

УДК 539.374

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПЛОСКОЙ И ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

© 2004 Ю.Н. Радаев¹

Работа представляет собой продолжение исследований общих соотношений математической теории пластичности, сформулированных для ребра условия пластичности Треска, с помощью изостатической координатной сетки, выбор которой в качестве наиболее удобной координатной системы продиктован расслоенностью поля главных направлений тензора напряжений и возможностью отделения одной из пространственных координат в выражении для определителя, составленного из метрических компонент изостатической сетки. Переход к изостатическим координатам позволяет исследовать плоскую и осесимметричную задачу с помощью аппарата производящих функций. Получен ряд новых результатов в случае плоского деформированного и осесимметричного состояния, дополняющих известные теоремы о геометрии поля скольжения, а также статические и кинематические соотношения вдоль линий скольжения.

1. Основные уравнения пространственной задачи для ребра призмы Треска

В представляемой работе приводятся новые результаты, относящиеся к теории плоской и осесимметричной задачи математической теории пластичности, полученные с помощью методов, развитых в [1–3]. Изложение существенно использует обозначения и результаты, полученные в указанных работах. Поэтому настоящую работу можно считать продолжением исследований соотношений теории пластичности, начатых в [1]. Во вводной части приводятся основные уравнения, которые необходимы для построения новых результатов и понимания всего комплекса вопросов, относящихся к пространственной, плоской и осесимметричной задаче математической теории

¹Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

пластичности. Основополагающие результаты в этой области механики деформируемого твердого тела принадлежат А.Ю. Ишлинскому и Д.Д. Ивлеву. Указания на соответствующие работы читатель может найти в уже упомянутых статьях [1–3]. К новым результатам в этом направлении следует также отнести построение неизвестных ранее автомодельных решений осесимметричной задачи, данное в работах [4, 5].

Для ребра призмы Треска, определяемого условием $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$ (k — предел текучести при сдвиге), уравнения равновесия можно представить в форме одного векторного уравнения [1]:

$$\operatorname{grad} \sigma_3 \mp 2k \operatorname{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{n}$ — единичное векторное поле, имеющее направление главной оси тензора напряжений, соответствующей собственному значению σ_3 тензора напряжений.

Как показано в [1, 3], векторное поле $\mathbf{n}$ необходимо является расслоенным, т.е. $\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n} = \mathbf{0}$, и с ним естественным образом связано каноническое преобразование координат

$$x_i = f_i(\omega^1, \omega^2, \omega^3) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.2)$$

где ω^j — изостатические координаты, причем поверхности $\omega^3 = \text{const}$ являются слоями поля $\mathbf{n}$. Отображающие функции f_i должны удовлетворять следующей системе уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} + \frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} &= 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} + \frac{\partial f_2}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} &= 0, \\ \left(\frac{\partial f_k}{\partial \omega^3} \frac{\partial f_k}{\partial \omega^3} \right) \left[\left(\frac{\partial f_p}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_p}{\partial \omega^1} \right) \left(\frac{\partial f_r}{\partial \omega^2} \frac{\partial f_r}{\partial \omega^2} \right) - \left(\frac{\partial f_s}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_s}{\partial \omega^2} \right)^2 \right] &= 1. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь по повторяющимся индексам производится суммирование.

Имеется три интегрируемых соотношения вдоль изостатических траекторий (см. [1])

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega^1} (\Sigma - \ln \sqrt{g_{33}}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \omega^2} (\Sigma - \ln \sqrt{g_{33}}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \omega^3} (\Sigma - \ln \sqrt{g_{33}}) &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\Sigma = \sigma_3/(\mp 2k)$, g_{33} — компонента метрического тензора криволинейной координатной системы $\omega^1, \omega^2, \omega^3$.

Каноническое преобразование координат характеризуется фундаментальным свойством $g = \det(g_{ij}) = 1$, т.е. оно сохраняет объем любого элемента при его преобразовании.

Векторное уравнение (1.1) может быть также представлено в форме

$$\nabla \Sigma - \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{n} + \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (1.5)$$

Это последнее уравнение в силу своего инвариантного характера оказывается исключительно удобным для геометрического исследования поля $\mathbf{n}$.

В силу условия $\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{n} = 0$ векторы $\mathbf{n}$, $\text{rot} \mathbf{n}$, $\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n}$ взаимно ортогональны. Проектируя векторное уравнение (1.5) на три указанных направления, получим

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \Sigma + \nabla \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (1.6)$$

$$(\nabla \times \mathbf{n}) \cdot \nabla \Sigma = 0, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{s} \cdot \nabla \Sigma - |\nabla \times \mathbf{n}| = 0, \quad (1.8)$$

где $\mathbf{s}$ — орт, направленный вдоль вектора $\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n}$. Для расслоенного поля $\mathbf{n}$ направления $\text{rot} \mathbf{n}$ и $\mathbf{s}$ — характеристические.

Отметим также следующую формулу, впервые полученную в [2, 3]:

$$|\nabla \sigma_3| = 2k \sqrt{(\text{div} \mathbf{n})^2 + |\text{rot} \mathbf{n}|^2} = 2k \sqrt{(\kappa_1 + \kappa_2)^2 + \kappa^2}. \quad (1.9)$$

Здесь κ — кривизна векторной линии поля $\mathbf{n}$; κ_1 — нормальная кривизна линий, расположенных на слое поля $\mathbf{n}$ и касающихся поля главных нормалей векторных линий поля $\mathbf{n}$; κ_2 — нормальная кривизна линий, расположенных на слое поля $\mathbf{n}$ и касающихся поля бинормалей векторных линий поля $\mathbf{n}$.

В дальнейшем изложении мы также воспользуемся тем, что для слоистого векторного поля $\mathbf{n}$, слои которого есть поверхности уровня функции $\omega^3(x_1, x_2, x_3)$, вектор кривизны $\mathbf{\kappa}$ векторной линии поля $\mathbf{n}$ может быть вычислен по формуле [6, с. 24]:

$$\mathbf{\kappa} = -\nabla \ln |\nabla \omega^3|^{-1} + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla \ln |\nabla \omega^3|^{-1}). \quad (1.10)$$

Средняя кривизна H поверхности уровня $\omega^3(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$ вычисляется как поверхностная дивергенция единичного вектора нормали [7, с. 272]:

$$2H = \nabla_{\omega^3=\text{const}} \cdot \left(\frac{\nabla \omega^3}{|\nabla \omega^3|} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \omega^3}{|\nabla \omega^3|} \right) = \frac{\Delta \omega^3}{|\nabla \omega^3|} - \frac{1}{|\nabla \omega^3|^2} (\nabla \omega^3) \cdot \nabla |\nabla \omega^3|,$$

или

$$2H = \frac{\Delta \omega^3}{|\nabla \omega^3|} + \frac{\nabla \omega^3}{|\nabla \omega^3|} \cdot \nabla \ln |\nabla \omega^3|^{-1}. \quad (1.11)$$

Здесь $\nabla_{\omega^3=\text{const}}$ — поверхностный оператор Гамильтона.

2. Исследование задачи о плоской пластической деформации в изостатических координатах

Плоское деформированное состояние характеризуется условием $\epsilon_{33} = 0$. Любое условие пластичности в случае плоского деформированного состояния приводится к виду $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$. В плоскости течения x_1, x_2 имеется два взаимно ортогональных семейства изостатических траекторий.

В условиях плоского деформированного состояния в пределах пластической зоны компоненты тензора напряжений определяются соотношениями

Леви [8, 9]:

$$\sigma_{11} = p + k \cos 2\theta, \quad \sigma_{22} = p - k \cos 2\theta, \quad \sigma_{12} = k \sin 2\theta, \quad (2.1)$$

где $p = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$; σ_1, σ_2 — главные нормальные напряжения; θ — угол наклона главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему собственному значению σ_1 тензора напряжений, к оси x_1 .

Уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_1} - 2k(\sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_2}) &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} + 2k(\cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_2}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Как известно, если тело подвергается плоскому деформированию, то напряженное состояние соответствует грани призмы Треска, а не ребру. Тем не менее, если ввести обозначение $\Sigma = p/(2k)$ и плоское векторное поле $\mathbf{n}$ с компонентами $n_1 = \cos \theta, n_2 = \sin \theta$, то уравнения (2.2) формально приводятся к двумерному уравнению (1.1). Тем самым устанавливается аналогия между статическими уравнениями плоского деформированного состояния и уравнениями для ребра призмы Треска, и находит объяснение гиперболичность соответствующих систем уравнений.

Каноническое отображение (1.2) следует искать в форме:

$$x_1 = f_1(\omega^1, \omega^3), \quad x_2 = f_2(\omega^1, \omega^3), \quad x_3 = \omega^2.$$

Естественно рассмотреть двумерное каноническое отображение, определяемое первыми двумя уравнениями. Ясно, что координатные линии, соответствующие криволинейным координатам ω^1, ω^3 , есть взаимно ортогональные изостаты в плоскости течения.

Система (1.3) сводится к следующей системе:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} + \frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} - \frac{\partial f_2}{\partial \omega^1} \frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} = \pm 1. \quad (2.3)$$

Введем производящую функцию $\Phi(x_1, \omega^1)$ плоского канонического отображения:

$$x_2 = \frac{\partial \Phi(x_1, \omega^1)}{\partial x_1}, \quad \omega^3 = -\frac{\partial \Phi(x_1, \omega^1)}{\partial \omega^1}. \quad (2.4)$$

Тогда первое уравнение системы (2.3) приводится к виду:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial (\omega^1)^2} = \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial \omega^1} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial (\omega^1)^2} \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}. \quad (2.5)$$

Второе уравнение системы (2.3) удовлетворяется тождественно в силу соотношений (2.4). Причем во втором уравнении системы (2.3) следует выбрать положительный знак. Если поменять ролями переменные ω^1 и ω^3 и ввести производящую функцию $\Phi(x_1, \omega^3)$, согласно

$$x_2 = \frac{\partial \Phi(x_1, \omega^3)}{\partial x_1}, \quad \omega^1 = -\frac{\partial \Phi(x_1, \omega^3)}{\partial \omega^3},$$

то второе уравнение системы (2.3) будет тождественно удовлетворяться при выборе отрицательного знака. Уравнение для производящей функции при этом в точности совпадает с (2.5), если в нем заменить ω^1 на ω^3 :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial (\omega^3)^2} = \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial \omega^3} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial (\omega^3)^2} \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}.$$

Нелинейное уравнение (2.5) инвариантно относительно преобразования Лежандра: вводя тангенциальные координаты

$$x_1^* = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad \omega^{1*} = \frac{\partial \Phi}{\partial \omega^1}, \quad \Phi^* = x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \omega^1 \frac{\partial \Phi}{\partial \omega^1} - \Phi,$$

имеем:

$$\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial (\omega^{1*})^2} = \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x_1^* \omega^{1*}} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x_1^{*2}} \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial (\omega^{1*})^2} \right] \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x_1^{*2}}. \quad (2.6)$$

Действительно, в обозначениях Монжа

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial \omega^1}, \\ R = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}, \quad S = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial \omega^1}, \quad T = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial (\omega^1)^2}$$

формулы, связывающие вторые частные производные, можно представить в виде

$$R^* = \frac{T}{RT - S^2}, \quad S^* = \frac{-S}{RT - S^2}, \quad T^* = \frac{R}{RT - S^2}$$

и обратно —

$$R = \frac{T^*}{R^* T^* - S^{*2}}, \quad S = \frac{-S^*}{R^* T^* - S^{*2}}, \quad T = \frac{R^*}{R^* T^* - S^{*2}}.$$

Подстановка последних формул в уравнение (2.5) приводит к уравнению (2.6), форма которого не отличима от (2.5).

Уравнение (2.5) существенно нелинейно и нелинейность даже сильнее выражена, чем в классическом уравнении Монжа—Ампера.

Несложные вычисления показывают, что дискриминант характеристического уравнения для (2.5) в точности равен $4[(1 + R^2)(S^2 - RT) - S^2]$. Поэтому для гиперболичности уравнения (2.5) достаточно выполнения неравенства $RT < 0$. Эллиптичность уравнения (2.5) гарантирована при выполнении условия $S^2 - RT < 0$.

Вводя функцию $U(x_1, \omega^1) = \partial \Phi / \partial x_1$, уравнение (2.5) можно преобразовать к квазилинейному уравнению, которое после преобразования Лежандра

$$X = \frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial \omega^1}, \quad Z = x_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + \omega^1 \frac{\partial U}{\partial \omega^1} - U$$

приводится к линейному уравнению второго порядка в частных производных относительно функции $Z = Z(X, Y)$

$$(1 + X^2) \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} + 2XY \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} - Y^2 \frac{1 - X^2}{1 + X^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = 0. \quad (2.7)$$

Это уравнение, как нетрудно проверить, принадлежит к гиперболическому типу.

Преобразуем полученное уравнение к характеристическим переменным u, v и новой неизвестной функции $F(u, v)$ по формулам:

$$u = \operatorname{arctg} X, \quad v = \frac{1}{2} \ln(1 + X^2) - \ln Y, \quad F = Z \cos u. \quad (2.8)$$

В результате приходим к телеграфному уравнению

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + F = 0.$$

Так как преобразование Лежандра инволютивно², то можно выразить переменные x_1, x_2, ω^1 через переменные X, Y, Z , совершая еще раз это же преобразование:

$$x_1 = \frac{\partial Z}{\partial X}, \quad x_2 = X \frac{\partial Z}{\partial X} + Y \frac{\partial Z}{\partial Y} - Z, \quad \omega^1 = \frac{\partial Z}{\partial Y}.$$

Преобразуя последние формулы к переменным u, v и функции $F(u, v)$, получим

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos u \frac{\partial F}{\partial u} + \sin u \frac{\partial F}{\partial v} + F \sin u, \\ x_2 &= \sin u \frac{\partial F}{\partial u} - \cos u \frac{\partial F}{\partial v} - F \cos u, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\omega^1 = -e^v \frac{\partial F}{\partial v}. \quad (2.10)$$

Нетрудно заметить, что переменная u есть угол наклона первого главного направления тензора напряжений к оси x_1 . Линии $\omega^1 = \text{const}$ есть траектории первого (наибольшего) главного напряжения, поэтому

$$\operatorname{tg} \theta = \left. \frac{\partial^2 \Phi(x_1, \omega^1)}{\partial x_1^2} \right|_{\omega^1 = \text{const}}. \quad (2.11)$$

Можно найти еще ряд замечательных соотношений, связанных с геометрией изостатических траекторий в плоскодеформированном теле. Так, если спроектировать уравнение (1.10) на направление нормали к траектории $\omega^1 = \text{const}$, то

$$\kappa |\nabla \omega^1| = (\nabla \omega^1) \cdot \nabla \ln |\nabla \omega^3|, \quad (2.12)$$

где

$$\kappa = \mathbf{\kappa} \cdot \frac{\nabla \omega^1}{|\nabla \omega^1|}$$

есть (с точностью до знака) кривизна траектории векторного поля $\mathbf{n}$, т.е. кривизна линии $\omega^1 = \text{const}$. Величину κ можно считать положительной,

²Повторное применение преобразования Лежандра дает исходную функцию. Это свойство преобразования Лежандра часто называют свойством взаимности.

поскольку в противном случае (когда направления главной нормали и градиента функции $\omega^1(x_1, x_2)$ противоположны) достаточно сделать замену канонической переменной ω^1 на $-\omega^1$. В дальнейшем будем считать, что вектор $\nabla\omega^1$ имеет направление главной нормали векторной линии поля $\mathbf{n}$.

Замечая далее, что $g^{11}g^{33} = 1$ и $g^{11} = |\nabla\omega^1|^2$, $g^{33} = |\nabla\omega^3|^2$, на основании уравнения (2.12) находим

$$\kappa |\nabla\omega^1|^2 = -(\nabla\omega^1) \cdot \nabla |\nabla\omega^1|. \quad (2.13)$$

Учитывая это последнее соотношение и (1.11), а также то, что одна из главных кривизн координатной поверхности $\omega^1 = \text{const}$ равна нулю³, а вторая — κ , приходим к следующей замечательной формуле:

$$-2\kappa = \frac{\Delta\omega^1}{|\nabla\omega^1|}. \quad (2.14)$$

Полученный результат помимо всего прочего означает, что каноническая переменная $\omega^1(x_1, x_2)$ не может быть гармонической функцией, если только траектории векторного поля $\mathbf{n}$ криволинейны. Этот же результат следует из известного результата теории аналитических функций: при конформном отображении круга посредством аналитической функции, производная которой в центре круга равна единице⁴, во всех случаях, за исключением тождественного отображения, получается область с большей, чем у круга, площадью⁵.

Аналогично может быть получена формула для кривизны линий, являющихся слоями поля $\mathbf{n}$:

$$-2\kappa_1 = \frac{\Delta\omega^3}{|\nabla\omega^3|}. \quad (2.15)$$

Распределение p вычисляется по формулам (опуская детали, сразу приведем результат):

$$p = 2k \ln \sqrt{\left(\frac{\partial\omega^1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega^1}{\partial x_2}\right)^2} + C = 2k \ln |\nabla\omega^1| + C, \quad (2.16)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial\omega^1}{\partial x_1} &= \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, v)} \right|^{-1} \left(\frac{\partial\omega^1}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} - \frac{\partial\omega^1}{\partial v} \frac{\partial x_2}{\partial u} \right), \\ \frac{\partial\omega^1}{\partial x_2} &= \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, v)} \right|^{-1} \left(\frac{\partial\omega^1}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{\partial\omega^1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} \right), \end{aligned} \quad (2.17)$$

$|\partial(x_1, x_2)/\partial(u, v)|$ — якобиан отображения $(u, v) \rightarrow (x_1, x_2)$, C есть постоянная интегрирования.

³Именно кривизна κ_2 .

⁴Это означает, что малый элемент, локализованный в центре круга, сохраняет свою площадь при отображении.

⁵См., например, Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т. II. Дальнейшее построение теории. М.: Наука, 1968. С. 52–55.

Поскольку $g^{11}g^{33} = 1$, то величина p вычисляется также в форме

$$p = -2k \ln \sqrt{\left(\frac{\partial \omega^3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega^3}{\partial x_2}\right)^2} + C = -2k \ln |\nabla \omega^3| + C \quad (2.18)$$

или в терминах производящей функции $\Phi(x_1, \omega^1)$ —

$$p = -k \ln \frac{T^2(1 + R^2)}{R^2 S^2} + C = -k \ln(\cos^2 \theta S^2) + C. \quad (2.19)$$

С помощью уравнений (2.18) и (2.12) можно заключить, что

$$\kappa = -\frac{\nabla p}{2k} \cdot \frac{\nabla \omega^1}{|\nabla \omega^1|}. \quad (2.20)$$

Последнее соотношение позволяет вычислить вихрь векторного поля $\mathbf{n}$ и угол наклона вектора ∇p по отношению к направлению $\mathbf{n}$. С этой целью рассмотрим орт $\mathbf{s}$, направленный вдоль вектора $\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n}$. Он располагается в плоскости течения и имеет направление $-\nabla \omega^1$. Рассмотрим далее единичный вектор $\mathbf{t}$, ортогональный $\text{rot} \mathbf{n}$ и составляющий с вектором $\mathbf{s}$ угол α , вычисляемый как

$$\text{tg} \alpha = \frac{|\text{rot} \mathbf{n}|}{\text{div} \mathbf{n}} = \frac{\kappa}{\kappa_1}, \quad (2.21)$$

где κ_1 — кривизна траекторий, ортогональных полю $\mathbf{n}$. Орт $\mathbf{t}$ также располагается в плоскости течения и нормален вектору ∇p (см. рисунок), т.е. касается линии уровня поля p . Поэтому в силу (2.20) справедлива формула

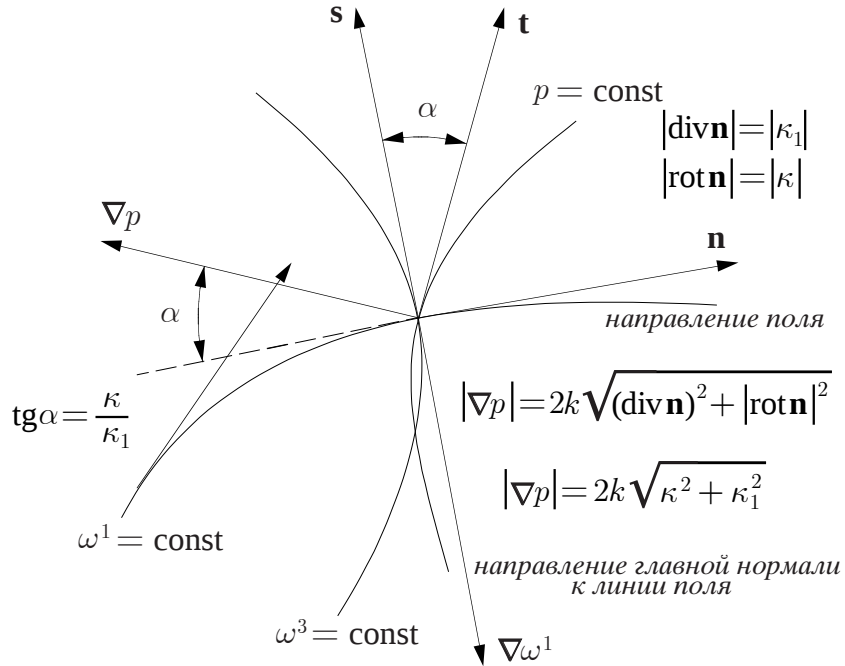


Рис. Ориентации характерных векторов в плоскости течения

$$2k\kappa = |\nabla p| \sin \alpha$$

или, учитывая двумерный аналог (1.9)

$$|\nabla p| = 2k \sqrt{(\operatorname{divn})^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{n}|^2},$$

и $|\kappa_1| = |\operatorname{divn}|$ (κ_1 есть кривизна изостат, ортогональных полю $\mathbf{n}$), —

$$\kappa = \sqrt{\kappa_1^2 + |\operatorname{rot} \mathbf{n}|^2} \sin \alpha,$$

откуда определяется величина вихря поля $\mathbf{n}$

$$|\operatorname{rot} \mathbf{n}| = |\kappa|. \quad (2.22)$$

С помощью (2.14), (2.15) заключаем также, что

$$2|\operatorname{rot} \mathbf{n}| = \frac{|\Delta \omega^1|}{|\nabla \omega^1|}, \quad 2|\operatorname{div} \mathbf{n}| = \frac{|\Delta \omega^3|}{|\nabla \omega^3|}.$$

Как было показано выше, каноническая координата ω^1 не может быть (за исключением того особого случая, когда траектории поля $\mathbf{n}$ прямолинейны) гармонической функцией, т.е., как позволяет заключить последняя формула, поле $\mathbf{n}$ должно иметь ненулевой вихрь.

Наклон α изолинии распределения p к направлению $\mathbf{s}$ вычисляется, следовательно, как

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\kappa}{\kappa_1}. \quad (2.23)$$

Отметим также формулу

$$|\nabla p| = 2k \sqrt{\kappa^2 + \kappa_1^2}, \quad (2.24)$$

и кроме того

$$|\nabla p| = k \sqrt{\frac{(\Delta \omega^1)^2}{|\nabla \omega^1|^2} + \frac{(\Delta \omega^3)^2}{|\nabla \omega^3|^2}}. \quad (2.25)$$

Ряд результатов, касающихся теории плоской деформации, может быть получен при помощи соотношений, найденных в [2].

Ясно, что оба семейства изостатических траекторий равноправны, поэтому удобно в дальнейшем одно из семейств идентифицировать номером 1, а другое — номером 2. Обозначая через θ угол наклона к оси x_1 изостаты первого семейства, получаем

$$\kappa_1 = -d_1 \theta, \quad \kappa_2 = d_2 \theta. \quad (2.26)$$

Здесь через d_1 , d_2 обозначается дифференцирование вдоль изостатических траекторий.

Имеется всего одно деривационное соотношение, которое имеет вид (подробности см. в [2])

$$d_1 \kappa_2 + d_2 \kappa_1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 0 \quad (2.27)$$

и удовлетворяется тождественно в силу $\kappa_1 = -d_1 \theta$, $\kappa_2 = d_2 \theta$.

Уравнения равновесия, сформулированные в изостатической координатной сетке, сводятся к двум соотношениям Ламе—Максвелла

$$\begin{aligned} d_1\sigma_1 + \kappa_2(\sigma_1 - \sigma_2) &= 0, \\ d_2\sigma_2 + \kappa_1(\sigma_2 - \sigma_1) &= 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

или (см., например, [10, с. 75]; [11, с. 42, 43]):

$$d_1\sigma_1 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_2} = 0, \quad d_2\sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_1} = 0, \quad (2.29)$$

где ρ_1, ρ_2 — радиусы кривизны линий главных напряжений, причем эти величины считаются положительными, если с возрастанием натурального параметра вдоль кривой касательная вращается против часовой стрелки, при этом положительное направление вдоль первой траектории выбирается произвольно, а положительное направление вдоль второй траектории определяется вращением против хода часовой стрелки положительного направления первой траектории.

Так как в случае плоской пластической деформации $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$, то уравнения (2.29) приобретают следующий вид:

$$d_1\sigma_1 + \frac{2k}{\rho_2} = 0, \quad d_2\sigma_2 + \frac{2k}{\rho_1} = 0. \quad (2.30)$$

Эта система гиперболична. Характеристики делят пополам угол между главными направлениями напряжений. Вводя в систему (2.30) производные вдоль характеристических направлений (примем, что первая характеристика отклоняется от первого главного направления напряжений, соответствующего наибольшему главному напряжению, на угол $\pi/4$ по ходу часовой стрелки)

$$\overline{d}_1 = \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{2}}, \quad \overline{d}_2 = \frac{d_1 + d_2}{\sqrt{2}}, \quad (2.31)$$

складывая, а затем вычитая уравнения этой системы, получим интегрируемые соотношения Генки вдоль характеристик (см., например, [8]):

$$\overline{d}_1(\sigma_1 - 2k\theta) = 0, \quad \overline{d}_2(\sigma_1 + 2k\theta) = 0. \quad (2.32)$$

В случае плоской деформации уравнения равновесия в приращениях главных напряжений, сформулированные в изостатической сетке, можно получить в виде [2]

$$\begin{aligned} d_1d\sigma_1 + \kappa_2(d\sigma_1 - d\sigma_2) + (2\kappa_1 + d_2)[(\sigma_1 - \sigma_2)d\omega] &= 0, \\ d_2d\sigma_2 + \kappa_1(d\sigma_2 - d\sigma_1) + (2\kappa_2 + d_1)[(\sigma_1 - \sigma_2)d\omega] &= 0, \end{aligned} \quad (2.33)$$

где $d\omega = d\omega_3$ — малый поворот главных осей напряжений в плоскости течения при догружении, и, замечая, что $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$, —

$$\begin{aligned} d_1d\sigma_1 + 2k(2\kappa_1 + d_2)d\omega &= 0, \\ d_2d\sigma_2 + 2k(2\kappa_2 + d_1)d\omega &= 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Характеристики системы уравнений в приращениях делят пополам угол между главными направлениями напряжений, т.е. являются линиями скольжения.

Вдоль характеристик справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\overline{d_1}(d\sigma_1 - 2kd\omega) + 4k(\kappa_1 - \kappa_2)d\omega &= 0, \\ \sqrt{2}\overline{d_2}(d\sigma_1 + 2kd\omega) + 4k(\kappa_1 + \kappa_2)d\omega &= 0.\end{aligned}$$

В случае плоской деформации условия совместности в приращениях деформаций $d\mathbf{S} = \nabla \times (d\boldsymbol{\varepsilon}) \times \nabla = \mathbf{0}$ сводятся к одному уравнению (детали см. в работе [2])

$$\begin{aligned}dS_{<33>} = -d_1d_1d\varepsilon_2 - d_2d_2d\varepsilon_1 - (d_1\kappa_2 - d_2\kappa_1 + \kappa_2^2 - \kappa_1^2)(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \\ - \kappa_2d_1(2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \kappa_1d_2(2d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2) = 0.\end{aligned}\quad (2.35)$$

С помощью условия несжимаемости $d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 = 0$ из уравнения (2.35) исключается $d\varepsilon_2$ так, что получается уравнение только относительно $d\varepsilon_1$. По главной части этого уравнения

$$d_1d_1d\varepsilon_1 - d_2d_2d\varepsilon_1 + \dots = 0$$

легко устанавливается, что кинематические уравнения принадлежат к гиперболическому типу и характеристики являются линиями скольжения.

Ясно, что уравнение второго порядка для $d\varepsilon_1$ может быть заменено системой двух уравнений первого порядка. С этой целью введем обозначения:

$$u = \ln|d\varepsilon_1|, \quad p = d_1u, \quad q = d_2u. \quad (2.36)$$

Переменная u — логарифмическое приращение деформации.

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned}d_1d\varepsilon_1 &= pe^u, \\ d_2d\varepsilon_1 &= qe^u, \\ d_1d_1d\varepsilon_1 &= e^ud_1p + e^up^2, \\ d_2d_2d\varepsilon_1 &= e^ud_2q + e^uq^2,\end{aligned}$$

уравнение совместности деформаций представим в форме

$$d_2q - d_1p = p^2 - q^2 + 3(\kappa_2p - \kappa_1q) + 2(d_1\kappa_2 - d_2\kappa_1 + \kappa_2^2 - \kappa_1^2). \quad (2.37)$$

Заметим далее, что в силу

$$d_2d_1 - d_1d_2 = -\kappa_1d_1 + \kappa_2d_2 \quad (2.38)$$

справедливо соотношение

$$d_2p - d_1q = -\kappa_1p + \kappa_2q. \quad (2.39)$$

Следовательно, относительно величин p и q имеем систему уравнений первого порядка (2.37), (2.39).

Вводя обозначения

$$P = d_1\theta, \quad Q = d_2\theta,$$

систему кинематических уравнений можно привести к следующему симметричному виду:

$$\begin{aligned}d_2q - d_1p &= p^2 - q^2 + 3(pQ + qP) + 2(d_1Q + d_2P + Q^2 - P^2), \\ d_2p - d_1q &= pP + qQ.\end{aligned}\quad (2.40)$$

Напомним, что здесь величины p и q — производные вдоль линий главных напряжений от логарифмического приращения деформации.

Уравнения статики также преобразуются к симметричной форме относительно величин P и Q . Действительно, уравнения равновесия (2.30) с помощью обозначений $P^* = d_1\sigma_1/(2k)$, $Q^* = d_2\sigma_1/(2k)$ представляются как

$$P^* = -Q, \quad Q^* = -P. \quad (2.41)$$

На основании (2.38) находим

$$d_2P^* - d_1Q^* = -\kappa_1P^* + \kappa_2Q^* = PP^* + QQ^*$$

и в силу (2.41) —

$$d_1P - d_2Q = -2PQ.$$

Переписывая в новых обозначениях деривационную формулу (2.27), имеем

$$d_2P - d_1Q = P^2 + Q^2.$$

Таким образом получаем систему статических уравнений плоской задачи в форме:

$$\begin{aligned} d_1P - d_2Q &= -2PQ, \\ d_2P - d_1Q &= P^2 + Q^2. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Последняя система уравнений позволяет сформулировать ряд новых результатов, касающихся геометрии поля изостат.

Преобразуя систему уравнений (2.42) к характеристическим переменным (см. (2.31)), находим

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\overline{d_1}(P+Q) &= -(P+Q)^2, \\ \sqrt{2}\overline{d_2}(P-Q) &= (P-Q)^2, \end{aligned}$$

или

$$\overline{d_1}\frac{1}{P+Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \overline{d_2}\frac{1}{P-Q} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2.43)$$

Вспоминая определение величин P и Q , получим следующие соотношения вдоль характеристик:

$$\overline{d_1}\frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \overline{d_2}\frac{1}{\kappa_2 + \kappa_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (2.44)$$

т.е. обратная разность (сумма) кривизн изостатических линий при продвижении вдоль первой (второй) характеристики изменяется пропорционально пройденному пути.

Этот результат — аналог второй теоремы Генки о геометрии поля скольжения в состоянии плоской деформации (см., например, [9, с. 218]). Вторая теорема Генки непосредственно следует из (2.44). Действительно, применяя (2.31) к θ , находим

$$\overline{\kappa_1} = \frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\sqrt{2}}, \quad \overline{\kappa_2} = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\sqrt{2}},$$

где $\overline{\kappa}_1 = -\overline{d}_1\theta$, $\overline{\kappa}_2 = \overline{d}_2\theta$ — кривизны характеристических линий, что означает

$$\overline{d}_1 \frac{1}{\overline{\kappa}_2} = 1, \quad \overline{d}_2 \frac{1}{\overline{\kappa}_1} = 1,$$

а эти соотношения как раз и составляют содержание второй теоремы Генки.

3. Осесимметричная задача теории пластичности в изостатических координатах

Осесимметричная задача математической теории пластичности значительно сложнее, чем плоская, хотя бы потому, что соотношения вдоль характеристик не интегрируются.

Осесимметричное пластическое течение, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска, можно разделить на следующие два основных типа (тангенциальное напряжение всегда будет главным напряжением при осесимметричном напряженном состоянии): 1) тангенциальное напряжение является наибольшим (наименьшим) главным напряжением, а меридиональные главные напряжения равны; 2) тангенциальное напряжение равно одному из меридиональных главных напряжений, а максимальное касательное напряжение в меридиональной плоскости равно пределу текучести k . Первый случай исследуется элементарными средствами. Вторым случаем — состояние "полной пластичности" Хаара—Кармана. Если присвоить тангенциальному главному направлению второй номер и обозначить через σ_3 наибольшее (наименьшее) из двух меридиональных главных напряжений, то приходим к соотношению

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k, \quad (3.1)$$

характеризующему состояние "полной пластичности".

В случае осесимметричной задачи каноническое отображение (1.2) можно представить в форме:

$$x_1 = f(\omega^1, \omega^3) \cos \omega^2, \quad x_2 = f(\omega^1, \omega^3) \sin \omega^2, \quad x_3 = h(\omega^1, \omega^3). \quad (3.2)$$

При этом система (1.3) преобразуется к виду⁶:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \omega^1} \frac{\partial f}{\partial \omega^3} + \frac{\partial h}{\partial \omega^1} \frac{\partial h}{\partial \omega^3} &= 0, \\ \left(\frac{\partial f}{\partial \omega^1} \frac{\partial h}{\partial \omega^3} - \frac{\partial f}{\partial \omega^3} \frac{\partial h}{\partial \omega^1} \right) f &= \pm 1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Сделаем замену $f^2 = 2H$, тогда второе уравнение системы (3.3) позволяет утверждать, что трехмерное каноническое отображение (3.2) порождает плоское каноническое отображение

$$\frac{1}{2}x_1^2 = H(\omega^1, \omega^3), \quad x_3 = h(\omega^1, \omega^3). \quad (3.4)$$

⁶Ясно, что координатные линии, соответствующие криволинейным координатам ω^1, ω^3 , есть взаимно ортогональные изостаты, расположенные в меридиональной плоскости $\omega^2 = \text{const}$.

Введем производящую функцию $\Omega(x_3, \omega^1)$ канонического отображения (3.4):

$$H = \frac{\partial \Omega(x_3, \omega^1)}{\partial x_3}, \quad \omega^3 = \frac{\partial \Omega(x_3, \omega^1)}{\partial \omega^1}. \quad (3.5)$$

Формулы (3.5) соответствуют положительному знаку во втором уравнении (3.3).

Второе уравнение системы (3.3) удовлетворяется тождественно в силу (3.5). Первое уравнение системы (3.3) позволяет получить следующее нелинейное уравнение относительно производящей функции:

$$2 \frac{\partial \Omega}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial (\omega^1)^2} = \left[\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_3 \partial \omega^1} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_3^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial (\omega^1)^2} \right] \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_3^2}. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) инвариантно относительно преобразования Ампера⁷. Вводя переменные по формулам

$$x_3^* = x_3, \quad \omega^{1*} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \omega^1}, \quad \Omega^* = \Omega - \omega^1 \frac{\partial \Omega}{\partial \omega^1},$$

в обозначениях Монжа

$$P = \frac{\partial \Omega}{\partial x_3}, \quad Q = \frac{\partial \Omega}{\partial \omega^1}, \\ R = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_3^2}, \quad S = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_3 \partial \omega^1}, \quad T = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial (\omega^1)^2}$$

имеем:

$$P^* = P, \quad Q^* = \omega^1, \quad \Omega^* = \Omega - \omega^1 Q, \quad R^* = \frac{S^2 - RT}{-T}, \quad S^* = \frac{-S}{T}, \quad T^* = \frac{-1}{T}$$

и обратно

$$P = P^*, \quad Q = -\omega^{1*}, \quad \Omega = \Omega^* - \omega^{1*} Q^*, \quad R = \frac{R^* T^* - S^{*2}}{T^*}, \quad S = \frac{S^*}{T^*}, \quad T = \frac{-1}{T^*}.$$

Подстановка этих формул в уравнение (3.6) приводит к уравнению

$$2 \frac{\partial \Omega^*}{\partial x_3^*} \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial (\omega^{1*})^2} = \left[\left(\frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial x_3^* \partial \omega^{1*}} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial x_3^{*2}} \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial (\omega^{1*})^2} \right] \frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial x_3^{*2}},$$

не отличимому по форме от (3.6).

Дискриминант характеристического уравнения для (3.6) в точности равен

$$8[(R^2 + 2P)(S^2 - RT) - PS^2].$$

Так как $2P = x_1^2 \geq 0$, то гиперболичность уравнения (3.6) гарантирована при выполнении условия

$$RT < 0,$$

⁷Преобразование Ампера (так же, как и преобразование Лежандра) обладает свойством взаимности. Дополнительно заметим, что уравнение (2.5) также инвариантно относительно преобразования Ампера.

а эллиптичность —

$$S^2 - RT < 0.$$

В плоскости x_1, x_3 интегральные кривые поля $\mathbf{n}$ определяются уравнением $1/2x_1^2 = \partial\Omega(x_3, \omega^1)/\partial x_3$ при фиксированном значении ω^1 . Если θ — наклон траектории поля $\mathbf{n}$ к оси x_1 , то

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{2 \left. \frac{\partial\Omega(x_3, \omega^1)}{\partial x_3} \right|_{\omega^1=\text{const}}}}{\left. \frac{\partial^2\Omega(x_3, \omega^1)}{\partial x_3^2} \right|_{\omega^1=\text{const}}}. \quad (3.7)$$

Кроме того, для канонических координат ω^j : $g = 1$, следовательно, согласно формулам (1.4), $2\Sigma = \ln g_{33} + C$ и, вводя в это выражение производящую функцию, получим:

$$2\Sigma = \ln \left\{ \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_3^2} \right)^2 \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_3} \right)^{-1} \right] \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_3 \partial \omega^1} \right)^{-2} \right\} + C,$$

или (ср. с (2.19))

$$\frac{\sigma_3}{\pm k} = \ln \left[\sin^2 \theta \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_3 \partial \omega^1} \right)^2 \right] - C = \ln(\sin^2 \theta S^2) - C.$$

Поэтому поля σ_3 и $\mathbf{n}$ определяются только через посредство производной $\partial\Omega/\partial x_3$.

Для функции $u = (2\partial\Omega/\partial x_3)^{1/2}$ имеем квазилинейное уравнение второго порядка, являющееся следствием уравнения (3.6):

$$q^2 \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} r - 2pq s + (p^2 + 1)t + \frac{q^2}{u} = 0, \quad (3.8)$$

где использованы обозначения Монжа:

$$p = \frac{\partial u}{\partial x_3}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial \omega^1}, \quad r = \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}, \quad s = \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial \omega^1}, \quad t = \frac{\partial^2 u}{\partial (\omega^1)^2}.$$

Дискриминант уравнения (3.8) равен q^2 , поэтому уравнение принадлежит к гиперболическому типу.

Уравнения характеристик имеют следующий вид:

$$q(p-1)d\omega^1 + (p^2+1)dx_3 = 0, \quad du - p dx_3 - q d\omega^1 = 0, \quad (3.9)$$

$$q(p^2-1)(p^2+1)^{-1}dp - (p-1)dq + qu^{-1}dx_3 = 0;$$

$$q(p+1)d\omega^1 + (p^2+1)dx_3 = 0, \quad du - p dx_3 - q d\omega^1 = 0, \quad (3.10)$$

$$q(p^2-1)(p^2+1)^{-1}dp - (p+1)dq + qu^{-1}dx_3 = 0.$$

Если ввести обозначения:

$$\Xi = \frac{1}{2} \ln(1 + p^2) - \ln |q| + \operatorname{arctg} p,$$

$$\Theta = \frac{1}{2} \ln(1 + p^2) - \ln |q| - \operatorname{arctg} p,$$

$$\Psi = \ln u,$$

то соотношения вдоль характеристик (третьи уравнения систем (3.9) и (3.10)) можно представить в форме:

$$d(\Xi - \Psi) + \operatorname{tg} \frac{\Xi - \Theta}{2} d\Xi = 0, \quad (3.11)$$

$$d(\Theta - \Psi) - \operatorname{tg} \frac{\Xi - \Theta}{2} d\Theta = 0. \quad (3.12)$$

Эти уравнения симметричны относительно переменных Ξ , Θ : уравнение (3.12) получается из уравнения (3.11) заменой Ξ на Θ и, соответственно, Θ на Ξ . Ни одно из соотношений вдоль характеристик (3.11), (3.12) не интегрируемо.

Следует отметить также, что симметрия соотношений вдоль характеристик здесь достигается вследствие перехода от физической плоскости $\varphi = 0$ к плоскости переменных x_3 , ω^1 (соотношения (3.11), (3.12) справедливы вдоль характеристических линий, расположенных в плоскости x_3 , ω^1).

Уравнению (3.8) можно придать несколько более симметричную форму, если изменить роль зависимых и независимых переменных: будем полагать, что переменная u (которая по смыслу есть координата x_1) является независимой и, следовательно, $\omega^1 = \omega^1(x_1, x_3)$.

Введем обозначения Монжа:

$$P = \frac{\partial u}{\partial \omega^1}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial x_3}, \quad R = \frac{\partial^2 u}{\partial (\omega^1)^2}, \quad S = \frac{\partial^2 u}{\partial \omega^1 \partial x_3}, \quad T = \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}; \quad (3.13)$$

$$\tilde{P} = \frac{\partial \omega^1}{\partial x_1}, \quad \tilde{Q} = \frac{\partial \omega^1}{\partial x_3}, \quad \tilde{R} = \frac{\partial^2 \omega^1}{\partial x_1^2}, \quad \tilde{S} = \frac{\partial^2 \omega^1}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad \tilde{T} = \frac{\partial^2 \omega^1}{\partial x_3^2}. \quad (3.14)$$

Учитывая следующие соотношения между производными

$$R = -\frac{\tilde{R}}{\tilde{P}^3}, \quad S = \frac{\tilde{R}\tilde{Q} - \tilde{S}\tilde{P}}{\tilde{P}^3}, \quad T = -\frac{\tilde{R}\tilde{Q}^2 - 2\tilde{S}\tilde{P}\tilde{Q} + \tilde{T}\tilde{P}^2}{\tilde{P}^3}; \quad (3.15)$$

$$P = \frac{1}{\tilde{P}}, \quad Q = -\frac{\tilde{Q}}{\tilde{P}},$$

уравнение (3.8) можно представить в форме

$$(\tilde{P}^2 - \tilde{Q}^2)(\tilde{T} - \tilde{R}) - 4\tilde{P}\tilde{Q}\tilde{S} + (\tilde{P}^2 + \tilde{Q}^2)\tilde{P}^{-4}x_1^{-1} = 0. \quad (3.16)$$

Это уравнение принадлежит к гиперболическому типу, так как его дискриминант в точности равен $(\tilde{P} + \tilde{Q})^2$. Нарушение гиперболичности возможно только при условии $\tilde{P} + \tilde{Q} = 0$, т.е. когда $\omega^1 = \omega^1(x_1, x_3)$ является интегралом уравнения

$$\frac{\partial \omega^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega^1}{\partial x_3} = 0.$$

Последнее уравнение без труда интегрируется: $\omega^1 = \omega^1(x_1 - x_3)$.

Корни характеристического уравнения есть

$$\lambda_1 = \frac{\tilde{P} + \tilde{Q}}{\tilde{P} - \tilde{Q}}, \quad \lambda_2 = -\frac{\tilde{P} - \tilde{Q}}{\tilde{P} + \tilde{Q}},$$

и они удовлетворяют условию $\lambda_1 = -\lambda_2^{-1}$, что указывает на ортогональность характеристических направлений.

Составляя характеристические соотношения для уравнения (3.16), находим:

$$\begin{aligned} dx_3 &= \frac{\tilde{P} + \tilde{Q}}{\tilde{P} - \tilde{Q}} dx_1, \\ (\tilde{P}^2 - \tilde{Q}^2)d\tilde{P} - (\tilde{P} - \tilde{Q})^2 d\tilde{Q} - \frac{\tilde{P}^2 + \tilde{Q}^2}{x_1 \tilde{P}^4} dx_1 &= 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} d\omega^1 - \tilde{P}dx_1 - \tilde{Q}dx_3 &= 0; \\ dx_3 &= -\frac{\tilde{P} - \tilde{Q}}{\tilde{P} + \tilde{Q}} dx_1, \\ (\tilde{P}^2 - \tilde{Q}^2)d\tilde{P} + (\tilde{P} + \tilde{Q})^2 d\tilde{Q} - \frac{\tilde{P}^2 + \tilde{Q}^2}{x_1 \tilde{P}^4} dx_1 &= 0, \\ d\omega^1 - \tilde{P}dx_1 - \tilde{Q}dx_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Двумерный градиент (по переменным x_1, x_3) канонической переменной ω^1 указывает направление главного напряжения σ_1 . Если ввести угол γ , характеризующий наклон вектора $\nabla\omega^1$ к оси x_1 , то

$$\tilde{P} = |\nabla\omega^1| \cos \gamma, \quad \tilde{Q} = |\nabla\omega^1| \sin \gamma \quad (3.19)$$

и, следовательно,

$$\lambda_1 = \operatorname{tg}(\gamma + \pi/4), \quad \lambda_2 = \operatorname{tg}(\gamma - \pi/4). \quad (3.20)$$

Вдоль характеристик справедливы соотношения:

$$\begin{cases} \frac{dx_3}{dx_1} = \operatorname{tg}(\gamma + \frac{\pi}{4}), \\ d|\nabla\omega^1| - |\nabla\omega^1| d\gamma - \frac{x_1^{-1} dx_1}{\cos^4 \gamma (\cos \gamma - \sin \gamma) |\nabla\omega^1|^2} = 0; \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_3}{dx_1} = \operatorname{tg}(\gamma - \frac{\pi}{4}), \\ d|\nabla\omega^1| + |\nabla\omega^1| d\gamma - \frac{x_1^{-1} dx_1}{\cos^4 \gamma (\cos \gamma + \sin \gamma) |\nabla\omega^1|^2} = 0, \end{cases} \quad (3.22)$$

причем вторые соотношения из каждой группы могут быть несколько преобразованы с помощью следующих формул, выводимых из первого и третьего соотношений в (3.17) и (3.18)

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{\cos \gamma - \sin \gamma}{|\nabla\omega^1|} d\omega^1, \\ dx_1 &= \frac{\cos \gamma + \sin \gamma}{|\nabla\omega^1|} d\omega^1, \end{aligned}$$

и соответственно представлены в форме:

$$d|\nabla\omega^1| - |\nabla\omega^1| d\gamma - \frac{x_1^{-1} d\omega^1}{|\nabla\omega^1|^3 \cos^4 \gamma} = 0, \quad (3.23)$$

$$d|\nabla\omega^1| + |\nabla\omega^1|d\gamma - \frac{x_1^{-1}d\omega^1}{|\nabla\omega^1|^3 \cos^4 \gamma} = 0. \quad (3.24)$$

Соотношения вдоль характеристических кривых уравнения (3.16) преобразуются к форме, допускающей их дальнейшее эффективное исследование. Условимся характеристики, отклоняющиеся от направления $\nabla\omega^1$ на угол $\pi/4$ против хода часовой стрелки, считать характеристиками первого семейства и обозначать их кривизну через $\overline{\kappa}_1$. Обозначим далее через ι угол наклона к оси x_1 характеристик первого семейства⁸. Введем специальную параметризацию характеристик первого семейства, приняв угол ι качестве параметра:

$$x_1 = \int \frac{\cos \iota}{\overline{\kappa}_1(\iota)} d\iota, \quad x_3 = \int \frac{\sin \iota}{\overline{\kappa}_1(\iota)} d\iota,$$

где $\overline{\kappa}_1 = \overline{\kappa}_1(\iota)$ — кривизна первой характеристической линии, выраженная в зависимости от угла ι . Характеристическое соотношение (3.21) тогда представляется в виде

$$\frac{d}{d\iota} |\nabla\omega^1|^3 - 3 |\nabla\omega^1|^3 = \frac{6\sqrt{2}}{\cos \iota (\cos \iota + \sin \iota)^4} \frac{d}{d\iota} \ln \int \frac{\cos \iota}{\overline{\kappa}_1(\iota)} d\iota.$$

Полученное уравнение интегрируется вдоль первой характеристики:

$$|\nabla\omega^1| = \sqrt{2}\sqrt[3]{3}e^\iota \sqrt[3]{\text{const} + \int \frac{e^{-3\iota}}{\overline{\kappa}_1(\iota)(\cos \iota + \sin \iota)^4} d\iota \int \frac{\cos \iota}{\overline{\kappa}_1(\iota)} d\iota}, \quad (3.25)$$

это означает, что вдоль первой характеристики модуль градиента канонической переменной находится с помощью квадратур, если известна зависимость $\overline{\kappa}_1 = \overline{\kappa}_1(\iota)$.

Интеграл (3.25) позволяет найти инвариант, значения которого не изменяются вдоль первой характеристической линии:

$$\frac{e^{-3\iota} |\nabla\omega^1|^3}{6\sqrt{2}} - \int \frac{e^{-3\iota}}{\overline{\kappa}_1(\iota)(\cos \iota + \sin \iota)^4} d\iota \int \frac{\cos \iota}{\overline{\kappa}_1(\iota)} d\iota = \text{const}. \quad (3.26)$$

Принимая далее во внимание, что вдоль первой характеристической линии

$$|\nabla\omega^1|^2 = 2 \left(\frac{d\omega^1}{d\iota} \right)^2 \overline{\kappa}_1^{-2},$$

и предполагая, что каноническая переменная ω^1 возрастает с увеличением

⁸Ясно, что справедливо равенство

$$\gamma + \frac{\pi}{4} = \iota.$$

угла ι , находим уравнение

$$\frac{d\omega^1}{d\iota} = \frac{\sqrt[3]{3}e^\iota}{\overline{\kappa}_1} \sqrt[3]{\text{const} + \int \frac{e^{-3\iota}}{\overline{\kappa}_1(\iota)(\cos \iota + \sin \iota)^4} d\iota \int \frac{\cos \iota}{\overline{\kappa}_1(\iota)} d\iota}, \quad (3.27)$$

из которого каноническая переменная ω^1 вдоль характеристической линии первого семейства определяется с помощью одной дополнительной квадратуры:

$$\omega^1 = \sqrt[3]{3} \int \sqrt[3]{\text{const} + \int \frac{e^{-3\iota}}{\overline{\kappa}_1(\iota)(\cos \iota + \sin \iota)^4} d\iota} \frac{e^\iota}{\overline{\kappa}_1} d\iota. \quad (3.28)$$

Аналогично выводятся соотношения вдоль характеристик второго семейства, параметрические уравнения которых удобно принять в форме

$$x_1 = - \int \frac{\sin \iota}{\overline{\kappa}_2(\iota)} d\iota, \quad x_3 = \int \frac{\cos \iota}{\overline{\kappa}_2(\iota)} d\iota,$$

где угол ι имеет прежний смысл и определяет угол наклона нормали характеристик второго семейства к оси x_1 .

Модуль градиента канонической переменной вдоль второй характеристической линии находится квадратурами

$$|\nabla \omega^1| = \sqrt{2} \sqrt[3]{3} e^{-\iota} \sqrt[3]{\text{const} + \int \frac{e^{3\iota}}{\overline{\kappa}_2(\iota)(\cos \iota + \sin \iota)^4} d\iota \int \frac{\sin \iota}{\overline{\kappa}_2(\iota)} d\iota}. \quad (3.29)$$

Соответствующий инвариант, значения которого не изменяются вдоль второй характеристической линии, есть

$$\frac{e^{3\iota} |\nabla \omega^1|^3}{6 \sqrt{2}} - \int \frac{e^{3\iota}}{\overline{\kappa}_2(\iota)(\cos \iota + \sin \iota)^4} d\iota \int \frac{\sin \iota}{\overline{\kappa}_2(\iota)} d\iota = \text{const}. \quad (3.30)$$

Учитывая соотношение

$$|\nabla \omega^1| = 2 \left(\frac{d\omega^1}{d\iota} \right)^2 \overline{\kappa}_2^2,$$

справедливое вдоль второй характеристической линии, и полагая, что каноническая переменная ω^1 убывает при возрастании угла ι , приходим к следующей формуле:

$$-\omega^1 = \sqrt[3]{3} \int \sqrt[3]{\text{const} + \int \frac{e^{3\iota}}{\overline{\kappa}_2(\iota)(\cos \iota + \sin \iota)^4} d\iota} \frac{e^{-\iota}}{\overline{\kappa}_2} d\iota, \quad (3.31)$$

справедливой вдоль характеристик второго семейства.

Анализируя соотношения вдоль характеристик, записанные для сторон криволинейного характеристического четырехугольника, диагоналями которого являются дуги изостатических траекторий, можно, учитывая, что переменные ω^1 , ω^3 не изменяются на соответствующих диагоналях, получить условия, характеризующие геометрию поля скольжения при осесимметричном течении. Эти условия, в отличие от таковых для плоского пластического течения, являются неизмеримо более сложными.

Литература

- [1] Радаев Ю.Н. О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1990. №1. С. 86-94.
- [2] Радаев Ю.Н. К теории трехмерных уравнений математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2001. №2(20). С. 55-86.
- [3] Радаев Ю.Н. К теории трехмерных уравнений математической теории пластичности // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2003. №5. С. 102-120.
- [4] Радаев Ю.Н., Бахарева Ю.Н., Рябова Ю.Н. Автомодельные решения осесимметричной задачи теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2003. №2(28). С. 96-112.
- [5] Радаев Ю.Н., Бахарева Ю.Н. К теории осесимметричной задачи математической теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2003. №4(30). С. 125-139.
- [6] Аминов Ю.А. Геометрия векторного поля. М.: Наука, 1990. 208 с.
- [7] Мак-Коннел А.Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.
- [8] Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
- [9] Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 698 с.
- [10] Фрохт М.М. Фотоупругость. Поляризационно-оптический метод исследования напряжений. Т. I. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. 432 с.
- [11] Папкович П.Ф. Теория упругости. М.; Л.: Оборонгиз, 1939. 640 с.

Поступила в редакцию 18/I/2004;
в окончательном варианте — 24/II/2004.

COMPLEMENTARY THEOREMS OF THE PLANE STRAIN AND AXIALLY-SYMMETRIC PROBLEMS OF THE MATHEMATICAL PLASTICITY

© 2004 Y.N. Radayev⁹

The equations of plane-strain and axially-symmetric problems of the mathematical theory of plasticity are considered in the case when a stress state corresponds to an edge of the Tresca prism. The consideration is based on an approach developed in a number of previous discussions devoted to three-dimensional problem of the mathematical plasticity. This approach employs the isostatic co-ordinate net and the three stress principal line invariants. The latter permits the separation of a space variable in the three-dimensional static equilibrium equations of the mathematical plasticity, thus allowing to develop a new treatment of the plane-strain and axially-symmetric equations. A number of new theorems related to the geometry of the stress principal lines, static and kinematic equations valid along the slip lines are obtained as a complement contribution to the plane-strain and axially-symmetric analysis.

Paper received 18/*I*/2004.

Paper accepted 24/*II*/2004.

⁹Radayev Yuri Nickolaevich (radayev@ssu.samara.ru), Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.