

ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О РОСТЕ ТРЕЩИНЫ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ В СРЕДЕ С ПОВРЕЖДЕННОСТЬЮ¹

© 2004 Л.В. Степанова, М.Е. Федина²

Приведено асимптотическое исследование полей напряжений, скоростей деформаций ползучести и сплошности у вершины растущей в условиях ползучести трещины нормального отрыва с учетом процесса накопления рассеянных повреждений. Установлено, что к вершине трещины и к ее берегам примыкает область полностью поврежденного материала, конфигурация которой найдена и исследована. Показано, что решение Хатчинсона—Райса—Розенгрена не может быть принято в качестве граничного условия в бесконечно удаленной точке и получена новая асимптотика дальнего поля напряжений, управляющая геометрией области полностью поврежденного материала. Конфигурация области полностью поврежденного материала приведена для наблюдателя, находящегося на разных расстояниях от вершины растущей трещины.

Введение

Анализ напряженно-деформированного состояния в теле с трещиной с учетом процесса накопления повреждений представляет особый интерес, поскольку комбинации компонент тензора напряжений и параметр поврежденности входят, как правило, в критерий разрушения и, следовательно, определяют условия работы элемента конструкции.

Исследованию полей напряжений, деформаций и сплошности (поврежденности) в связанной постановке задачи в различных связках ("упругость—поврежденность", "пластичность—поврежденность", "ползучесть—поврежденность" и более сложных) в последнее время уделяется значительное внимание [1–7]. Связанность постановки задачи обусловлена необходимостью описания влияния накопления микродефектов в теле с макроскопической трещиной на напряженно-деформированное состояние, с одной сто-

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором В.И. Астафьевым.

²Степанова Лариса Валентиновна (1st@ssu.samara.ru), Федина Мария Ефимовна (phedina@ssu.samara.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

роны, а с другой — желанием учесть обратный процесс, а именно процесс изменения напряженно-деформированного состояния вследствие образования и роста микродефектов.

Установлено, что накопленные в теле с макротрещиной повреждения приводят к отсутствию характерной как для линейной, так и для нелинейной механики разрушения сингулярности поля напряжений в окрестности вершины трещины либо к ее существенному ослаблению [1–7].

В настоящей работе показано, что влияние процесса накопления повреждений проявляется в изменении не только ближнего поля напряжений (поля напряжений в непосредственной окрестности вершины трещины), но и дальнего поля напряжений (поля напряжений на большом удалении от вершины трещины, но на расстояниях, все еще малых по сравнению с длиной трещины, характерным линейным размером тела).

При изучении напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины часто используется подход в стиле "теории пограничного слоя" [8] или "принцип микроскопа" [9], в рамках которых изучается непосредственная окрестность вершины трещины, и в такой постановке трещина предполагается полубесконечной, а истинные граничные условия заменяются условиями асимптотического сближения, например, с особым упругим решением при исследовании трещины в упругопластическом материале в предположении маломасштабного пластического течения [10, 11]. В этом случае говорят, что область пластического течения "полностью управляется" особым упругим решением. Аналогичный метод при решении задачи о росте трещины в упругопластических материалах применяется при формулировке граничного условия в бесконечно удаленной точке в [12–14]. Формулировка граничного условия в бесконечно удаленной точке в стиле "теории пограничного слоя" используется и при решении задач механики трещин в связанной постановке. Так, в [5–7] исследуется напряженно-деформированное состояние у вершины трещины антиплоского сдвига [5] и нормального отрыва [6, 7] в связанной постановке в связках "упругость—поврежденность" и "пластичность—поврежденность", где предполагается, что поле напряжений непосредственно у вершины трещины искажается вследствие процесса накопления повреждений, тогда как при удалении от вершины трещины, где материал является неповрежденным, можно считать, что поле напряжений полностью определяется сингулярным упругим решением. Таким образом, вновь принимается гипотеза, согласно которой область накопления рассеянных повреждений полностью определяется особым упругим решением.

Подобный подход используется и при постановке граничного условия в бесконечно удаленной точке в упругом нелинейно-вязком материале [15, 16].

В настоящей работе рассматриваются определяющие соотношения $\dot{\epsilon}_{ij} = (3B/2)(\sigma_e/\psi)^{n-1} s_{ij}/\psi$, основанные на степенном законе Нортона теории установившейся ползучести.

При исследовании поля сплошности на значительном удалении от вершины трещины можно предположить, что параметр сплошности стремится к единице, что соответствует неповрежденному материалу. Тогда определяющие соотношения рассматриваемой задачи полностью совпадают со степенным законом установившейся ползучести, поэтому естественно предположить, что граничные условия могут быть сформулированы как условия асимптотического сближения с решением Хатчинсона—Райса—Розенгрена (Hutchinson—Rice—Rosengren (HRR)) [17, 18].

В настоящей работе показано, что решение HRR не может быть принято в качестве граничного условия в бесконечно удаленной точке. Следовательно, влияние процесса накопления повреждений проявляется и в изменении поля напряжений на расстояниях от вершины трещины много больше, чем характерный линейный размер области полностью поврежденного материала, моделируемой в окрестности вершины трещины, но все еще малых по сравнению с длиной трещины, с характерным линейным размером тела.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о растущей полубесконечной трещине типа I в неограниченном теле (рис. 1). Пусть определяющие соотношения исследуемого материала построены на основе степенной зависимости между скоростями деформаций ползучести и напряжениями:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\psi}, \quad (1.1)$$

где $\dot{\epsilon}_{ij}$ — компоненты тензора скоростей деформаций ползучести; B , n — константы материала; σ_e — интенсивность напряжений: в случае плоского деформированного состояния $\sigma_e^2 = 3(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2/4 + 3\sigma_{r\varphi}^2$, в случае плоского напряженного состояния $\sigma_e^2 = \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + 3\sigma_{r\varphi}^2$, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ψ — параметр сплошности Качанова [19] ($\omega = 1 - \psi$ — параметр поврежденности Работнова [20]); $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}/3$ — компоненты девиатора напряжений: в случае плоского деформированного состояния $s_{rr} = -s_{\varphi\varphi} = (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})/2$, в случае плоского напряженного состояния $s_{rr} = (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})/3$, $s_{\varphi\varphi} = (2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})/3$.

Изучим поля напряжений, скоростей деформаций ползучести и скалярный параметр сплошности на значительном удалении от вершины распространяющейся трещины типа I в условиях плоского деформированного и плоского напряженного состояний. Напряженно-деформированное состояние в непосредственной окрестности вершины движущейся трещины в материале с определяющими соотношениями вида (1.1) в среде с поврежденностью было предметом многочисленных исследований [1–4]. В [1, 2] показано, что вблизи берегов трещины и ее вершины существует область полностью поврежденного материала или (и) зона активного накопления по-

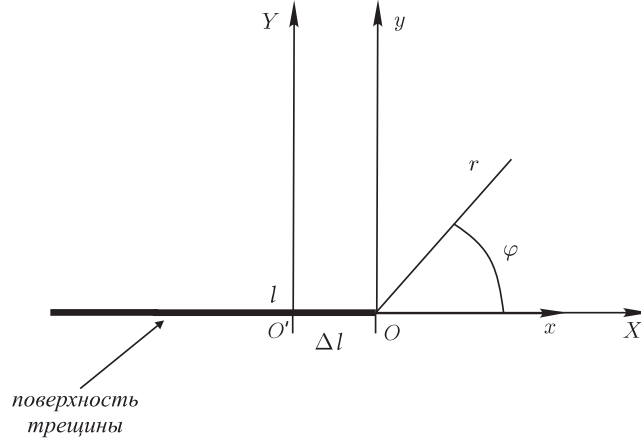


Рис. 1. Геометрия вершины растущей трещины: $XO'Y$ — неподвижная система координат, xOy — движущаяся вместе с вершиной трещины система координат

вреждений (микропор, микротрещин, микродефектов), иногда называемая зоной процесса. В силу этого традиционные для механики сплошных сред уравнения не могут быть сформулированы в непосредственной окрестности вершины продвигающейся трещины. Поэтому примем, что вблизи вершины дефекта существует зона полностью поврежденного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности равны нулю. Пусть разрешающая система уравнений (уравнения равновесия, условие совместности деформаций, кинетическое уравнение накопления повреждений) исследуется на значительном удалении от вершины дефекта, что позволяет найти асимптотику дальнего поля напряжений и определить конфигурацию области полностью поврежденного материала.

Итак, необходимо найти решение системы уравнений, сформулированной в полярной системе координат с полюсом в вершине подвижной трещины (рис. 1), состоящей из уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0; \quad (1.2)$$

соотношений Коши, связывающих перемещения и деформации,

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}, \quad 2\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}, \quad (1.3)$$

где ε_{ij} — компоненты тензора деформаций, u_i — перемещения; условия совместности деформаций, сформулированные для скоростей деформаций ползучести,

$$2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_{rr}}{\partial \varphi^2} - r \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{rr}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 (r \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi})}{\partial r^2}; \quad (1.4)$$

кинетического уравнения, постулирующего степенной закон накопления по-

вреждений

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\sigma_{eqv}}{\psi} \right)^m, \quad (1.5)$$

где A , m — константы материала; t — время;

$$\sigma_{eqv} = \alpha \sigma_1 + \beta \sigma_e + (1 - \alpha - \beta) \sigma_{kk}$$

— эквивалентное напряжение, где σ_1 — максимальное главное напряжение, σ_{kk} — гидростатическое напряжение, константы α и β находятся экспериментально. В случае трещины, движущейся с некоторой скоростью $v(t)$ в направлении оси x , материальная производная по времени t имеет вид

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - v \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).$$

Определяющие соотношения (1.1) представляются в форме:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{rr} = -\dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} &= \frac{3}{4} B \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\psi}, \\ \dot{\epsilon}_{r\varphi} &= \frac{3}{2} B \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{r\varphi}}{\psi} \end{aligned} \quad (1.6)$$

в случае плоской деформации и

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{rr} &= \frac{1}{2} B \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\psi}, \\ \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2} B \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}}{\psi}, \\ \dot{\epsilon}_{r\varphi} &= \frac{3}{2} B \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{r\varphi}}{\psi} \end{aligned} \quad (1.7)$$

в случае плоского напряженного состояния.

Условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины имеют вид

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi = \pm\pi, t) = 0, \quad \sigma_{r\varphi}(r, \varphi = \pm\pi, t) = 0. \quad (1.8)$$

Граничное условие в бесконечно удаленной точке имеет форму

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \varphi, t) \rightarrow \tilde{C} r^S \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n), \quad (1.9)$$

где значения S находятся в процессе решения задачи; $\bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n)$ — функции, подлежащие определению.

Следует отметить, что граничное условие (1.9) для рассматриваемых определяющих соотношений (1.1) в бесконечно удаленной точке может быть сформулировано как

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \varphi, t) = \left(\frac{C^*}{B I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n), \quad (1.10)$$

поскольку в бесконечно удаленной точке $\psi = 1$ и двучленное асимптотическое разложение скалярного параметра сплошности при больших расстояниях от вершины трещины разыскивается в форме

$$\psi(r, \varphi, t) = 1 - r^\gamma g(\varphi, t) + o(r^\gamma), \quad \gamma < 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.11)$$

В этом случае определяющие уравнения (1.1) сводятся к обычным соотношениям степенного закона установившейся ползучести. Однако, как будет показано ниже, из кинетического уравнения накопления повреждений (1.5) вытекает соотношение $\gamma = 1 - m/(n+1)$ и так как $m = 0,7n$ [22], то $\gamma > 0$, что противоречит условию $\gamma < 0$ в (1.11). Следовательно, граничное условие (1.10) принимается в более общем виде (1.9) и $S \neq -1/(n+1)$. Постоянная $\tilde{C}$ может быть найдена путем решения задачи с истинными граничными условиями для реального элемента конструкции, находящегося под действием определенной системы нагрузок.

Начальные условия представляются в следующем виде:

$$\sigma_{ij}(r, \varphi, t = 0) = \tilde{C} r^S \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n). \quad (1.12)$$

Решение краевой задачи (1.2)–(1.7) с граничными условиями (1.8), (1.9) является функцией следующего множества переменных и материальных параметров задачи: $r, \varphi, t, A, m, \nu, \tilde{C}, B, n$.

Анализ размерностей показывает, что можно перейти к следующим безразмерным функциям:

$$\sigma_{ij}(r, \varphi, t) = \left[\tilde{C} \left(\frac{\nu}{A} \right)^S \right]^{\frac{1}{S+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{r}, \varphi, \tilde{t}), \quad (1.13)$$

$$\psi(r, \varphi, t) = \tilde{\psi}(\tilde{r}, \varphi, \tilde{t}),$$

где $\tilde{\sigma}_{ij}$ и $\tilde{\psi}$ — безразмерные функции от безразмерных переменных $\tilde{r} = r/r_0$ и $\tilde{t} = t\nu/r_0$,

$$r_0 = \left[\tilde{C}^{-m} \frac{\nu}{A} \right]^{\frac{1}{S+1}}.$$

Далее символ $\sim$ опускается.

Уравнения равновесия и условие совместности для безразмерных величин сохраняют свой вид. Кинетическое уравнение будет иметь следующую форму:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \cos \varphi \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = - \left(\frac{\sigma_{eqv}}{\psi} \right)^m. \quad (1.14)$$

Начальные условия и граничные условия в бесконечно удаленной точке в безразмерных переменных примут следующий вид:

$$\sigma_{ij}(r, \varphi, t = 0) = r^S \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n), \quad (1.15)$$

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \varphi, t) \rightarrow r^S \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n). \quad (1.16)$$

2. Асимптотическое решение задачи

Компоненты тензора напряжений представляются с помощью функции напряжений Эри $F(r, \varphi, t)$ как

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \sigma_{rr} = \Delta F - \sigma_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right),$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

— оператор Лапласа.

Решение системы уравнений (1.2)–(1.7) с граничными условиями (1.8), (1.15), (1.16) будем разыскивать в форме степенных разложений

$$F(r, \varphi, t) = r^\lambda f(\varphi, t) + o(r^\lambda) \quad (\lambda < 0),$$

$$\psi(r, \varphi, t) = 1 - r^\gamma g(\varphi, t) + o(r^\gamma) \quad (\gamma < 0)$$

при $r \rightarrow \infty$, двигаясь от бесконечно удаленной точки к окрестности вершины трещины, $\lambda = S + 2$.

Компоненты тензора напряжений и интенсивность напряжений определяются равенствами:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \varphi) &= r^{\lambda-2} (\lambda f + f'') = r^{\lambda-2} f_{rr}(\varphi), \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi) &= r^{\lambda-2} \lambda(\lambda - 1) f = r^{\lambda-2} f_{\varphi\varphi}(\varphi), \\ \sigma_{r\varphi}(r, \varphi) &= r^{\lambda-2} (1 - \lambda) f' = r^{\lambda-2} f_{r\varphi}(\varphi), \\ \sigma_e(\varphi) &= r^{\lambda-2} \sigma(\varphi), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где в случае плоской деформации

$$\sigma^2 = \lambda^2 (\lambda - 2)^2 f^2 + 4(\lambda - 1)^2 (f')^2 + 2\lambda(2 - \lambda) f f'' + (f'')^2 \tag{2.2}$$

и в случае плоского напряженного состояния

$$\sigma^2 = \lambda^2 (\lambda^2 - 3\lambda + 3) f^2 + 3(\lambda - 1)^2 (f')^2 + \lambda(3 - \lambda) f f'' + (f'')^2. \tag{2.3}$$

Подставляя асимптотические разложения (2.1)–(2.3) в определяющие соотношения (1.6), (1.7) и условие совместности деформаций (1.4), получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно функции $f(\varphi)$

$$\begin{aligned}
f^{IV} = & \left\{ \lambda(\lambda - 2)\sigma^4 f'' - (n - 1)(n - 3)p^2 [\lambda(2 - \lambda)f + f''] + \right. \\
& + 4(\lambda n - 2n + 1)(1 - \lambda) [\sigma^4 f'' + (n - 1)\sigma^2 p f'] + \\
& + n(\lambda - 2)\sigma^4 (\lambda n - 2n + 2) [\lambda(2 - \lambda)f + f''] - \\
& - 2(n - 1)\sigma^2 p [\lambda(2 - \lambda)f' + f'''] - \\
& - (n - 1)\sigma^2 [\lambda(2 - \lambda)f + f''] [\lambda^2(\lambda - 2)^2 ((f')^2 + f f'') + \\
& + (3\lambda^2 - 6\lambda + 4)((f'')^2 + f' f''') + \lambda(2 - \lambda)f' f''' + (f''')^2] \left. \right\} \times \\
& \times [\sigma^4 + (n - 1)\sigma^2 [\lambda(2 - \lambda)f + f'']^2]^{-1},
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где

$$p = f'' f''' + (3\lambda^2 - 6\lambda + 4)f' f'' + \lambda(2 - \lambda)f f''' + \lambda^2(2 - \lambda)^2 f f'$$

в случае плоской деформации и

$$\begin{aligned}
f^{IV} = & \left\{ (1 - n)\sigma^2 [\lambda(3 - \lambda)f + 2f''] [2\lambda^2(\lambda^2 - 3\lambda + 3) \times \right. \\
& \times ((f')^2 + f f'') + 6(\lambda - 1)^2 ((f'')^2 + f' f''') + \\
& + \lambda(3 - \lambda)((f'')^2 + 2f' f''') + 2(f''')^2] - \\
& - 2(n - 1)\sigma^2 p [\lambda(3 - \lambda)f' + 2f'''] - \\
& - (n - 1)(n - 3)p^2 [\lambda(3 - \lambda)f + 2f''] / 2 - \\
& - 2\lambda(3 - \lambda)\sigma^4 f'' + 6(\lambda n - 2n + 1) \times \\
& \times (1 - \lambda) [(n - 1)\sigma^2 p f' + 2\sigma^4 f''] + 2n(2 - \lambda)\sigma^4 \times \\
& \times [\lambda(2n\lambda^2 - 7n\lambda + 3\lambda + 6n - 6)f - (\lambda n - 2n + 3)f''] \left. \right\} \times \\
& \times [4\sigma^4 + (n - 1)\sigma^2 [\lambda(3 - \lambda)f + 2f'']^2]^{-1},
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$p = 2f'' f''' + (5\lambda^2 - 9\lambda + 6)f' f'' + \lambda(3 - \lambda)f f''' + 2\lambda^2(\lambda^2 - 3\lambda + 3)f f'$$

в случае плоского напряженного состояния с граничными условиями отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$f(\pi) = 0, \quad f'(\pi) = 0 \tag{2.6}$$

и условиями симметрии на ее продолжении

$$f'(0) = 0, \quad f'''(0) = 0. \tag{2.7}$$

Уравнения (2.4), (2.5) являются нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями четвертого порядка, для нахождения численного решения которых удобно использовать метод Рунге—Кутты—Фельдберга пятого порядка [23] в сочетании с методом пристрелки. Поэтому решение краевых задач (1) и (2) с граничными условиями (2.6), (2.7) сводится к

исследованию задач Коши. Для сведения двухточечной краевой задачи к начальной задаче граничные условия при $\varphi = \pi$ заменяются начальными $f(0) = c_1$, $f''(0) = c_2$ при $\varphi = 0$. В силу однородности уравнений (1) и (2) можно принять условие нормировки $f(0) = 1$. Таким образом, начальные условия имеют вид

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = c_2, \quad f'''(0) = 0. \quad (2.8)$$

С помощью замены $f = y$, $f' = y_1$, $f'' = y_2$, $f''' = y_3$ перейдем от дифференциальных уравнений четвертого порядка к двум системам (для случая плоской деформации и плоского напряженного состояния), каждая из которых будет состоять из четырех уравнений первого порядка относительно функций $y(\varphi)$, $y_1(\varphi)$, $y_2(\varphi)$, $y_3(\varphi)$:

$$\begin{aligned} y' &= y_1, \quad y'_1 = y_2, \quad y'_2 = y_3, \\ y'_3 &= \left\{ \lambda(\lambda - 2)\sigma^4 y_2 - (n - 1)(n - 3)p^2 [\lambda(2 - \lambda)y + y_2] + \right. \\ &\quad + 4(\lambda n - 2n + 1)(1 - \lambda) [\sigma^4 y_2 + (n - 1)\sigma^2 p y_1] + \\ &\quad + n(\lambda - 2)\sigma^4 (\lambda n - 2n + 2) [\lambda(2 - \lambda)y + y_2] - \\ &\quad - 2(n - 1)\sigma^2 p [\lambda(2 - \lambda)y_1 + y_3] - \\ &\quad - (n - 1)\sigma^2 [\lambda(2 - \lambda)y + y_2] [\lambda^2(\lambda - 2)^2 (y_1^2 + y y_2) + \\ &\quad + (3\lambda^2 - 6\lambda + 4)(y_2^2 + y_1 y_3) + \lambda(2 - \lambda)y_1 y_3 + y_3^2] \Big\} \times \\ &\quad \times [\sigma^4 + (n - 1)\sigma^2 [\lambda(2 - \lambda)y + y_2]^2]^{-1}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$p = y_2 y_3 + (3\lambda^2 - 6\lambda + 4)y_1 y_2 + \lambda(2 - \lambda)y y_3 + \lambda^2(2 - \lambda)^2 y y_1$$

в случае плоского деформированного состояния и

$$\begin{aligned} y' &= y_1, \quad y'_1 = y_2, \quad y'_2 = y_3, \\ y'_3 &= \left\{ (1 - n)\sigma^2 [\lambda(3 - \lambda)y + 2y_2] \left[2\lambda^2(\lambda^2 - 3\lambda + 3) \times \right. \right. \\ &\quad \times (y_1^2 + y y_2) + 6(\lambda - 1)^2 (y_2^2 + y_1 y_3) + \\ &\quad + \lambda(3 - \lambda)(y_2^2 + 2y_1 y_3) + 2y_3^2 \Big] - \\ &\quad - 2(n - 1)\sigma^2 p [\lambda(3 - \lambda)y_1 + 2y_3] - \\ &\quad - (n - 1)(n - 3)p^2 [\lambda(3 - \lambda)y + 2y_2] / 2 - \\ &\quad - 2\lambda(3 - \lambda)\sigma^4 y_2 + 6(\lambda n - 2n + 1) \times \\ &\quad \times (1 - \lambda) [(n - 1)\sigma^2 p y_1 + 2\sigma^4 y_2] + 2n(2 - \lambda)\sigma^4 \times \\ &\quad \times [\lambda(2n\lambda^2 - 7n\lambda + 3\lambda + 6n - 6)y - (\lambda n - 2n + 3)y_2] \Big\} \times \\ &\quad \times [4\sigma^4 + (n - 1)\sigma^2 [\lambda(3 - \lambda)y + 2y_2]^2]^{-1}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$p = 2y_2 y_3 + (5\lambda^2 - 9\lambda + 6)y_1 y_2 + \lambda(3 - \lambda)y y_3 + 2\lambda^2(\lambda^2 - 3\lambda + 3)y y_1$$

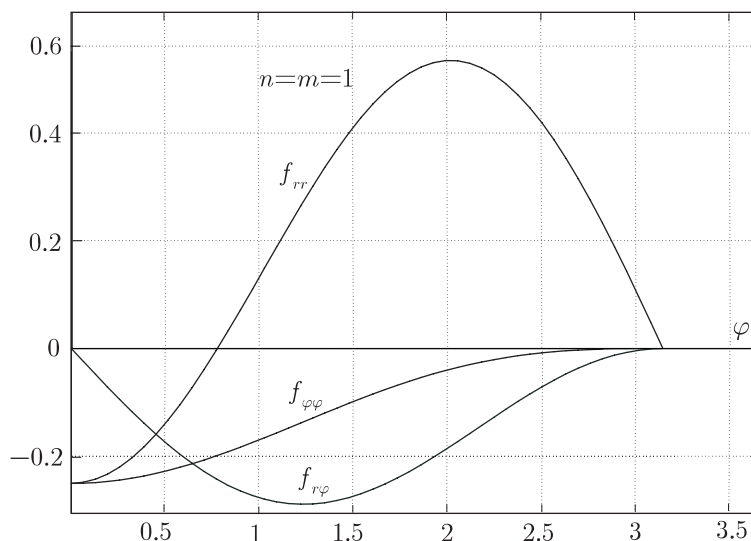


Рис. 2. График зависимости компонент тензора напряжений от полярного угла в случае трещины нормального отрыва при плоском напряженном состоянии для $n = 1$ и $m = 1$

в случае плоского напряженного состояния.

Рассматривая системы уравнений (2.9), (2.10) и (2.10), (2.11) с условиями (2.8) как задачи на собственные значения (λ — определяемое собственное значение) методом Рунге—Кутты—Фельдберга, можно найти численное решение задачи.

Численное решение систем уравнений (2.9), (2.10) и (2.10), (2.11) позволяет найти такие собственные значения S и постоянную c_2 для разных n , что выполняются граничные условия при $\varphi = \pi$: $f(\pi) = 0$ и $f'(\pi) = 0$. При определении констант S и c_2 проверялось выполнение условия $f^2(\pi) + (f'(\pi))^2 \leq \varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-5}$. Собственные значения S и значения второй производной функции $f(\varphi)$ на линии, продолжающей трещину $\varphi = 0$, приводятся в табл. 1 и 2 для случая плоского деформированного и плоского напряженного состояний соответственно. Графики зависимости компонент тензора напряжений от полярного угла для трещины нормального отрыва в случае плоской деформации и плоского напряженного состояния при $n = 1$ и $n = 5$ приводятся на рис. 2, 3. Угловые распределения компонент тензора напряжений для остальных n имеют характер, сходный с показанным на рис. 3, за исключением случаев $n = 2$ для плоского деформированного случая и $n = 3$ для плоского напряженного состояния, для которых $\lambda = 1$, поэтому в силу (2.1) $\sigma_{ij} = \text{const}$ для всех i, j .

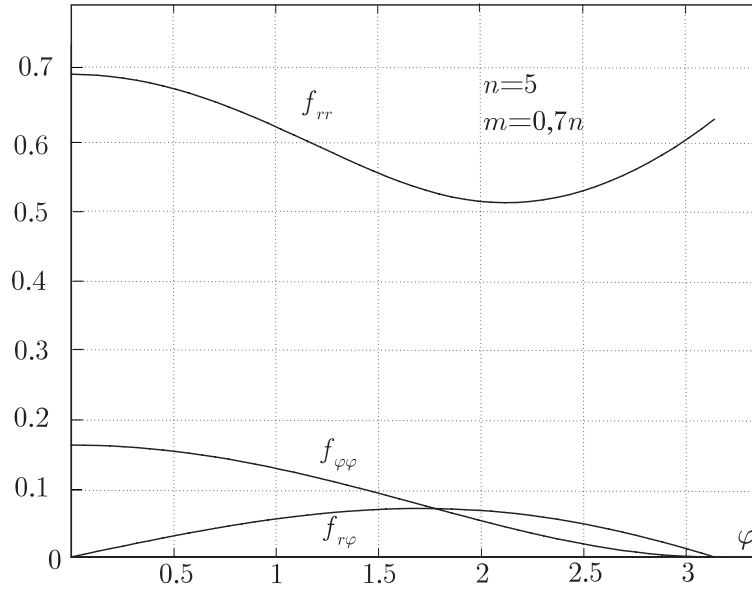


Рис. 3. График зависимости компонент тензора напряжений от полярного угла в случае трещины нормального отрыва при плоском напряженном состоянии для $n = 5$ и $m = 0,7n$

Таблица 1

Собственные числа S и значения $f''(0)$ в случае плоского деформированного состояния

n	S	$f''(0)$
1	-1,5	-0,75
2	-1,0	-0,5
3	-0,771694	-0,43724
4	-0,668489	-0,409203
5	-0,617909	-0,398556
6	-0,5901244	-0,395027
7	-0,573245	-0,394371
8	-0,562138	-0,394869
9	-0,554369	-0,395813

Подставляя асимптотическое разложение (2.1) в кинетическое уравнение (1.14) в предположении установившегося роста трещины, можно получить следующее дифференциальное уравнение:

$$\sin \varphi g'(\varphi) - \gamma \cos \varphi g(\varphi) = \sigma^m(\varphi), \quad (2.11)$$

где $\gamma = 1 + Sm$. Значения показателя степени γ в разложении скалярного параметра сплошности приведены в табл. 3 и 4 в случае плоской деформации и в случае плоского напряженного состояния соответственно.

Двучленное асимптотическое разложение параметра сплошности позволяет оценить форму и размеры области полностью поврежденного материала

Таблица 2

Собственные числа S и значения $f''(0)$ в случае
плоского напряженного состояния

n	S	$f''(0)$
1	-1,5	-0,75
2	-1,154032	-0,5686
3	-1,0	-0,5
4	-0,913383	-0,465842
5	-0,858016	-0,442866
6	-0,819798	-0,426159
7	-0,7919591	-0,413462
8	-0,770842	-0,403501
9	-0,754321	-0,395546

Таблица 3

Значения показателя степени γ в разложении
скалярного параметра сплошности в случае
плоского деформированного состояния

n	m	γ
1	1	-0,5
2	$0,7n$	-0,4
3	$0,7n$	-0,6205574
4	$0,7n$	-0,8717692
5	$0,7n$	-1,1626815
6	$0,7n$	-1,47852248
7	$0,7n$	-1,8089005
8	$0,7n$	-2,1479728
9	$0,7n$	-2,4925247

ла. Используя найденные угловые распределения компонент тензора напряжений, можно отыскать функцию $g(\varphi, t)$, исследуя численно обыкновенное дифференциальное уравнение (2.11) с условием регулярности его решения при $\varphi = 0$ $g(0) = -[\sigma(0)]^m/\gamma$.

Поскольку на границе данной зоны параметр сплошности обращается в нуль: $\psi(r, \varphi, t) = 1 - r^\gamma g(\varphi, t) = 0$, то уравнение границы области полностью поврежденного материала имеет вид:

$$r(\varphi, t) = [g(\varphi, t)]^{-1/\gamma}.$$

Конфигурация области полностью поврежденного материала представлена на рис. 4–6 для одного и того же $n = 3$ ($m = 0,7n$), но для наблюдателя, находящегося на разных расстояниях от вершины растущей трещины.

Таблица 4

Значения показателя степени γ в разложении
скалярного параметра сплошности в случае
плоского напряженного состояния

n	m	γ
1	1	-0,5
2	$0,7n$	-0,6156448
3	$0,7n$	-1,1
4	$0,7n$	-1,5574724
5	$0,7n$	-2,003056
6	$0,7n$	-2,4431516
7	$0,7n$	-2,88059959
8	$0,7n$	-3,3167152
9	$0,7n$	-3,753287

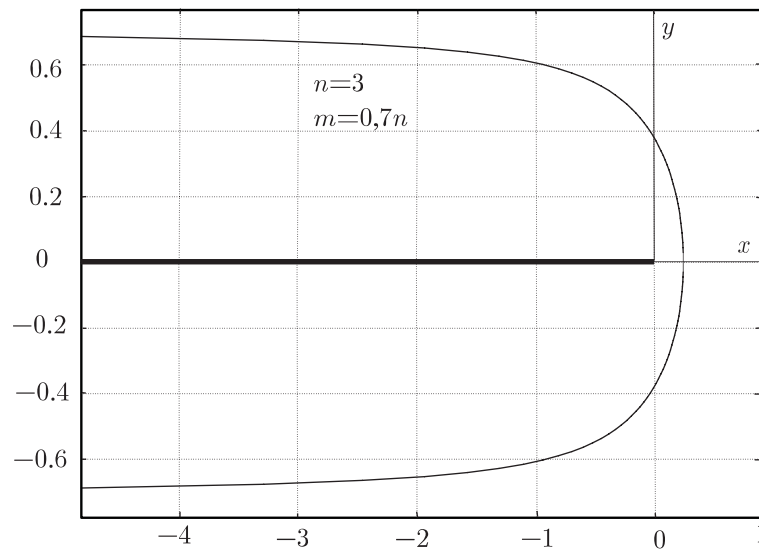


Рис. 4. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 3$ и $m = 0,7n$

Выводы

Определена асимптотика напряжений дальнего поля для подвижной трещины типа I в условиях плоского деформированного и плоского напряженного состояний. Установлено, что асимптотика HRR — ставшая уже классической асимптотика компонент тензора напряжений у вершины трещины для степенной зависимости между компонентами тензора напряжений и деформаций (или скоростей деформаций) — не может служить граничным условием в бесконечно удаленной точке в задаче о росте полубесконечной трещины в среде с поврежденностью для рассматриваемого ти-

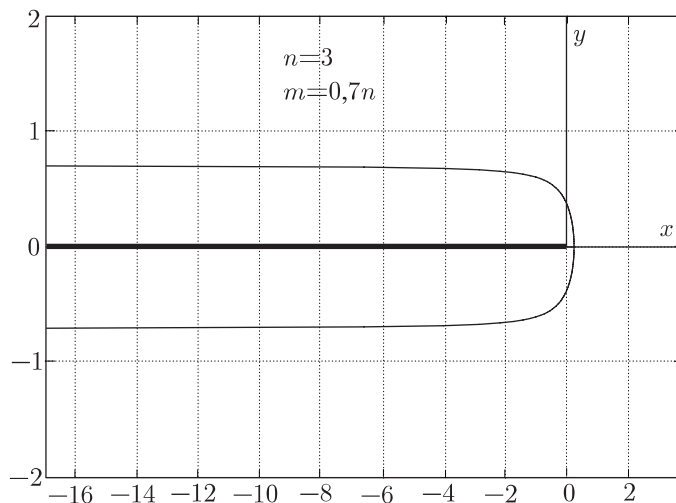


Рис. 5. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 3$ и $m = 0,7n$

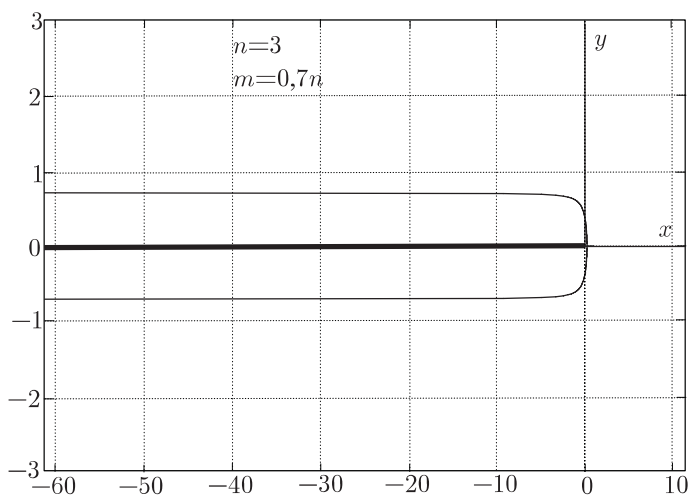


Рис. 6. Геометрия области полностью поврежденного материала для $n = 3$ и $m = 0,7n$

па определяющих соотношений. Невозможность формулировки граничного условия в бесконечно удаленной точке как требования асимптотического сближения искомого решения с решением HRR можно объяснить тем обстоятельством, что размеры области полностью поврежденного материала превосходят размеры зоны доминирования решения HRR, так что зона, где справедливо решение HRR, частично или полностью охвачена областью полностью поврежденного материала и, следовательно, геометрия последней не может управляться асимптотикой HRR (рис. 7).

Следует отметить, что спектр собственных значений данной задачи и характер сингулярности компонент тензора напряжений у вершины трещи-

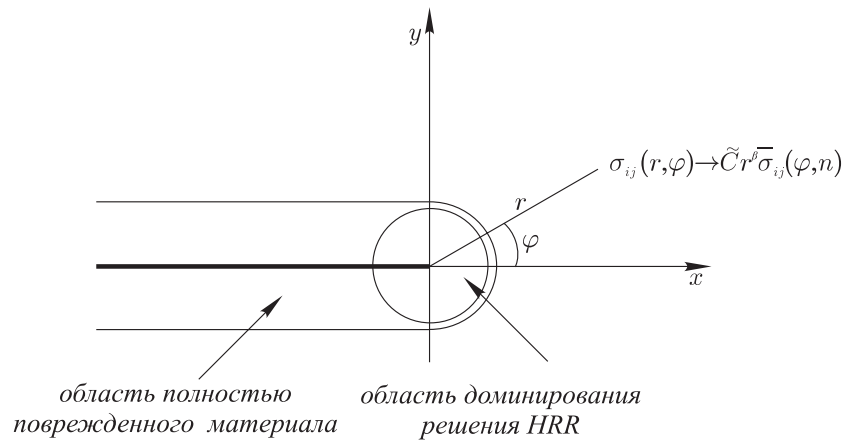


Рис. 7. Конфигурация области полностью поврежденного материала и зона преобладания решения HRR

ны исследовался в [21], где были получены собственные значения лишь для отдельных показателей степенного закона установившейся ползучести ($n = 1, n = 3, n = 5$). Полученные в настоящей работе собственные значения для всех важных с практической точки зрения показателей n (табл. 1–4) совпадают с собственными значениями, определенными в [21].

Сравнительно простой подход, реализованный в настоящей работе, дает возможность определить геометрию области полностью поврежденного материала у вершины трещины и ее берегов. Можно отметить, что во многих случаях исследователи задают границу области полностью поврежденного материала априори, опираясь, например, на экспериментальные наблюдения [3], где граница области перед вершиной трещины описывается дугой эллипса, а за ее вершиной доопределяется двумя прямыми, параллельными берегам трещины. В отличие от подхода, используемого в [3], в рамках настоящего исследования удастся единой зависимостью $r = r(\varphi)$ найти границу области полностью поврежденного материала.

Литература

- [1] Астафьев В.И., Григорова Т.В., Пастухов В.А. Влияние поврежденности материала на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины при ползучести // ФХММ. 1992. Т. 28. № 1. С. 5–11.
- [2] Астафьев В.И., Григорова Т.В. Распределение напряжений и поврежденности у вершины растущей в процессе ползучести трещины // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. № 3. С. 160–166.
- [3] Murakami S., Hirano T., Liu Y. Asymptotic fields of stress and damage of a mode I creep crack in steady-state growth // Int. J. Solids Structures. 2000. V. 37. No. 43. P. 6203–6220.

- [4] Murakami S., Liu Y., Miruno M. Computational methods for creep fracture analyses by damage mechanics // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2000. V. 183, No.1–2. P. 15–33.
- [5] Jin Z.H., Batra R.C. Crack shielding and material deterioration in damage materials: an antiplane shear fracture problem // Arch. Appl. Mech. 1998. No.68. P. 247–258.
- [6] Zhao J., Zhang X. The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics // Engn. Fracture Mechanics. 1995. V. 50. No.1. P. 131–141.
- [7] Zhao J., Zhang X. On the process zone of a quasi-static growing tensile crack with power-law elastic-plastic damage // Int. J. of Fracture. 2001. V. 108. P. 383–395.
- [8] Райс Дж. Математические методы в механике разрушения // Разрушение / под ред. Г.Либовица. Т. 2. Математические основы теории разрушения. М.: Мир, 1975. С. 204–335.
- [9] Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
- [10] Hult J.A.H., McClintock F. Elastic-plastic stress and strain distribution around sharp notches under repeated shear // Proc. 9th Int. Congress on Applied Mechanics. 1956. V. 8. P. 51–58.
- [11] Du Z.-Z., Hancock J.W. The effect of non-singular stresses on crack-tip constraint // J. Mech. Phys. Solids. 1991. V. 39. No.4. P. 555–567.
- [12] Lee Y. J. Dynamic asymptotic mode III crack tip field in rate dependent materials // Int. J. of Fracture. 1995. V. 70. P. 125–145.
- [13] Freund L.B., Hutchinson J.W. High strain-rate crack growth in rate-dependent plastic solids // J. Mech. Phys. Solids. 1985. V. 33. No.2. P. 169–191.
- [14] Varias A.G., Shin C.F. Quasi-static crack advance under a range of constraints—steady-state fields based on a characteristic length // J. Mech. Phys. Solids. 1993. V. 41. No.5. P. 835–861.
- [15] Hui C.Y., Riedel H. The asymptotic stress and strain field near the tip of a growing crack under creep conditions // Int. J. of Fracture. 1981. V. 17. P. 409–425.
- [16] Hui C.Y. The mechanics of self-similar crack growth in an elastic power-law creeping material // Int. J. Solids Structures. 1986. V. 22. No.4. P. 357–372.
- [17] Hutchinson J.W. Singular behavior at the end of tensile crack in a hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 13–31.
- [18] Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 1–12.
- [19] Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОTH. 1958. С. 26–31.

- [20] Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения / Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.
- [21] Lu M., Lee S.B. Eigenspectra and order of singularity at a crack tip for a power-law creeping medium // Int. J. of Fracture. 1998. V. 92. P. 55–70.
- [22] Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. М.: Мир, 1986. 360 с.
- [23] Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 279 с.

Поступила в редакцию 23/XII/2003;
в окончательном варианте — 19/IV/2004.

FAR-FIELD STRESS ASYMPTOTIC BEHAVIOR IN GROWING CREEP CRACK PROBLEMS FOR A DAMAGED MATERIAL

© 2004 L.V.Stepanova, M.E.Phedina³

Asymptotic fields of stresses, strain rates and damage for a mode I creep crack in steady-state growth under plane stress and plane strain conditions are analyzed on the basis of Continuum Damage Mechanics. The Kachanov–Rabotnov creep–damage coupled theory is utilized and the scalar continuity parameter is incorporated into the power stress-strain rate constitutive relations. Asymptotic analysis of the kinetic law of damage evolution shows that it is necessary to study the eigenspectrum of the stress field far from the crack tip in a creeping damaged body with a growing crack. The eigenvalue problem formulated is numerically resolved. The new far stress field determining the geometry of the totally damaged zone is found and analyzed. It can be concluded that the new far-field asymptotic stress differs from the well-known Hutchinson–Rice–Rosengren (HRR)-solution and the HRR-solution can't be used as the far boundary condition. It is shown that the configuration of the totally damaged zone is entirely determined by the far-field stresses obtained.

Paper received 23/XII/2003.

Paper accepted 19/IV/2004.

³Stepanova Larisa Valentinovna (1st@ssu.samara.ru), Phedina Maria Efimovna (phedina@ssu.samara.ru), Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.