетом, по полному переводу и комментированию указанного сочинения с целью приобщения всего научного сообщества к этому выдающемуся образцу творческой мысли. Предполагается, что современный перевод на русский язык "*Principia Mathematica*" восполнит также существующий пробел в литературе по математической логике и основаниям математики, а также будет способствовать развитию формальной математики в духе ее основоположников.

Представляемая работа возникла как результат современного осмысления фундаментальной трехтомной монографии А. Уайтхеда и Б. Рассела "*Principia Mathematica*" и ее нового прочтения в процессе перевода этой книги на русский язык. Изданием первого тома мы начинаем опубликование на русском языке всего этого сочинения. Предполагается, что два оставшихся тома будут переведены, откомментированы и изданы в течение ближайших трех лет, завершая тем самым проект по полному переводу "*Principia Mathematica*" на русский язык.

Трехтомная монография А. Уайтхеда и Б. Рассела занимает уникальное место в мировой математической литературе. Ее первое английское издание увидело свет в 1910–1913 гг. в трех томах, составлявших вместе почти 2000 страниц[3]. "*Principia Mathematica*" по праву считается одним из самых ярких сочинений по основаниям математики и, в широком смысле, — выдающимся вкладом в интеллектуальную сферу прошедшего столетия. Не

[1]Яровой Геннадий Петрович (`rector@ssu.samara.ru`), кафедра радиофизики и компьютерного моделирования радиосистем Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

[2]Радаев Юрий Николаевич (`radayev@ssu.samara.ru`), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

[3]Второе издание вышло в свет в 1925–1927 гг.

будет преувеличением сказать, что "*Principia Mathematica*" оказала настолько существенное влияние на развитие математики и логики, что по прошествии почти целого столетия с момента первого издания этой монографии интерес к ней не ослабевает. По нашему глубокому убеждению, перевод на русский язык трехтомной монографии А. Уайтхеда и Б. Рассела восполнит также известный пробел в литературе по основаниям математики[4] и будет воспринят как совершенно необходимый шаг в направлении приобщения всего научного сообщества к такого рода образцам научной творческой мысли.

Выполняя перевод оригинального материала такого значительного объема, написанного более ста лет назад, мы столкнулись с проблемой полной и ясной передачи тех мыслей, которые авторы "*Principia Mathematica*", как нам представляется, стремились донести до читателя в четырех различных аспектах: историческом, философском, логическом и собственно математическом. Преследуя эту цель, мы сделали все от нас зависящее для того, чтобы перевод как можно точнее соответствовал оригиналу: не подверглась никакому изменению символика и математическая терминология оригинала[5]; не нарушена нумерация предложений логической системы А. Уайтхеда и Б. Рассела; полностью сохранены все вспомогательные разделы книги; в значительной степени оставлен без изменения присущий авторам стиль изложения, часто в ущерб современным нормам орфографии русского языка.

"*Principia Mathematica*" несет на себе отпечаток личностей ее авторов. Б. Рассел является одним из самых ярких философов XX столетия. Рассел как философ — основоположник сразу двух философских направлений — неореализма и аналитической философии. Опубликованная в 1948 г. его "*История западной философии*" сразу завоевала огромную популярность и была переведена почти на все языки мира, в том числе и на русский. Рассел также хорошо известен своим фундаментальным вкладом в теорию познания и критику религиозного мировоззрения[6].

I

[4]Заметим, что круг фундаментальных русскоязычных литературных источников по математической логике и основаниям математики весьма ограничен и, по существу, исчерпывается двухтомной монографией Д. Гильберта и П. Бернайса "*Основания математики*", перевод на русский язык которой был опубликован в 1979–1982 гг. через сорок лет после выхода в свет оригинального немецкого издания. Необходимо отметить также книгу "*Grundlagen der Geometrie*" ("*Основания геометрии*") Д. Гильберта (1899 г.), перевод которой на русский язык с седьмого немецкого издания 1930 г. вышел в свет в 1948 г., и особенно три добавления к ней "*Об основаниях логики и арифметики*" (1904 г.), "*Обоснования математики*" (1927 г.) и "*Проблемы обоснования математики*" (1928 г.). Во втором из них Д. Гильберт указывает на то, что "математика, как и любая другая наука, не может быть основана только на логике".

[5]Заметим, что математическая терминология "*Principia Mathematica*" сейчас часто воспринимается как архаичная. В примечаниях переводчиков и редакторов перевода мы сочли целесообразным указать на современные аналоги устаревшей терминологии.

[6]С этим аспектом творчества Рассела заинтересованный читатель может ознакомиться по сборнику статей. См.: Рассел Б. Почему я не христианин. М.: Политиздат, 1987.

А. Уайтхед и Б. Рассел начали совместную работу по основаниям математики в 1903 г. в целях развития всего математического знания из небольшого числа четко сформулированных аксиом с помощью логических правил вывода. Краеугольным камнем предпринятой ими работы выступает логистическая концепция, которая утверждает, что математика принципиально сводима к формальной логике. Эта концепция включает в себя два важнейших положения: (1) все математические истины могут быть сформулированы в терминах некоторого символического языка и распознаваться как логические истины; (2) все математические доказательства могут быть переформулированы как символьные цепи логического вывода[7]. Значительно позже, в 1955 г., Б. Рассел указал цель этого направления как "продемонстрировать, что вся чистая математика следует из чисто логических посылок и использует только концепции, определимые в логических терминах". Почти десять лет А. Уайтхед и Б. Рассел работали над написанием "*Principia Mathematica*". Первый том был издан Cambridge University Press в 1910 г.[8]

Содержание "*Principia Mathematica*" разделено на шесть частей, части подразделяются на главы, главы — на параграфы.

Первый том начинается с Введения, которое состоит из трех разделов:
— "Предварительные сведения о понятиях и обозначениях",
— "Теория логических типов",
— "Неполные символы".
Он также содержит первую часть "Математическая логика", состоящую из глав
— "Теория вывода",
— "Теория кажущихся переменных",
— "Классы и отношения",
— "Логика отношений",
— "Произведения и суммы классов";
и вторую часть "Пролегомены к арифметике кардиналов", состоящую из глав
— "Единичные классы и пары",
— "Подклассы, подотношения и относительные типы",
— "Одно-многозначные, много-однозначные и одно-однозначные отношения",
— "Выборки",
— "Индуктивные отношения".

Второй том начинается с "Предварительных формальных соглашений", за которыми следует третья часть "Арифметика кардиналов", состоящая из глав
— "Определение и логические свойства кардинальных чисел",
— "Сложение, умножение и возведение в степень",

---

334 с. Здесь особо следует отметить одну из ранних его работ (1914 г.) "*Мистицизм и логика*".

[7]В системе "*Principia Mathematica*" имеется весьма примечательное определение процесса формального логического вывода: "Логический вывод есть пропуск одной истинной посылки и распад одной импликации."

[8]Отметим одну интересную деталь. Издательство Cambridge University Press оценило убытки от предполагаемого издания "*Principia Mathematica*" в £600, но согласилось на половину означенной суммы. Королевское общество (Royal Society) внесло £200. Остался дефицит в £100. Авторы внесли по £50 каждый, после чего начался процесс напечатания.

— ”Конечное и бесконечное”;
четвертая часть ”Арифметика отношений”, состоящая из глав
— ”Подобие ординалов и реляционные числа”,
— ”Сложение отношений и произведение двух отношений”,
— ”Принцип первых разностей, умножение и возведение в степень отношений”,
— ”Арифметика реляционных чисел”;
а также первая половина пятой части ”Серии”, состоящая из глав
— ”Общая теория серий”,
— ”О сечениях, сегментах, промежутках и производных”,
— ”О сходимости и пределах функций”.

Третий том включает вторую половину пятой части с главами
— ”Вполне упорядоченные серии”,
— ”Конечные и бесконечные серии и ординалы”,
— ”Компактные серии, рациональные серии и непрерывные серии”;
и шестая часть ”Количества”, состоящая из глав
— ”Обобщения чисел”,
— ”Вектор-семейства”,
— ”Измерения”,
— ”Циклические семейства”.

Следуя логистической концепции, А. Уайтхед и Б. Рассел большое внимание уделили развитию выразительных средств математической логики, создав символическую систему, превосходящую все известные аналоги. Если попытаться кратко охарактеризовать самое существенное в ”*Principia Mathematica*”, то можно, по-видимому, остановиться лишь на одном обстоятельстве. Это выдающееся произведение ярко продемонстрировало, насколько мощным орудием современной математики является понятие формальной логической системы.

В свете сказанного выше понятна особая роль математической логики в попытках разобраться в основаниях современного математического знания. Поэтому мы считаем необходимым остановиться здесь на основных этапах важнейшего эволюционного процесса, который привел к фундаментальному понятию формальной дедуктивной системы и постепенному осознанию того, что основания математики должны быть одной из таких систем.

II

Логика — одна из древнейших научных дисциплин. Формальная традиционная логика была создана в трудах Аристотеля (Aristotéles, 384–322 гг. до н.э.) на заре европейской цивилизации в Древней Греции. Аристотель — автор оригинальной, тщательно разработанной логической системы. Его силлогистика была исторически первой логической дедуктивной системой. Сам Аристотель свое логическое учение называл ”Аналитикой”. Ключевым в логике Аристотеля является понятие силлогизма[9]. Исследуя строение силлогизмов, он все термины в них представляет буквами. Этим он вводит в логику буквенные переменные, совершая тем самым фундаментальное от-

[9]Сам Аристотель признавался, что на создание теории силлогизма он затратил очень большой труд.

крытие, которое собственно и позволяет считать его основателем формальной логики. Действительно, буквенная форма представления логики[10] ясно указывает на то, что заключение получается не как следствие содержания посылок, а как следствие их формы и сочетания. Форма силлогизма характеризуется числом переменных, их расположением, соединениями терминов силлогизма (выражаемыми союзами "и" и "если") и четырьмя отношениями между общими терминами. Аристотель развил систематическое исследование силлогистических форм. Логика Аристотеля, таким образом, предстает как наука о законах, которым должны подчиняться силлогизмы, выраженных с помощью переменных. В течение двух тысячелетий считалось, что логика Аристотеля настолько совершенна, что не может иметь дальнейшего развития.

Математическая логика — часть формальной логики, характеризующаяся применением математических методов и символьных представлений для выражения мыслительных процессов человека в процессе его познавательной деятельности.

Еще в начале XX века математическая логика казалась совершенно абстрактной математической дисциплиной. Сейчас положение коренным образом изменилось. В наше время, которое характеризуется глубоким проникновением математики во многие области науки и искусства, современная логика привлекает все большее внимание не только ученых, но и людей, чья профессиональная деятельность напрямую не связана с математической логикой. Все большее число высших учебных заведений включает в обязательную программу обучения курсы математической логики, теории алгоритмов, теории вычислимых функций или их фрагменты. Быстрый прогресс в области классических и квантовых вычислений выявил фундаментальную роль математической логики в этих областях знания.

Математическая логика традиционно также была тесно связана с философией математики, ибо математика, в противоположность другим наукам, в процессе получения нового знания использует доказательства, а не наблюдения. Математическая логика оправдывает свое название не только потому, что она формировалась, исходя из потребностей математики, и что подавляющее большинство результатов, составляющих в настоящее время ее классический базис, принадлежит ученым-математикам. Дело в том, что ее структура типична для строго математической дисциплины. Поэтому эта наука может трактоваться не только как логика математики, но и как математика логики, поскольку она является в значительной степени результатом применения математических методов к проблемам формальной логики.

В целом математическая логика должна быть отнесена к числу новейших научных дисциплин, формирование которых происходило в основном в

---

[10] Здесь, следуя Я. Лукасевичу (J. Lukasiewicz), отметим, что в логических системах "буквы являются знаками общности".

первой половине XX столетия. Идея математической логики (или скорее математизации формальной логики) впервые в ясной форме была выдвинута Лейбницем (1646–1716) (G.W. Leibniz). Одним из первых Лейбниц высказал мысль о введении в логику математической символики и использовании в логике математических методов. Однако Лейбниц не создал законченной формализованной логической системы[11]. В 1672 г. Лейбниц значительно усовершенствовал счетную машину, ранее изобретенную Паскалем. Лейбниц выдвинул первые идеи о "machina rationatrix", думающей машине.

Синтезируя логику и математику в единую науку, Лейбниц преследовал две цели. Первая из них состояла в истолковании мышления как оперирования знаками в форме некоторого исчисления. Базой этого исчисления должна служить "characteristica universalis", т.е. всеобщая система знаковых обозначений для представления предметов и отношений между ними. Вторая — во всестороннем применении логических исчислений в научном поиске[12]. Лейбниц назвал будущую науку об исчислении умозаключений "calculus ratiocinator". Реализация программных установок Лейбница потребовала от него разработки ряда новых научных направлений. Прежде всего, необходим был метод, позволяющий разлагать сложные понятия на простые, сводя последние к небольшому количеству основных. Затем надо было найти подходящие символы ("характеры"), которые могли бы представлять и замещать понятия и термины естественного языка. Наконец требовались организующие принципы символического исчисления. Грандиозный метафизический проект Лейбница не мог быть осуществлен во всей полноте так, как он был задуман. Тем не менее он дал мощный импульс развитию математической логики.

Первые после Лейбница существенные результаты на пути применения математики к логике были получены в XIX в. де Морганом[13] (A. de Morgan, 1806–1871) и Булем[14] (G. Boole, 1815–1864). Буль построил первую систему математической логики в форме алгебры логики. Затем последовали ра-

---

[11]Цикл логических работ Лейбница (всего их пять) был написан им, начиная с апреля 1679 г. Все они не окончены. Большинство логических произведений Лейбница не печаталось при его жизни (некоторые из них, по-видимому, вообще не предназначались для опубликования). Они были извлечены из его рукописного архива и опубликованы разными издателями много времени спустя после его смерти. Важнейшие логические работы Лейбница были впервые переведены на русский язык и вошли в третий том его сочинений. См.: Лейбниц Г.В. Сочинения: В 4 т. Т. 3. М.: Мысль, 1984. 734 с.

[12]Ему принадлежит идея о том, что, записав исходные гипотезы на языке специальных знаков, можно, сформулировав правила логического вывода новых суждений из исходных, заменить рассуждение вычислением. Лейбниц также считал, что подобное универсальное логическое исчисление на практике может быть реализовано как вычислительная машина. Таким образом задачу математической логики можно сформулировать следующим образом: заменить рассуждения вычислениями.

[13]Morgan A. de. Formal logic: or, the calculus of inference, necessary and probable. London, 1847.

[14]Boole G. The mathematical analysis of logic, being an essay toward a calculus of deductive reasoning. Cambridge and London, 1847.

боты Джевонса (W.S. Jevons, 1835–1882) и Пирса[15] (C.S. Peirce, 1839–1914). К концу XIX столетия окончательно сложилась алгебра логики. Проблемы строгого и точного обоснования математики и необходимость аксиоматического ее изложения исследовались в работах Фреге (G. Frege, 1848–1925) и Пеано[16] (G. Peano, 1858–1932). Последний придал математической логике ее современную форму. Пеано и его сотрудники начали в 1894 г. работу над изданием "*Formulaire de Mathématiques*" ("Формуляр математики"), в котором все математические дисциплины должны были бы предстать в форме логического исчисления. Здесь мы процитируем А. Уайтхеда и Б. Рассела с их оценкой вклада Пеано в разработку оснований математики: "Его главная заслуга состоит не столько в его определенных логических открытиях и не столько в деталях его обозначений (хотя оба этих достижения — самого высокого уровня), сколько в том, что он впервые продемонстрировал, как символическая логика освободилась от чрезмерной навязчивости обычных алгебраических форм, став поэтому подходящим инструментом для исследования. Направляемые нашим собственным пониманием его метода, мы пользовались очень большой свободой при конструировании и реконструировании символики, стараясь сделать ее адекватной всем граням предмета исследования. Ни одного символа не было введено иначе как на почве его практической целесообразности и непосредственной пригодности для целей нашего исследования."

Пеано впервые сформулировал задачу применения символической логики с целью дедуктивно-аксиоматического построения всей математики. Ему принадлежит система аксиом для формальной арифметики натуральных чисел (1889 г.)[17]. Пеано вместе с группой единомышленников реализовал свой грандиозный проект "*Formulario Mathematico*", направленный на формализованное представление всех разделов математики в символике математической логики, в пяти изданиях в течение 1895–1908 гг., собрав в последнем из них приблизительно 4200 теорем на 516 страницах[18]. При этом он заявил, что он до некоторой степени реализовал метафизическую программу Лейбница, что представляется справедливым, так как Пеано создал и логическую идеографию, т.е. символический язык, который впоследствии стал общеупотребительным, и формальную систему, представляющую математическое знание. Книга "*Formulario Mathematico*" к настоящему времени уже почти забыта. Не осталось энтузиастов, которые бы продолжили формали-

---

[15] Peirce C.S. On the algebra of logic: A contribution to the philosophy of notation // Amer. J. Math. **7**. 1885. P. 180–202.

[16] Профессор математики Туринского университета (1890–1932).

[17] Представляет интерес анализ логических основ теории натуральных чисел, данный Ф. Клейном (F. Klein) (см.: Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. I. Арифметика. Алгебра. Анализ. М.: Наука, 1987. С. 26–35).

[18] Первые четыре тома имели название "*Formulaire de Mathématiques*". Последний пятый том был практически полностью подготовлен к изданию самим Пеано и был назван "*Formulario Mathematico*". В нем Пеано даже перешел от французского языка к *Latino sine flexione* — специально разработанному им языку, который он применял для написания научных работ.

зацию математики в духе Пеано и видели бы в этом хоть какой-то смысл[19]. Тем не менее представляется преждевременным утверждать, что формализованная математика никогда не найдет применения.

Появлением фундаментальной книги "*Principia Mathematica*"[20] Уайтхеда (A.N. Whitehead, 1861–1947) и Рассела (B. Russell, 1872–1970) заканчивается этап создания классических логических исчислений с целью представления всех математических дисциплин как формальных исчислений. Эта цель была отчетливо сформулирована Гильбертом (D. Hilbert, 1862–1943) в двадцатых годах в его программе обоснования математики на базе математической логики с помощью аксиоматического метода. С этого времени, по-видимому, и начинается современный этап развития математической логики, характеризующийся использованием точных математических методов при исследовании формальных теорий. Именно с предпринятой в начале XX века Гильбертом разработки теории доказательств на базе развитого в работах Фреге и Пеано логического языка обычно связывают становление собственно математической логики. Двухтомная монография Гильберта и Бернайса (P. Bernays) "*Основания математики*"[21] (1934–1939) подвела в определенном плане итог работы над программой обоснования математики средствами математической логики. Предложенный Гильбертом аксиоматический метод в перспективе сулил перевод всей математики на формальные рельсы с последующей ее универсальной алгоритмизацией.

В тридцатые года XX века, благодаря прежде всего работам Геделя (K. Gödel, 1906–1978), Черча (A. Church), Поста (E.L. Post, 1897–1954) и Тьюринга (A.M. Turing, 1912–1954), стало ясно, что программу Гильберта по обоснованию математики реализовать в полной мере невозможно, однако бурное развитие математической логики, стимулировавшееся в то время программой Гильберта, позволило ей не окаменеть в своем суровом совершенстве, а шаг за шагом уточнить определение алгоритма и вычислимости функций, развить рекурсивный анализ, четко сформулировать понятие разрешимости множеств и формальных систем.

Заметный вклад в математическую логику был сделан русскими и советскими учеными: П.С. Порецким (1846–1907)[22], В.И. Гливенко

---

[19]Критический анализ направления, основанного Пеано, дан Ф. Клейном (см.: Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. II. Геометрия. М.: Наука, 1987. С. 351–353).

[20]Whitehead A.N., Russell B. Principia Mathematica. Cambridge: Cambridge University Press, V. I, 1910; V. II, 1912; V. III, 1913.

[21]Имеется перевод на русский язык этой двухтомной монографии. См.: Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М.: Наука, 1979. 560 с.; Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Теория доказательств. М.: Наука, 1982. 656 с.

[22]Профессор Казанского университета (с 1886 г. — доктор астрономии), астроном, логик и математик. Первым в России начал читать лекции по математической логике. Его работы по математической логике были опубликованы в изданиях Физико-математического общества при Казанском университете.

(1897–1940), И.И. Жегалкиным (1869–1947)[23], А.Н. Колмогоровым (1903–1987), А.И. Мальцевым, А.А. Марковым (1903–1979), П.С. Новиковым (1901–1975)[24].

Часто говорят, что логика изучает законы мышления, причем не столько в историческом и психологическом плане, сколько в формально-структурном. Ясно, что в структурном смысле мышление, по-видимому, отражает некоторые черты реальной действительности. Математическая логика, оставляя за скобками сущность такой связи между мышлением и действительностью, имеет в качестве предмета своего исследования лишь формальную ее природу.

Формальное исследование любого явления, связанного с нашим опытом, начинается с замены реальных объектов некоторыми их идеализациями. Для математической логики основная в этом смысле идеализация — язык или, точнее говоря, формализованный вариант естественного языка, связь которого с мыслительной деятельностью человека трудно не заметить. Язык является важнейшим аспектом формальной системы. Связь между формальной системой и реальностью в рамках математической логики устанавливается с помощью моделей формальной системы. Модель наполняет содержанием и смыслом символические выражения формальной системы. Все термины формальной системы понимаются как переменные, т.е. не связываются с какой-либо одной определенной интерпретацией. При этом однако не следует думать, что они рассматриваются так, как будто их смысл нам не известен.

Роль формального логического исчисления как средства открытия новых истин не следует преувеличивать: и в настоящее время эта роль является более чем скромной. Однако в рамках математической логики (и в частности в рамках теории формальных исчислений) оказался разработанным аппарат, позволяющий вскрыть конституционные принципы функционирования вычислительных и управляющих устройств, которые в значительной степени определяют облик всей современной цивилизации. Чтобы передать компьютерам функции, долгое время считавшиеся исключительной привилегией человеческого интеллекта, необходим их формально-логический анализ с целью выявления того, какие именно функции могут быть переданы в системы организации, хранения, обработки и обмена информацией. Тем не менее не следует забывать о том, что "*Principia Mathematica*" посвящена именно основаниям математики, а не математической логике. Математическая логика, существенным образом развитая, использовалась авторами и

[23]Один из основоположников советской школы математической логики. Совместно с П.С. Новиковым (1901–1975) и С.А. Яновской (1896–1966) руководил семинаром по математической логике в Московском государственном университете в 30–40-х гг.

[24]Ему принадлежат фундаментальные научные результаты в области теории множеств и математической логики. Его книга "*Элементы математической логики*" (1959 г.) была первым отечественным курсом математической логики.

как базис всего математического знания, и как формальное средство для его представления.

III

Приступая к переводу "*Principia Mathematica*", мы полностью отдавали себе отчет в том, что русская математико-логическая терминология так до конца и не устоялась, поэтому неизбежно должны будут возникнуть проблемы с подбором русского перевода английских математических, логических и философских терминов[25]. По этой причине мы сочли необходимым дополнить перевод предметным указателем, с помощью которого могут быть установлены оригинальные английские термины, послужившие прообразами для соответствующих русских терминов. Издание предметного указателя предполагается осуществить после выхода в свет последнего третьего тома. В ряде случаев в подстрочных примечаниях мы пытаемся донести до читателя те или иные аргументы в пользу избранной нами терминологии. Естественно, что наша позиция в выборе математико-логической терминологии, по-видимому, будет разделяться не всеми. Именно поэтому мы считаем уместным уже сейчас обратить внимание читателя на употребление и перевод отдельных терминов, в значительной степени повлиявших на все русское прочтение "*Principia Mathematica*".

Там, где у нас не было уверенности в том, что русский перевод полностью передает те же логические оттенки смысла, что и английский оригинал, мы приводим, как правило, в подстрочных примечаниях подлинный

[25]Представляемую работу дополняет список литературы, которая может быть рекомендована для сопоставления терминологии по математической логике и основаниям математики, а также для сравнительного анализа содержания "*Principia Mathematica*" с современной точкой зрения. В свое время издательством "Наука" был реализован беспрецедентный проект по изданию серии "Математическая логика и основания математики". Большинство литературных источников по математической логике на русском языке увидело свет в рамках этого проекта. Формирование русской научной терминологии по математической логике и основаниям математики также оказалось под сильным влиянием тех научных школ, которые приняли участие в реализации указанного проекта. Ясно, что приведенный список литературы может быть использован теми, кто только начинает изучение соответствующей проблематики. При его подборе в полной мере учитывалось то обстоятельство, что ни одно из имеющихся на русском языке руководств в полной мере не отвечает целям первоначального обучения: литературные источники либо технически трудны для первоначального их прочтения (это касается прежде всего таких фундаментальных книг, как [5, 11, 24]), либо чрезмерно эскизны (это последнее относится к таким источникам, как [2, 7, 15]). Компромисс может быть найден в сочетании книг [17, 27], совместно использовать которые также довольно трудно ввиду существенных различий как в отборе тематики, так и в терминологии и обозначениях. Существенную помощь с целью формирования ясного представления о месте математической логики и оснований математики в структуре современного научного знания может оказать материал двух энциклопедий — пятитомной Философской энциклопедии (гл. ред. Ф.В. Константинов) и пятитомной Математической энциклопедии (гл. ред. акад. И.М. Виноградов).

текст. Такая мера представляется нам совершенно необходимой из-за существенной разницы выразительных средств русского и английского языков[26].

1. Проблема возникает уже в переводе названия книги. Мы отказались от более близкого оригиналу перевода "*Принципы математики*", преследуя единственную цель — назвать книгу в соответствии с ее реальным содержанием.

2. Английский термин *proposition* переводится как *предложение*, или как *высказывание*, и, таким образом, в нашем переводе *предложение* и *высказывание* имеют один и тот же смысл. Ясно, что это может вызвать ряд возражений[27]. Под *предложением* обычно понимается грамматически оформленная минимальная целостная речевая единица, обладающая смысловой законченностью[28]. *Суждение* — мыслительная форма, с помощью которой утверждается или отрицается что-либо относительно предметов, их свойств и отношений между ними. Английский термин *judgment* всегда переводится как *суждение*. Под *высказыванием* следует понимать каждое *предложение*, в отношении которого имеет смысл утверждать, что его содержание истинно или ложно[29]. Следовательно, английский термин *proposition* в том смысле, в котором он систематически используется в "*Principia Mathematica*" для обозначения предложений формального языка, рассматриваемых исключительно в связи с теми или иными оценками их истинностных значений, лучше всего соответствует русскому термину *высказывание*[30]. Тем не менее, учитывая то обстоятельство, что в формальной логике содержание предложений всегда сводится к его истинностной оценке, можно в принципе не различать указанные два понятия, правда, отдавая себе отчет в том, что *предложение* есть одна из высказывательных форм.

3. Английские термины *statement*, *declaration*, *assertion* переводятся как *утверждение*, несмотря на известные оттенки в значениях этих слов.

4. Термин *phrase* всюду переводится как *оборот речи*.

5. А. Уайтхед и Б. Рассел избегают термина *set*, соответствующего русскому термину *множество*. Несмотря на это, мы переводим, например, *theory of aggregates* как *теория множеств*. Вместо множеств А. Уайтхед и Б. Рассел оперируют с классами: *класс* (что то же самое, что и *многообразие* или *аггрегат*) есть сущность, составленная из всех объектов, удовлетворяющих некоторой пропозициональной функции. Составляют класс *эле-*

---

[26] Так, довольно часто встречается присущее английскому языку терминологическое использование определенного артикля *the*.

[27] Заметим, что, например, в русском переводе книги А. Черча "*Введение в математическую логику*" термин *proposition* переводится как *суждение*. Английским прообразом последнего термина выступает обычно *judgment*.

[28] В этом смысле термину *предложение* лучше всего в англ. языке соответствует термин *sentence*.

[29] Цитируется по [2, с. 19].

[30] Термин *высказывание* вызывает большие споры в современной математической логике. Отголоски дискуссий по этому поводу имеются в [9, с. 250] и далее.

менты (*members*). В дальнейшем, однако, классам отказывается в самостоятельной сущности. Символы для классов в системе "*Principia Mathematica*" признаются неполными символами. Во Введении А. Уайтхед и Б. Рассел замечают, что классы являются просто удобными символическими или лингвистическими конвенциями, а не подлинными объектами как их элементы, если таковые есть индивиды. Конечно, следует быть осторожным при отождествлении понятий класса и множества. Понятие класса в современной математике считается более широким, чем множество. Так, в [17, с. 178] класс называется множеством, если он является элементом какого-нибудь класса.

6. В пропозициональной функции xRy, где R есть символ бинарного отношения, мы называем x *референтом*, а y — *релятивом*. Соответствующие английские термины есть *referent* и *relatum*.

7. Нам показалось ближе соответствующим истинному положению дел перевод термина *series* не как *последовательность*, а как *серия*.

Естественно, что мы ни в коем случае не считаем преодоленными те трудности, которые возникают при попытке взаимно-однозначного отображения английской терминологии А. Уайтхеда и Б. Рассела на некоторый вариант русской математико-логической терминологии и не предлагаем "терминологических революций", а лишь приводим обоснование своих рекомендаций.

При переводе на русский язык первого тома "*Principia Mathematica*" исправлен ряд неточностей, впрочем весьма незначительных, обнаруженных в оригинале. Мы позволили себе внести эти исправления без специальных оговорок.

Мы надеемся, что современное прочтение и перевод на русский язык "*Principia Mathematica*" восполнит существующий пробел в литературе по математической логике и основаниям математики, а также будет способствовать развитию формальной математики в духе ее основоположников.

Литература

[1] Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994. 396 с.

[2] Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики. М.: Изд-во иностр. лит., 1947. 304 с.

[3] Гильберт Д. Основания геометрии. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. 492 с.

[4] Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М.: Наука, 1979. 560 с.

[5] Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Теория доказательств. М.: Наука, 1982. 656 с.

[6] Гладкий А.В. Математическая логика. М.: Российск. гос. гуманит. ун-т, 1998. 479 с.

[7] Гудстейн Р.Л. Математическая логика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 164 с.

[8] Гудстейн Р.Л. Рекурсивный математический анализ. М.: Наука, 1970. 472 с.

[9] Карри Х. Основания математической логики. М.: Мир, 1969. 568 с.
[10] Клини С.К. Введение в метаматематику. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. 526 с.
[11] Клини С.К. Математическая логика. М.: Мир, 1973. 480 с.
[12] Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Введение в математическую логику. М.: Изд-во МГУ, 1982. 120 с.
[13] Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Математическая логика. Дополнительные главы. М.: Изд-во МГУ, 1984. 120 с.
[14] Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
[15] Линдон Р. Заметки по логике. М.: Мир, 1968. 128 с.
[16] Математическая теория логического вывода: Сб. переводов. М.: Наука, 1967. 352 с.
[17] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1971. 320 с.
[18] Новиков П.С. Элементы математической логики. М.: Физматлит, 1959. 400 с.
[19] Столл Р.Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. М.: Просвещение, 1968. 232 с.
[20] Слупецкий Е., Борковский Л. Элементы математической логики и теория множеств. М.: Прогресс, 1965. 368 с.
[21] Смальян Р. Теория формальных систем. М.: Наука, 1981. 208 с.
[22] Такеути Г. Теория доказательств. М.: Мир, 1978. 416 с.
[23] Тарский А. Введение в логику и методологию дедуктивных наук. М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. 326 с.
[24] Черч А. Введение в математическую логику. Т. I. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 488 с.
[25] Успенский В.А. Лекции о вычислимых функциях. М.: Физматгиз, 1960. 492 с.
[26] Успенский В.А. Машина Поста. М.: Наука, 1988. 96 с.
[27] Шенфилд Дж. Математическая логика. М.: Наука, 1975. 528 с.
[28] Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966. 120 с.

Дополнительный список литературы

1. Философская энциклопедия. Т. I–V. (гл. ред. Ф.В. Константинов). М: Советская энциклопедия. Т. I, 1960; Т. II, 1962; Т. III, 1964; Т. IV, 1967; Т. V, 1970. См. статьи: Аксиома (т. I, с. 31, 32); Алгебра логики (т. I, с. 33–38); Алгоритм (т. I, с. 38–42); Бесконечная индукция (т. I, с. 153, 154); Буль (т. I, с. 199, 200); Вывод (т. I, с. 307–310); Высказывание (т. I, с. 312, 313); Гедель (т. I, с. 338); Гливенко (т. I, с. 374, 375); Дедукция (т. I, с. 440, 441); Джевонс (т. I, с. 469, 470); Жегалкин (т. II, с. 126, 127); Изоморфизм (т. II, с. 246–249); Интерпретация (т. II, с. 296, 297); Интуиционизм (т. II, с. 300–302); Исчисление (т. II, с. 387–390); Категорическое суждение (т. II, с. 476); Категоричность системы аксиом (т. II, с. 476); Квантификация предиката (т. II, с. 485, 486); Квантор (т. II, с. 486, 487); Конструктивное направление (в математической логике) (т. III, с. 50, 51); Лейбниц (т. III, с. 161–165); Логика высказываний (т. III, с. 205–209); Логическая истинность (т. III, с. 230, 231); Логическая семантика (т. III, с. 231, 232); Логический синтаксис (т. III, с. 241); Логическое исчисление (т. III, с. 246); Математическая индукция (т. III, с. 338–340); Математическая логика (т. III, с. 340–342); Метод аксиоматический (т. III, с. 416–418); Многозначная логика (т. III, с. 472–474); Модальная логика (т. III, с. 475–478); Натуральное исчисление (т. III, с. 560, 561); Независимость (т. IV, с. 16); Неполная индукция (т. IV, с. 55, 56); Непротиворечивость (т. IV, с. 59–61);

Неразрешимая формула (т. IV, с. 61, 62); Отрицание (т. IV, с. 186–188); Пеано (т. IV, с. 229); Пирс (т. IV, с. 255–257); Полнота (т. IV, с. 302); Полнота функциональная (т. IV, с. 303, 304); Полнота дедуктивная (т. IV, с. 351); Понятие (т. IV, с. 311–318); Порецкий (т. IV, с. 321); Посылка (т. IV, с. 327); Правила вывода (т. IV, с. 330); Правило замены равного равным (т. IV, с. 330, 331); Предваренная форма (т. IV, с. 350); Предикат (т. IV, с. 303, 304); Предикатов исчисление (т. IV, с. 351–356); Принцип замещения (т. IV, с. 366); Принцип исключенного третьего (т. IV, с. 367, 368); Равенство (т. IV, с. 445, 446); Разрешения проблемы (т. IV, с. 459, 460); Рассел (т. IV, с. 467, 468); Рекурсивные функции и предикаты (т. IV, с. 487–489); Секвенций исчисление (т. IV, с. 573); Семантика (т. IV, с. 576); Семиотика (т. IV, с. 577, 578); Синтаксис (т. V, с. 15); Суждение (т. V, с. 159–162); Схема аксиом (т. V, с. 170); Тавтология (т. V, с. 177, 178); Теорема (т. V, с. 203, 204); Теорема о дедукции (т. V, с. 204); Типов теория (т. V, с. 233, 234); Тождества закон (т. V, с. 237); Тождества проблема (т. V, с. 237); Тождественная истинность (т. V, с. 237, 238); Тождество (т. V, с. 238–241); Умозаключение (т. V, с. 276); Формальная логика (т. V, с. 392, 393); Формальная система (т. V, с. 393); Фреге (т. V, с. 409, 410).

2. Математическая энциклопедия. Т. I–V. (гл. ред. акад. И.М. Виноградов). М: Советская энциклопедия. Т. I, 1977; Т. II, 1979; Т. III, 1982; Т. IV, 1984; Т. V, 1985. См. статьи: Аксиом схема (т. I, 102, 103); Аксиоматический метод (т. I, 109–113); Алгебра логики (т. I, 123–129); Алгоритм (т. I, 202–206); Алгоритмическая проблема (т. I, 214–218); Антиномия (т. I, 292–296); Арифметика формальная (т. I, 319–321); Бесконечная индукция (т. I, 434, 435); Булевы функции (т. I, 553, 554); Вывод (т. I, 779, 780); Вывода правило (т. I, 779); Выводимое правило (т. I, 781); Вычислимая функция (т. I, 818–821); Геделя теорема о неполноте (т. I, 909, 910); Геделя теорема о полноте (т. I, 910, 911); Дедукции теорема (т. II, 65, 66); Индивидная константа (т. II, 555); Индивидная переменная (т. II, 555, 556); Индуктивное определение (т. II, 556, 557); Индукции аксиома (т. II, 558); Карнапа правило (т. II, 728, 729); Квантор (т. II, 837); Логико-математические исчисления (т. III, 411–415); Логическая аксиома (т. III, 415); Логическая операция (т. III, 416); Логическая формула (т. III, 416); Логические исчисления (т. III, 416–420); Логический закон (т. III, 420); Логическое следствие (т. III, 420); Математическая логика (т. III, 568–574); Многозначная логика (т. III, 713–720); Модус поненс (т. III, 790, 791); Наименьшего числа оператор (т. III, 875, 876); Нормальный алгорифм (т. III, 1072, 1073); Общезначимость (т. III, 1147); Общерекурсивная функция (т. III, 1147); Пеано аксиомы (т. IV, 227, 228); Перечислимое множество (т. IV, 265); Пирса стрелка (т. IV, 287, 288); Предваренная формула (т. IV, 555, 556); Предикат (т. IV, 576, 577); Предикатная переменная (т. IV, 577); Предикатный символ (т. IV, 577); Предикатов исчисление (т. IV, 577–580); Примитивная рекурсия (т. IV, 636); Примитивно рекурсивная функция (т. IV, 636, 637); Пропозициональная связка (т. IV, 698); Пропозициональная форма (т. IV, 698); Пропозициональная формула (т. IV, 698); Пропозициональное исчисление (т. IV, 699, 700); Противоречие (т. IV, 720, 721); Разрешения проблема (т. IV, 850); Разрешимое множество (т. IV, 852); Разрешимый предикат (т. IV, 852); Рекурсивная функция (т. IV, 960, 961); Рекурсивный предикат (т. IV, 962); Рекурсия (т. IV, 962–965); Семантика (т. IV, 1110); Синтаксис (т. IV, 1181,

1182); Суждение (т. V, 269); Терм (т. V, 338); Типов теория (т. V, 351–353); Тьюринга машина (т. V, 456–458); Формальная система (т. V, 639, 640); Формальный язык (т. V, 636–638); Черча тезис (т. V, 855); Шеффера штрих (т. V, 894);

3. Кондаков И.И. Логический словарь–справочник. М.: Наука, 1976. 720 с. См. статьи: Аксиомы арифметики (23, 24); Аксиомы исчисления высказываний (24); Аксиомы Пеано для натуральных чисел (24); Алгоритм (30–32); Вывод (101, 102); Исчисление (220); Исчисление высказываний (221–227); Исчисление предикатов (228–231); Квантификация предиката (242, 243); Кванторные правила (243); Кванторы (243, 244); Лейбниц (278, 279); Математическая индукция (333); Математическая логика (333, 341); Машины Тьюринга (345, 346); Modus ponendo tollens (361); Modus ponens (361, 362); Modus tollendo ponens (362); Modus tollens (362); Натурального вывода система (374, 375); Натуральное число (375, 376); Непротиворечивость (385); Общезначимая формула исчисления предикатов (399); Общезначимость (399); Омега-непротиворечивая теория (405); Основные законы логики высказываний и предикатов (416); Парадокс (431–433); Пеано (436, 437); Полная индукция (453, 454); Полнота системы аксиом (454); Правило подстановки (470); Предикат (473); Пропозициональная форма (482); Пропозициональные связки (483, 484); "Principia Mathematica" (500, 501); Равенство (504); Рассел (512); Свободная переменная (524); Связанная переменная (524); Силлогизм (528–533); Символика математической логики (534–540); Система аксиом Пеано (545); Система аксиом Фреге (545, 546); Стрелка Пирса (571); Таблица истинности (584, 585); Тавтология (585–587); Теорема (588, 589); Теорема дедукции (589); Терм (594); Формальная система (651); Формула (652, 653); Фреге (654); Штрих Шеффера (672, 673).

Поступила в редакцию 18/IX/2004;
в окончательном варианте — 5/X/2004.