

УДК 621.373.1:519.622.2

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ММА И ЦИФРОВАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ

© 2004 В.В. Зайцев, О.В. Зайцев, А.В. Никулин, Г.П. Яровой¹

Представлена компьютерная версия метода медленно меняющихся амплитуд, предназначенная для моделирования переходных процессов и стационарных режимов в автоколебательных системах томсоновского типа. Показано, что правые части укороченных уравнений могут рассматриваться как результат фильтрации полигармонических сигналов, генерируемых нелинейностями автоколебательных систем. Приведены примеры применения метода к расчету характеристик квазигармонических автоколебаний в генераторе на операционном усилителе для двух видов аппроксимации его передаточной характеристики.

Введение

Автогенераторы гармонических колебаний широко распространены в радиоэлектронике. С точки зрения теории колебаний они относятся к классу квазилинейных квазиконсервативных автоколебательных систем (АКС), или автоколебательных систем томсоновского типа [1]. В общем виде уравнение движения томсоновской АКС можно записать как

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \mu f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (1)$$

где ω_0 — собственная частота порождающей линейной системы, $f(\cdot)$ — функция, учитывающая нелинейности элементов системы, диссипацию энергии и положительную обратную связь в системе, μ — малый параметр.

Для приближенного решения нелинейных уравнений вида (1) теория колебаний имеет обширный набор асимптотических и родственных им методов [2]. Среди них наиболее удобен для инженерной практики метод медленно меняющихся амплитуд (ММА) [3], основы которого заложены работами Ван-дер-Поля. Результатом применения большинства из упомянутых

¹Зайцев Валерий Васильевич (zaitsev@ssu.samara.ru), Зайцев Олег Валерьевич, Никулин Андрей Валентинович, Яровой Геннадий Петрович, кафедра радиофизики и компьютерного моделирования радиосистем Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

методов в первом приближении является система так называемых укороченных уравнений для амплитуды и фазы (комплексной амплитуды) автоколебаний. В методе ММА укороченные уравнения получаются непосредственно из уравнения (1) путем последовательного использования предположения о медленности изменений амплитуды и фазы и пренебрежения высшими гармониками нелинейной функции $f(\cdot)$. Иногда систему укороченных уравнений удается решить аналитически. А так как укороченные уравнения не содержат быстрых осцилляций во времени, то и их численное интегрирование возможно при менее жестких требованиях к устойчивости метода, которые необходимы для получения осциллирующих численных решений уравнения движения АКС (1).

В любом из перечисленных методов процедура получения приближенных укороченных уравнений из точного уравнения движения — весьма трудоемкий этап решения задачи даже тогда, когда речь идет о не слишком сложной правой части уравнения (1). В то же время совершенно очевидно, что если не предполагается аналитического исследования укороченных уравнений, то их и необязательно записывать в аналитической форме. Для численного интегрирования системы укороченных уравнений достаточно иметь алгоритм расчета ее правых частей при всех допустимых значениях комплексной амплитуды. В настоящем сообщении описан один из таких алгоритмов и проведен его анализ на основе теории цифровой фильтрации сигналов.

1. Алгоритм формирования системы укороченных уравнений

Решение уравнения движения АКС (1) представим в виде функции двух временных аргументов:

$$x(t) = x(\xi, \tau),$$

где аргументы $\xi = t$ и $\tau = \mu t$ отражают разные временные масштабы исследуемых автоколебаний. Затем в рамках стандартной процедуры метода ММА выделим в решении осцилляции с частотой ω_0 , имеющие медленные (по сравнению с $\exp(j\omega_0\xi)$) амплитуду $a(\tau)$ и фазу $\varphi(\tau)$:

$$x(t) = \frac{1}{2}a(\tau) \exp[j\psi(\xi, \tau)] + \frac{1}{2}a(\tau) \exp[-j\psi(\xi, \tau)]. \quad (2)$$

Здесь $\psi(\xi, \tau) = \omega_0\xi + \varphi(\tau)$ — полная фаза колебаний. Для колебаний (2) с точностью до слагаемых порядка μ (слагаемые, имеющие порядок μ^2 , от-

брасываются) имеем

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{\mu}{2} [a'(\tau) + ja(\tau)\varphi'(\tau)] \exp[j\psi(\xi, \tau)] + \\ &\quad + j\frac{\omega_0}{2} a(\tau) \exp[j\psi(\xi, \tau)] + \text{К.С.}, \\ x''(t) &= \mu\omega_0 [ja'(\tau) - a(\tau)\varphi'(\tau)] \exp[j\psi(\xi, \tau)] - \\ &\quad - \frac{\omega_0^2}{2} a(\tau) \exp[j\psi(\xi, \tau)] + \text{К.С.}, \end{aligned} \quad (3)$$

где штрихи означают производные по явно указанному аргументу, К.С. — комплексно сопряженные слагаемые.

Подставив выражения (2) и (3) в уравнение движения АКС (1) и сохранив в нем слагаемые порядка малости μ , получим приближенное равенство

$$\begin{aligned} \omega_0[ja'(\tau) - a(\tau)\varphi'(\tau)] \exp[j\psi(\xi, \tau)] + \text{К.С.} &= \\ = f(a(\tau) \cos \psi(\xi, \tau), -\omega_0 a(\tau) \sin \psi(\xi, \tau)). \end{aligned} \quad (4)$$

Выберем теперь точку ξ_0 такую, что $\psi(\xi_0, \tau) = 0$, и выберем на периоде $T_0 = 2\pi/\omega_0$ N точек: $\xi_n = n\Delta$, где $n = 0, 1, \dots, N-1$, а $\Delta = T_0/N$. Приращение фазы колебаний при переходе от точки к точке равно $\Delta\psi = \psi(\xi_{n+1}) - \psi(\xi_n) = \omega_0\Delta = 2\pi/N$. В точках дискретизации ξ_n проведем отсчеты сигналов в обеих частях равенства (1). Получим последовательность из N выборочных значений:

$$\begin{aligned} \omega_0[ja'(\tau) - a(\tau)\varphi'(\tau)] \exp[j2\pi n/N] + \text{К.С.} &= \\ = f(a(\tau) \cos(2\pi n/N), -\omega_0 a(\tau) \sin(2\pi n/N)). \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим оператор дискретного преобразования Фурье (ДПФ) как

$$\hat{\mathbf{F}}_N^k(\cdot) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (\cdot) \exp[-j2\pi nk/N], \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Результатом действия этого оператора на некоторую временную последовательность $S[n]$ является последовательность в частотной области $\bar{S}[k, N]$: $\bar{S}[k, N] = \hat{\mathbf{F}}_N^k(S[n])$. Нетрудно показать, что

$$\hat{\mathbf{F}}_N^k(\exp[-j2\pi n/N]) = \delta[k-1] \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, N-1.,$$

где $\delta[k-1]$ — единичный импульс. С учетом этого, применив оператор $\hat{\mathbf{F}}_N^k(\cdot)$ к обеим частям последовательности равенств (5), получим комплексное дифференциальное уравнение

$$ja'(\tau) - a(\tau)\varphi'(\tau) = \frac{1}{\omega_0} \hat{\mathbf{F}}_N^1(f(a(\tau) \cos(2\pi n/N), -\omega_0 a(\tau) \sin(2\pi n/N))),$$

которое эквивалентно системе двух действительных уравнений для амплитуды и фазы автоколебаний. Если вернуться к исходной временной переменной, то система будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{da(t)}{dt} = \frac{\mu}{\omega_0} \text{Im} \left\{ \hat{\mathbf{F}}_N^1(f(a(t) \cos(2\pi n/N), -\omega_0 a(t) \sin(2\pi n/N))) \right\}, \quad (6)$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -\frac{\mu}{\omega_0 a(t)} \text{Re} \left\{ \hat{\mathbf{F}}_N^1(f(a(t) \cos(2\pi n/N), -\omega_0 a(t) \sin(2\pi n/N))) \right\}. \quad (7)$$

В полученной системе укороченных уравнений (6), (7) не предполагается аналитической записи правых частей уравнений. Более того, даже тогда, когда такая запись возможна, проводить ее нецелесообразно. Необходимые для используемого метода численного интегрирования системы (6), (7) значения правых частей вычисляются в процессе интегрирования методом ДПФ.

2. Пример применения алгоритма

Рассмотрим для примера LC -автогенератор с эквивалентной схемой, изображенной на рис. 1. Активным элементом генератора является операционный усилитель (ОУ), охваченный через делитель напряжения на сопротивлениях R_1 и $R_1/(K-1)$ отрицательной обратной связью по инвертирующему входу. При таком включении малосигнальный коэффициент усиления ОУ равен K . Входное сопротивление ОУ предполагается бесконечно большим, выходное — бесконечно малым. Для реализации режима параллельного возбуждения LC -контура от источника тока в схему введено сопротивление R .

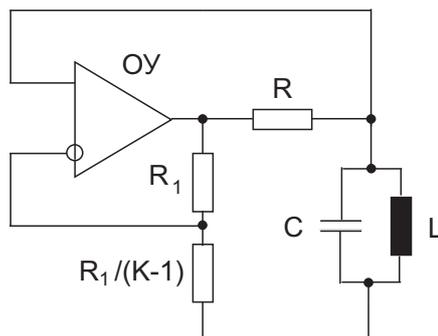


Рис. 1. Эквивалентная схема LC -автогенератора

При указанных допущениях для напряжения $u(t)$ на колебательном контуре можно получить уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 2\Pi \left(\frac{du_a}{du} - 1 \right) \frac{du}{dt}. \tag{8}$$

Здесь $\omega_0^2 = 1/LC$, $2\Pi = 1/RC$ — полоса контура. Выходное напряжение ОУ u_a является нелинейной функцией напряжения u . Рассмотрим вначале стандартную кубическую аппроксимацию этой зависимости:

$$u_a = K(1 - 4\alpha u^2/3)u, \tag{9}$$

где α — коэффициент нелинейности. При такой аппроксимации уравнение движения АКС (8) сводится к уравнению Ван-дер-Поля:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \mu\omega_0 (1 - 4x^2) \frac{dx}{dt}. \tag{10}$$

При записи (10) использованы обозначения: $x = u/U_{st}$ и $\mu = (K - 1)/Q$, где $U_{st} = \sqrt{(K - 1)/\alpha K}$ — некоторое характерное напряжение в системе и $Q = \omega_0/2\Pi = R/\sqrt{L/C}$ — добротность контура.

Уравнению движения (10) соответствует достаточно простое укороченное уравнение для амплитуды автоколебаний:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\mu\omega_0}{2} (1 - a^2)a. \quad (11)$$

Аналитическое решение этого уравнения хорошо известно [2] и приводить его мы здесь не будем. Вместо этого сравним результат численного интегрирования уравнения (11) и укороченного уравнения (7), которое в данном случае имеет вид

$$\frac{da}{dt} = \mu\omega_0 a \operatorname{Im} \left\{ \hat{\mathbf{F}}_N^1 \left((1 - 4a^2 \cos^2(2\pi n/N)) \sin(2\pi n/N) \right) \right\}. \quad (12)$$

На рис. 2 представлен график модуля разности $|Da(t)|$ решений укороченных уравнений (11) и (12). Решения получены путем численного интегрирования уравнений с параметрами $\omega_0 = 2\pi$, $\mu = 0.5$ при начальном условии $a(0) = 0.05$ методом Рунге-Кутты с фиксированным шагом $\Delta t = 0.06T_0$. Для преобразования Фурье в (12) использован алгоритм ДПФ с прореживанием во времени. Длина преобразуемой последовательности была принята равной $N = 2^3 = 8$.

Как видно из графика, разность численных решений укороченных уравнений, одно из которых аналитически задано, а другое численно сформировано, пренебрежимо мала. В области стационарных значений амплитуды автоколебаний $|Da(t)|$ быстро достигает величины "машинного нуля" (в данном случае это величина 10^{-16}).

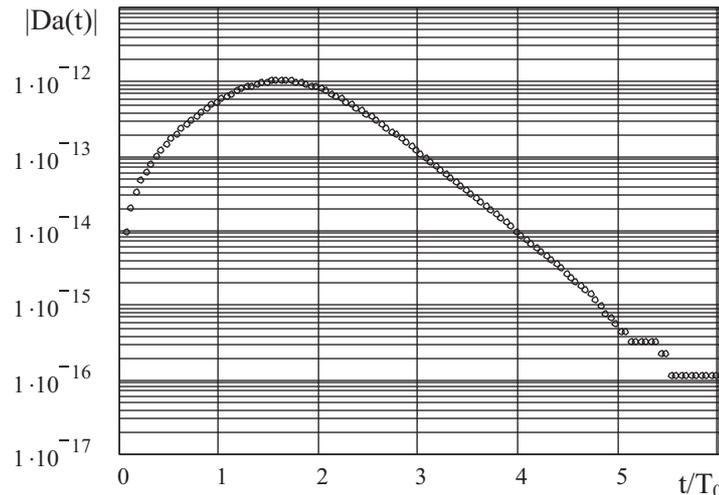


Рис. 2. График модуля разности $|Da(t)|$ решений укороченных уравнений (11) и (12)

Рассмотрим теперь более реалистичную, чем (9), аппроксимацию передаточной характеристики ОУ. Для этого исключим из характеристики (9)

падающие участки, которые наблюдаются при напряжении $u > U_s = 1/2 \sqrt{\alpha}$, и заменим их участками насыщения, для которых $u_a = K/3 \sqrt{\alpha}$. В этом случае для нелинейного коэффициента усиления ОУ $K_{nl}(u) = u'_a(u)$, входящего в правую часть уравнения движения АКС, (8) можно записать выражение

$$K_{nl}(u) = K \left(1 - u^2/U_s^2\right) [\theta(u + U_s) - \theta(u - U_s)],$$

содержащее функцию Хевисайда $\theta(u)$. Введя в рассмотрение нормированное напряжение $x(t) = u(t)/U_s$, уравнение (8) представим в виде

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = \mu \omega_0 \chi(x) \frac{du}{dt}, \tag{13}$$

где функция $\chi(x)$ определяется выражением

$$\chi(x) = \frac{K(1 - x^2)[\theta(x + 1) - \theta(x - 1)] - 1}{K - 1}. \tag{14}$$

Для уравнения движения (13) с функцией (14) в правой части вывод укороченного уравнения для амплитуды — весьма трудоемкий процесс, приводящий к громоздкому уравнению, не интегрируемому аналитически. В то же время применение уравнения (6) не вызывает каких-либо затруднений.

На рис. 3 приведен график временной зависимости амплитуды колебаний, полученный численным интегрированием уравнения (6), которое в этом случае имеет вид

$$\frac{da}{dt} = \mu \omega_0 a \operatorname{Im} \left\{ \hat{\mathbf{F}}_N^1 (\chi(a \cos(2\pi n/N)) \sin(2\pi n/N)) \right\}, \tag{15}$$

с начальным условием $a(0) = 0.05$. Шаг интегрирования $\Delta t = 0.06T_0$; параметры системы $\mu = 0.5$ и $K = 2$. Пунктиром на рис. 3 показан график

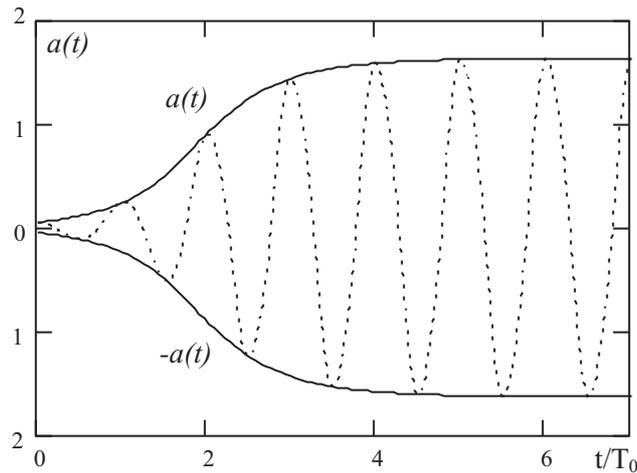


Рис. 3. График временной зависимости амплитуды колебаний, полученный численным интегрированием уравнения (6)

процесса установления автоколебаний, полученный непосредственно путем

численного интегрирования уравнения движения (8). Как видно из рисунка, решение уравнения (15) $a = a(t)$ достаточно точно огибает осцилляции. Отметим, что для любой из двух рассмотренных аппроксимаций передаточной характеристики ОУ автогенератор является изохронной системой, т.е. $\varphi(t) = \text{const}$.

Вопрос о точности получаемых численных решений на практике может быть решен следующим образом. Укороченные уравнения (6) и (7) интегрируются с возрастающей длиной последовательности $N = 2^v$ до тех пор, пока максимальная разность решений для v и $v+1$ не снизится до требуемой величины. В последнем примере имеют место следующие значения: $\delta a_v = \max \{|a_v(t) - a_{v+1}(t)|/a_{v+1}(t)\}$: $\delta a_5 = 6 \cdot 10^{-3}$, $\delta a_6 = 1.1 \cdot 10^{-3}$, $\delta a_7 = 5.5 \cdot 10^{-4}$ и т.д. Как видно, в этом случае значение $v = 5$ обеспечивает точность, вполне пригодную для практических расчетов.

3. ДПФ как дискретный фильтр

Вопрос об использовании ДПФ при формировании системы укороченных уравнений можно рассмотреть с точки зрения дискретной фильтрации сигналов. Действительно, преобразование $\bar{S}[k, N] = \hat{\mathbf{F}}_N^1(S[n])$, применяемое к обеим частям последовательности (5), можно рассматривать как преобразование сигнала линейной дискретной системой (фильтром). С учетом того, что $\exp(-j2\pi k) = 1$, преобразование записывается в виде

$$\bar{S}[k, N] = \hat{\mathbf{F}}_N^1(S[n]) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S[n] \exp[j2\pi k(N-n)/N]$$

и принимает форму свертки входного сигнала $S[n]$ с импульсной характеристикой КИХ-фильтра:

$$h_N^k[n] = \frac{1}{N} \exp[j2\pi kn/N], n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (16)$$

В этом выражении целое число k фиксировано и указывает на номер частотного канала (отсчета).

Импульсной характеристике (16) соответствует частотная характеристика фильтра вида

$$\begin{aligned} H_N^k(j\omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} h_N^k[n] \exp[-jn\omega\Delta] = \\ &= \exp[-j\pi(k-\Omega)] \frac{\sin(\pi(k-\Omega))}{N \sin(\pi(k-\Omega)/N)}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\Omega = \omega/\omega_0$ — относительная частота. На рис. 4 показаны графики модуля частотной характеристики первого частотного канала. Сплошная линия соответствует значению $N = 4$, прерывистая — $N = 8$. Как видно из графиков, результатом фильтрации является полное подавление гармоник сигнала, кроме тех, что имеют частоты $N+1$, $2N+1$, $3N+1$ и т.д. Каждая из

этих неподавленных гармоник воспринимается как колебание основной частоты. Поэтому необходимое для обеспечения заданной точности расчетов значение N зависит от уровня гармонических составляющих сигнала

$$S[n] = f(a \cos(2\pi n/N), -\omega_0 a \sin(2\pi n/N)).$$

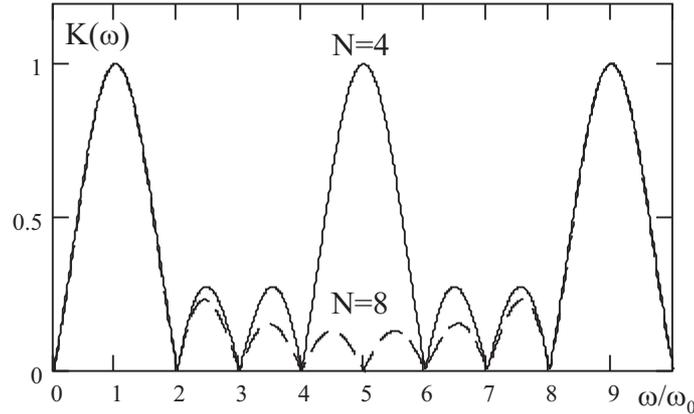


Рис. 4. График модуля частотной характеристики первого частотного канала

Следует также иметь в виду, что дискретный фильтр с частотной характеристикой (17) при вычислениях реализуется в цифровой форме. Из-за эффекта квантования коэффициентов фильтра подавление гармоник основной частоты будет неполным, что вносит определенный вклад в погрешность вычисления правых частей укороченных уравнений (6) и (7). Пример исследования ухудшения фильтра на основе ДПФ можно найти в работе [4].

4. Стационарные автоколебания

В режиме стационарных автоколебаний амплитуда и частота не зависят от времени. В этом случае укороченное уравнение (6) сводится к нелинейному алгебраическому уравнению для амплитуды a_{st} :

$$\text{Im} \left\{ \hat{\mathbf{F}}_N^1 (f(a_{st} \cos(2\pi n/N), -\omega_0 a_{st} \sin(2\pi n/N))) \right\} = 0, \tag{18}$$

которое может быть решено одним из стандартных численных методов, например, методом секущих. После чего частота автоколебаний определяется в соответствии с соотношением $\omega_{st} = \omega_0 + d\varphi_{st}(t)/dt$ как

$$\omega_{st} = \omega_0 - \frac{\mu}{\omega_0 a_{st}} \text{Re} \left\{ \hat{\mathbf{F}}_N^1 (f(a_{st} \cos(2\pi n/N), -\omega_0 a_{st} \sin(2\pi n/N))) \right\}.$$

На рис. 5 для примера приведен график зависимости амплитуды стационарных автоколебаний в генераторе с уравнением движения (13) от коэффициента усиления ОУ. Эквивалентная схема генератора показана на рис. 2. Расчет проведен для значений $\omega_0 = 2\pi$, $Q = 10$. Уравнение (18), в

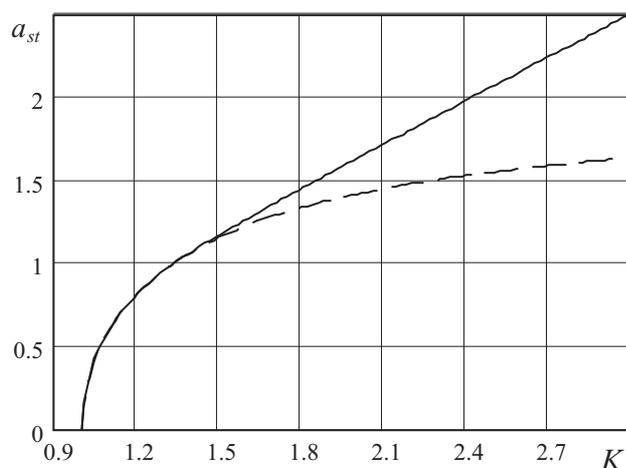


Рис. 5. График зависимости амплитуды стационарных автоколебаний в генераторе с уравнением движения (13) от коэффициента усиления ОУ

данном случае имеющее вид

$$\text{Im} \{ \hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{N}}^1(\chi(a_{st} \cos(2\pi n/N)) \sin(2\pi n/N)) \} = 0,$$

при $N = 2^5$ решалось методом секущих. Пунктиром на рис. 5 изображен график зависимости

$$a_{st} = 2 \sqrt{\frac{K-1}{K}},$$

имеющей место при кубической аппроксимации (9) передаточной характеристики ОУ. До значения $a_{st} = 1$, как и следовало ожидать, две кривые практически полностью совпадают.

Заметим, что рассчитанные предложенным здесь способом значения амплитуды можно уточнить, если использовать их в качестве начального приближения для метода, описанного в работе [5], в котором в решении учитываются гармоники автоколебаний.

Заключение

Предложенная здесь компьютерная версия метода ММА позволяет существенно экономить усилия, затрачиваемые на вывод системы укороченных уравнений. Вычислительные затраты метода зависят от длины последовательности N , используемой для вычисления дискретного преобразования Фурье. Так как требуется проводить преобразование для одной частотной точки, то следует использовать прямой способ реализации ДПФ. Применение алгоритма Герцеля повышает скорость вычисления $\hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{N}}^1(\cdot)$ за счет примерно двукратного по сравнению с прямым способом уменьшения количества умножений. Приведенные примеры и практика применения показывают, что необходимая для достижения заданной точности длина N

определяется уровнем гармоник нелинейной функции в правой части уравнения движения (1). При прочих равных условиях она всегда увеличивается, если в правой части (1) содержатся разрывы функций и (или) производных.

Аналогичным образом удастся получить систему укороченных уравнений для комплексных амплитуд $A_m(\tau)$ полигармонических колебаний:

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M A_m(\tau) \exp[jm\omega_0\xi] + K.C. .$$

При этом для вычисления преобразований $\hat{\mathbf{F}}_N^m(\cdot)$ при значительном количестве M учитываемых гармоник следует использовать алгоритмы быстрого преобразования Фурье.

Литература

- [1] Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р. и др. Основы теории колебаний / Под ред. В.В. Мигулина. М.: Наука, 1978. 392 с.
- [2] Найфе А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
- [3] Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984. 320 с.
- [4] Медведев С.Ю., Перов М.Ю., Якимов А.В. Влияние БПФ на оценку спектра // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45. № 3. С. 263–269.
- [5] Берестнев Д.П., Зайцев В.В., Яровой Г.П. Численный метод исследования стационарных режимов нелинейных систем // Математическое моделирование волновых процессов в электродинамических системах СВЧ. Самара: Изд-во СамГУ, 1992. С. 54–59.
- [6] Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов. М.: Сов. радио, 1973. 368 с.

Поступила в редакцию 06/II/2004;
в окончательном варианте – 06/II/2004.

**NUMERICAL IMPLEMENTATION OF MMA METHOD
AND THE DIGITAL SIGNAL FILTRATION**

© 2003 V.V. Zaitsev, O.V. Zaitsev, A.V. Nikulin, G.P. Yarovoy²

A computer implementation of the method of slowly changing amplitudes designed for modelling transient processes and stationary modes in self-oscillating systems of the Thompson type is presented. It is shown, that right-hand sides of shortened equations may be considered as a result of poligarmonic signals filtration, generated by nonlinearities of self-oscillation systems. Examples of using this method for computing quasiharmonic self-oscillations characteristics in a generator based on operational amplifier for two approximation types of its transfer characteristic are given.

Paper received 06/II/2004.

Paper accepted 06/II/2004.

²Zaitsev Valeriy Vasilievich (zaitsev@ssu.samara.ru), Zaitsev Oleg Valerievich, Nikulin Andrei Valentinovich, Yarovoy Gennadiy Petrovich, Dept. of Radiophysics and Computer Modelling of Radiosystems, Samara State University, Samara, 443011, Russia.