

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЯКОБИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПЕРИОДОВ¹

© 2004 Х.А. Чиханов²

В статье вводится новый класс эллиптических функций, обобщающих классические функции Якоби, и даются различные соотношения, аналогичные формулам для функций Якоби.

Эллиптические функции Якоби, $\operatorname{sn}(u) \equiv \operatorname{sn}(u, \kappa)$ и $\operatorname{cn}(u) \equiv \operatorname{cn}(u, \kappa)$ вводятся как обращения интегралов [1, гл. 5, § 24] (см. также [3–5, 6])

$$u = \int_0^s \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\kappa^2 t^2)}}, \quad u = \int_c^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2 + k^2 t^2)}}. \quad (1)$$

Здесь $0 < \kappa < 1$ и $\kappa' = \sqrt{1 - \kappa^2}$. Предполагается, что ветвь корня принимает вещественные значения при вещественных $t \in (0, 1)$. Функция $\operatorname{sn}(u)$ является двоякопериодической с периодами $4K$ и $2iK'$, где

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\kappa^2 t^2)}}, \quad K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\kappa'^2 t^2)}}. \quad (2)$$

Мы видим, что второй период у $\operatorname{sn}(u)$ чисто мнимый. Таким образом, функция $\operatorname{sn}(u)$ является "неполноценной" эллиптической функцией, так как ее нельзя использовать при $0 < \kappa < 1$ в случае произвольных периодов (то же относится к функциям Якоби $\operatorname{cn}(u)$ и $\operatorname{dn}(u)$). Целью настоящей статьи является устранение этого досадного исторически возникшего противоречия.

В приложениях пытаются "улучшить" функции Якоби, считая, что $\kappa^2 < 0$ (т.е. фактически вводя комплексные значения κ). Однако, даже при любом комплексном κ , интегралы K и K' зависят от κ ; поэтому они связаны между собой функциональной зависимостью и не могут быть выбраны произвольно.

Мы рассмотрим ниже обобщение функций Якоби, следуя схеме, изложенной в монографии Гурвица [3, гл. 3]. Обозначим новые функции, со-

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

²Чиханов Хамит Александрович, кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

ответственно, через $\text{sne}(u)$, $\text{cne}(u)$ и $\text{dne}(u)$. При необходимости можно учитывать зависимость от параметров, вводя три аргумента:

$$\text{sne}(u) = \text{sne}(u, \lambda, \kappa), \quad \text{cne}(u) = \text{cne}(u, \lambda, \kappa), \quad \text{dne}(u) = \text{dne}(u, \lambda, \kappa),$$

Для упрощения рассуждений мы будем опускать в записи зависимость от параметров. Итак, пусть

$$\begin{aligned} \sqrt{\wp(u) - e_1} &= \frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)} = \frac{\text{cne}(u)}{\text{sne}(u)}, & \sqrt{\wp(u) - e_2} &= \frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)} = \frac{\text{dne}(u)}{\text{sne}(u)}, \\ \sqrt{\wp(u) - e_3} &= \frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)} = \frac{1}{\text{sne}(u)}, & \lambda &= \sqrt{e_1 - e_3}, \quad \kappa = \sqrt{e_2 - e_3}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\wp(u)$ — пэ-функция Вейерштрасса [1, ч. 1, гл. 1], а σ_1 , σ_2 , σ_3 , σ — целые функции, связанные с рядами:

$$\begin{aligned} \theta_1(v) &= i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n h^{(2n-1)^2/4} z^{2n-1} = \\ &= 2 \left\{ h^{1/4} \sin \pi v - h^{9/4} \sin 3\pi v + h^{25/4} \sin 5\pi v - \dots \right\}, \quad z = e^{i\pi v}, \quad h = e^{i\pi\tau}, \quad \tau = \omega'/\omega, \\ \theta_2(v) &= \sum h^{(2n-1)^2/4} z^{2n-1} = 2h^{1/4} \left\{ \cos \pi v + h^2 \cos 3\pi v + h^6 \sin 5\pi v + \dots \right\}, \\ \theta_3(v) &= \sum h^{n^2} z^{2n} = 1 + 2h \cos 2\pi v + 2h^4 \cos 4\pi v + 2h^9 \cos 6\pi v + \dots, \\ \theta_0(v) &= \sum (-1)^n h^{n^2} z^{2n} = 1 - 2h \cos 2\pi v + 2h^4 \cos 4\pi v - 2h^9 \cos 6\pi v + \dots, \\ \sigma(u) &= \exp \left\{ \frac{\eta u^2}{2\omega} \right\} \frac{2\omega}{\theta'_1} \theta_1(v), \quad \sigma_k(u) = \exp \left\{ \frac{\eta u^2}{2\omega} \right\}, \frac{\theta_{k+1}(v)}{\theta_{k+1}}, \quad \theta'_1 = \theta'_1(0), \\ \theta_k &= \theta_k(0), \quad k = 1..3, \quad \theta_4(v) \equiv \theta_0(v), \quad \theta'_1 = \pi \theta_2 \theta_3 \theta_0, \quad u = 2\omega v. \end{aligned} \quad (4)$$

Из (3) с учетом соотношений (4) получаем [3, ч. 2, гл. 2–3] :

$$\begin{aligned} e_1 - e_2 &= \left(\frac{\pi}{2\omega} \right)^2 \theta_0^4, \quad \lambda = \sqrt{e_1 - e_3} = \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) \theta_3^2, \quad \kappa = \sqrt{e_2 - e_3} = \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) \theta_2^2, \\ \text{sne}(u) &= \frac{2\omega}{\pi \theta_2 \theta_3} \frac{\theta_1(v)}{\theta_0(v)}, \quad \text{cne}(u) = \frac{\theta_0}{\theta_2} \frac{\theta_2(v)}{\theta_0(v)}, \quad \text{dne}(u) = \frac{\theta_0}{\theta_3} \frac{\theta_3(v)}{\theta_0(v)}, \\ \text{sne}^2(u) + \lambda^2 \text{sne}^2(u) &= 1, \quad \text{dne}^2(u) + \kappa^2 \text{sne}^2(u) = 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Исторически сложилось так, что функции Якоби $\text{sn}(u)$ и $\text{cn}(u)$ рассматривались как естественное обобщение тригонометрических функций $\sin(u)$ и $\cos(u)$. Поэтому было наложено условие $e_1 - e_3 = 1$ или $\lambda = 1$. Далее мы не будем накладывать это условие.

Подставляя в дифференциальное уравнение для функции Вейерштрасса

$$\wp'(u) = -2 \sqrt{(\wp(u) - e_1)(\wp(u) - e_2)(\wp(u) - e_3)} \quad (6)$$

выражения из (3), получим: $\wp'(u) = -2\text{cne}(u)\text{dne}(u)/\text{sne}^3(u)$. Далее, дифференцируя соотношение $\wp(u) - e_3 = 1/\text{sne}^2 u$ и соотношения (5), приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{du} \text{sne}(u) = \text{cne}(u)\text{dne}(u), \quad \frac{d}{du} \text{cne}(u) = -\lambda^2 \text{sne}(u)\text{dne}(u),$$

$$\frac{d}{du} \operatorname{dne}(u) = -\kappa^2 \operatorname{sne}(u) \operatorname{cne}(u). \quad (7)$$

С учетом (5) система расщепляется на отдельные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{ds}{du} &= \sqrt{(1-\lambda^2 s^2)(1-\kappa^2 s^2)}, & \frac{dc}{du} &= -\sqrt{(1-c^2)(\lambda^2 - \kappa^2 + \kappa^2 c^2)}, \\ \frac{d\delta}{du} &= -\sqrt{(1-\delta^2)(\kappa^2 - \lambda^2 + \lambda^2 \delta^2)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как функции $\theta_2(v)$, $\theta_3(v)$, $\theta_0(v)$ — четные, а $\theta_1(v)$ — нечетная, то функции $\operatorname{sne}(u)$ и $\operatorname{dne}(u)$ — четные, а $\operatorname{sne}(u)$ — нечетная. По аналогии с функциями Якоби зададим нормировку $\operatorname{sne}(0) = \operatorname{dne}(0) = 1$, $\operatorname{sne}(0) = 0$.

Теперь, интегрируя уравнения (8), получаем 3 эллиптических интеграла

$$\begin{aligned} u &= \int_0^s \frac{dt}{\sqrt{(1-\lambda^2 t^2)(1-\kappa^2 t^2)}}, & u &= \int_c^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(\lambda^2 - \kappa^2 + \kappa^2 t^2)}}, \\ u &= \int_\delta^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(\lambda^2 t^2 + \kappa^2 - \lambda^2)}}, \end{aligned} \quad (9)$$

являющихся обращениями функций $s = \operatorname{sne}(u)$, $c = \operatorname{cne}(u)$ и $\delta = \operatorname{dne}(u)$, соответственно. Нетрудно заметить, что, например, $\operatorname{sne}(u) = (1/\lambda) \operatorname{sn}(\lambda u, \kappa/\lambda)$.

Следует отметить, что интегралы вида (9) изучались Эйлером, Лежандром, Абелем, а также Якоби [7, с. 280]. На исторический очерк в конце этой монографии мне любезно указал проф. В.Е. Воскресенский.

Рассмотрим теперь группу преобразований новых функций при сдвигах аргументов. Напомним, что преобразования тэта-рядов определяются табл. 1 [3, ч. 2, гл. 2, § 8].

Таблица 1

	1/2	$\tau/2$	$(1+\tau)/2$	1	τ	$1+\tau$
θ_1	θ_2	$im\theta_0$	$m\theta_3$	$-\theta_1$	$-k\theta_1$	$k\theta_1$
θ_2	$-\theta_1$	$m\theta_3$	$-im\theta_0$	$-\theta_2$	$k\theta_2$	$-k\theta_2$
θ_3	θ_0	$m\theta_2$	$im\theta_1$	θ_3	$k\theta_3$	$k\theta_3$
θ_0	θ_3	$im\theta_1$	$m\theta_2$	θ_0	$-k\theta_0$	$-k\theta_0$
z	iz	$z\sqrt{h}$	$iz\sqrt{h}$	$-z$	hz	$-hz$
m	$-im$	$m/\sqrt{h}$	$-im/\sqrt{h}$	$-m$	m/h	$-m/h$
k	$-k$	k/h	$-k/h$	k	k/h^2	k/h^2

Здесь $z = \exp(i\pi v)$, $m = 1/(z\sqrt{h})$. Первая строка таблицы — сдвиги аргумента v . Например, $\theta_2(v + (1+\tau)/2) = -im\theta_0(v)$. Вторая (вспомогательная) часть таблицы содержит преобразования величин z , m . Несложно убедиться, что преобразования новых функций даются табл. 2.

Таблица 2

	ω	ω'	$\omega + \omega'$	2ω	$2\omega'$	$2\omega + 2\omega'$
sne	$\frac{1}{\lambda} \frac{\text{cne}}{\text{dne}}$	$\frac{1}{\lambda\kappa} \frac{1}{\text{sne}}$	$\frac{1}{\kappa} \frac{\text{dne}}{\text{cne}}$	$-\text{sne}$	sne	$-\text{sne}$
cne	$-\kappa' \frac{\text{sne}}{\text{dne}}$	$-\frac{i}{\kappa} \frac{\text{dne}}{\text{sne}}$	$-\frac{i\kappa'}{\kappa} \frac{1}{\text{cne}}$	$-\text{cne}$	$-\text{cne}$	cne
dne	$\frac{\kappa'}{\lambda} \frac{1}{\text{dne}}$	$-\frac{i}{\lambda} \frac{\text{cne}}{\text{sne}}$	$i\kappa' \frac{\text{sne}}{\text{cne}}$	dne	$-\text{dne}$	$-\text{dne}$

Например, $\text{sne}(u + \omega + \omega') = -\frac{i\kappa'}{\kappa} \frac{1}{\text{cne}(u)}$.

Из табл. 2 следует, что введенные функции являются двоякопериодическими, причем периоды те же, что и у соответствующих функций Якоби. Более того, порядок и расположение нулей и полюсов также совпадают (см. табл. 3, рис. 1).

Таблица 3

	Нули	Полюсы	Периоды
$\text{sne}(u)$	$2n\omega + 2n'\omega'$	$2n\omega + (2n' + 1)\omega'$	$4\omega, 2\omega'$
$\text{cne}(u)$	$(2n + 1)\omega + 2n'\omega'$	$2n\omega + (2n' + 1)\omega'$	$4\omega, 2\omega + 2\omega'$
$\text{dne}(u)$	$(2n + 1)\omega + (2n' + 1)\omega'$	$2n\omega + (2n' + 1)\omega'$	$2\omega, 4\omega'$

Также несложно, следуя Гурвицу [3, ч. 2, гл. 3, § 4], получить формулы сложения:

$$\begin{aligned}
 \text{sne}(u + v) &= \frac{\text{sne}(u)\text{cne}(v)\text{dne}(v) + \text{sne}(v)\text{cne}(u)\text{dne}(u)}{1 - \lambda^2\kappa^2\text{sne}^2(u)\text{sne}^2(v)}, \\
 \text{cne}(u + v) &= \frac{\text{cne}(u)\text{cne}(v) - \lambda^2\text{sne}(u)\text{dne}(u)\text{sne}(v)\text{dne}(v)}{1 - \lambda^2\kappa^2\text{sne}^2(u)\text{sne}^2(v)}, \\
 \text{dne}(u + v) &= \frac{\text{dne}(u)\text{dne}(v) - \kappa^2\text{sne}(u)\text{sne}(v)\text{cne}(u)\text{cne}(v)}{1 - \lambda^2\kappa^2\text{sne}^2(u)\text{sne}^2(v)},
 \end{aligned} \tag{10}$$

а также вытекающие из (10) и (5) соотношения

$$\begin{aligned}
 \text{cne}^2(u) - \text{cne}^2(v) &= \lambda^2 [\text{dne}^2(u)\text{sne}^2(v) - \text{dne}^2(v)\text{sne}^2(u)], \\
 \text{dne}^2(u) - \text{dne}^2(v) &= \kappa^2 [\text{cne}^2(u)\text{sne}^2(v) - \text{cne}^2(v)\text{sne}^2(u)], \\
 \text{sne}(u + v)\text{sne}(u - v) &= \frac{\text{sne}^2(u) - \text{sne}^2(v)}{1 - \lambda^2\kappa^2\text{sne}^2(u)\text{sne}^2(v)}, \\
 \text{cne}(u + v)\text{cne}(u - v) &= \frac{\text{cne}^2(u) - \lambda^2\text{sne}^2(v)\text{dne}^2(u)}{1 - \lambda^2\kappa^2\text{sne}^2(u)\text{sne}^2(v)},
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{dne}(u+v)\operatorname{dne}(u-v) = \frac{\operatorname{dne}^2(u) - \kappa^2 \operatorname{cne}^2(u) \operatorname{sne}^2(v)}{1 - \lambda^2 \kappa^2 \operatorname{sne}^2(u) \operatorname{sne}^2(v)}. \quad (11)$$

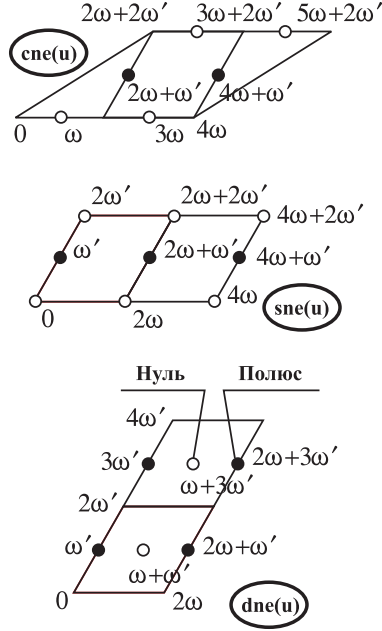


Рис. 1. Нули и полюсы функций $\operatorname{sne}(u)$, $\operatorname{cne}(u)$ и $\operatorname{dne}(u)$
Из (11) вытекают формулы для двойных аргументов:

$$\begin{aligned} \operatorname{sne}(2u) &= \frac{2\operatorname{sne}(u)\operatorname{cne}(u)\operatorname{dne}(u)}{1 - \lambda^2 \kappa^2 \operatorname{sne}^4(u)}, \\ \operatorname{cne}(2u) &= \frac{\operatorname{cne}^2(u) - \lambda^2 \operatorname{sne}^2(u) \operatorname{dne}^2(u)}{1 - \lambda^2 \kappa^2 \operatorname{sne}^4(u)}, \\ \operatorname{dne}(2u) &= \frac{\operatorname{dne}^2(u) - \kappa^2 \operatorname{sne}^2(u) \operatorname{cne}^2(u)}{1 - \lambda^2 \kappa^2 \operatorname{sne}^4(u)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Последние формулы допускают обращение:

$$\begin{aligned} \operatorname{sne} \frac{u}{2} &= \pm \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cne}(u)}{1 + \operatorname{dne}(u)}}, & \operatorname{cne} \frac{u}{2} &= \pm \sqrt{\frac{\operatorname{dne}(u) + \operatorname{cne}(u)}{1 + \operatorname{dne}(u)}}, \\ \operatorname{dne} \frac{u}{2} &= \pm \sqrt{\frac{\operatorname{dne}(u) + \operatorname{cne}(u)}{1 + \operatorname{cne}(u)}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Табл. 2 и формулы (11)–(13) дают значения новых функций в отдельных точках вида $(n * \omega + n' * \omega')/2^m$, $(m, n, n' \in \mathbb{Z})$.

Таблица 4

	0	$\frac{\omega}{2}$	ω	$\frac{3\omega}{2}$	2ω	$\frac{5\omega}{2}$	3ω	$\frac{7\omega}{2}$
sne	0	$\frac{1}{\sqrt{\lambda(\kappa'+\lambda)}}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda(\kappa'+\lambda)}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{\lambda(\kappa'+\lambda)}}$	$-\frac{1}{\lambda}$	$-\frac{1}{\sqrt{\lambda(\kappa'+\lambda)}}$
cne	1	$\sqrt{\frac{\kappa'}{\kappa'+\lambda}}$	0	$-\sqrt{\frac{\kappa'}{\kappa'+\lambda}}$	-1	$-\sqrt{\frac{\kappa'}{\kappa'+\lambda}}$	0	$\sqrt{\frac{\kappa'}{\kappa'+\lambda}}$
dne	1	$\sqrt{\frac{\kappa'}{\lambda}}$	$\frac{\kappa'}{\lambda}$	$\sqrt{\frac{\kappa'}{\kappa'+\lambda}}$	1	$\sqrt{\frac{\kappa'}{\lambda}}$	$\frac{\kappa'}{\kappa'+\lambda}$	$\sqrt{\frac{\kappa'}{\kappa'+\lambda}}$

Окончание табл. 4

	$\frac{\omega'}{2}$	$\frac{\omega+\omega'}{2}$	$\omega + \frac{\omega'}{2}$	$\frac{3\omega+\omega'}{2}$	$2\omega + \frac{\omega'}{2}$	$\frac{5\omega+\omega'}{2}$	$3\omega + \frac{\omega'}{2}$	$\frac{7\omega+\omega'}{2}$
sne	$\frac{i}{\sqrt{\lambda\kappa}}$	$\sqrt{\frac{\kappa+i\kappa'}{\kappa\lambda^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda\kappa}}$	$\sqrt{\frac{\kappa-i\kappa'}{\kappa\lambda^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{\lambda\kappa}}$	$-\sqrt{\frac{\kappa-i\kappa'}{\kappa\lambda^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{\lambda\kappa}}$	$-\sqrt{\frac{\kappa-i\kappa'}{\kappa\lambda^2}}$
cne	$\sqrt{\frac{\kappa+\lambda}{\kappa}}$	$\sqrt{\frac{-i\kappa'}{\kappa}}$	$\sqrt{\frac{\kappa-\lambda}{\kappa\lambda}}$	$-\sqrt{\frac{i\kappa'}{\kappa}}$	$-\sqrt{\frac{\kappa+\lambda}{\kappa}}$	$-\sqrt{\frac{-i\kappa'}{\kappa}}$	$-\sqrt{\frac{\kappa-\lambda}{\kappa\lambda}}$	$\sqrt{\frac{i\kappa'}{\kappa}}$
dne	$\sqrt{\frac{\lambda+\kappa}{\lambda}}$	$\sqrt{\frac{\kappa'}{\kappa'+i\kappa}}$	$\sqrt{\frac{\kappa-\lambda}{\kappa}}$	$\sqrt{\frac{\kappa'}{\kappa'-i\kappa}}$	$\sqrt{\frac{\lambda+\kappa}{\lambda}}$	$\sqrt{\frac{\kappa'}{\kappa'+i\kappa}}$	$\sqrt{\frac{\kappa-\lambda}{\kappa}}$	$\sqrt{\frac{\kappa'}{\kappa'-i\kappa}}$

Напомним, что $\kappa' = \sqrt{\lambda^2 - \kappa^2}$. При проверке табл. 4 необходимо учитывать изменение аргументов комплексных значений функций (см. рис. 2), а также различные соотношения типа $\sqrt{\lambda + \kappa} + i\sqrt{\lambda - \kappa} = \sqrt{2(\kappa + i\kappa')}$.

Обратимся теперь к интегралам (10). Они являются многозначными аналитическими функциями и должны рассматриваться на двулистной римановой поверхности с точками ветвления $\pm 1/\lambda$, $\pm 1/\kappa$. Подынтегральные функции при этом будут однозначны, если на римановой поверхности сделать два разреза. Возможны 2 варианта (см. рис. 3). На рис. 3 слева разрез L_2 проходит через точку $t = \infty$. Цикл L_1 является базисным циклом первой гомологической группы H_1 , совпадающей с аддитивной группой целых чисел Z [5, гл. 2]. Циклы L_1 и L_2 (а также L_3 и L_4) гомотопически эквивалентны. Несложный подсчет показывает, что интеграл по циклу L_1

$$\int_{L_1}^{(\frac{1}{\lambda}+, -\frac{1}{\lambda}+)} \frac{dt}{\sqrt{(1 - \lambda^2 t^2)(1 - \kappa^2 t^2)}} = 4K_e.$$

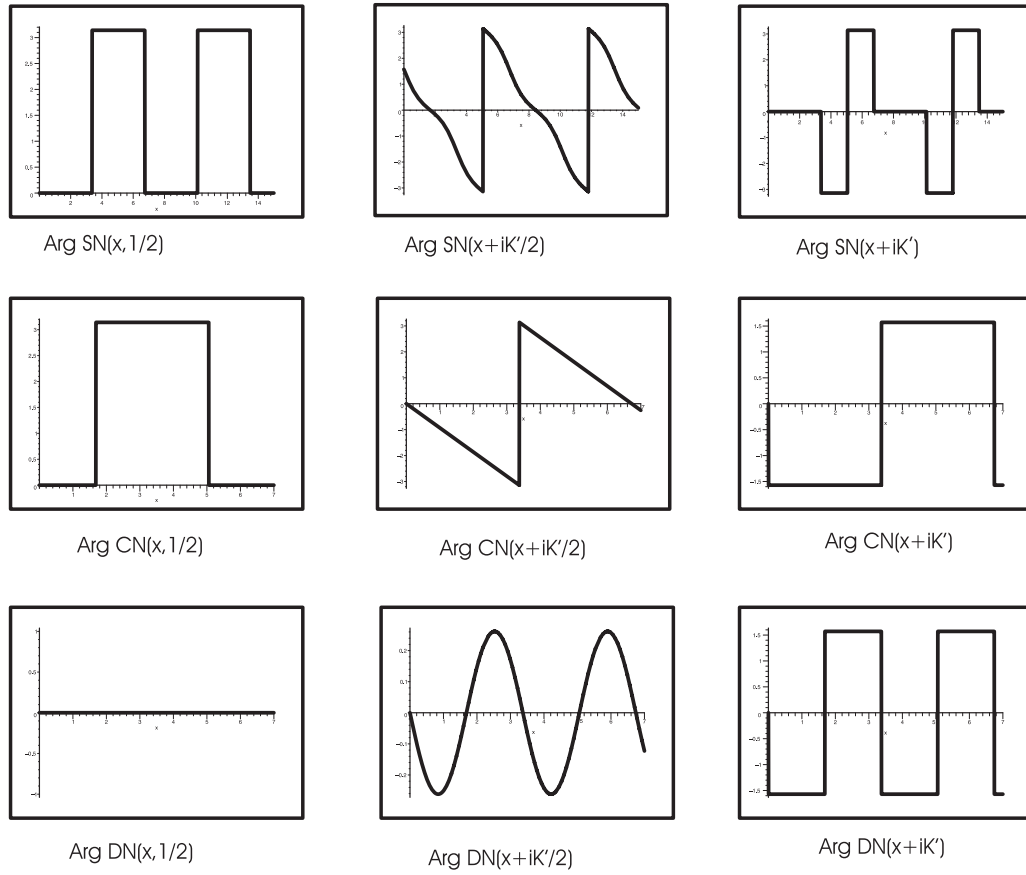


Рис. 2. Аргументы комплексных значений функций $\text{sn}(u)$, $\text{cn}(u)$ и $\text{dn}(u)$; ($\omega = K = 1.7$, $\omega' = iK' = 2.2i$)

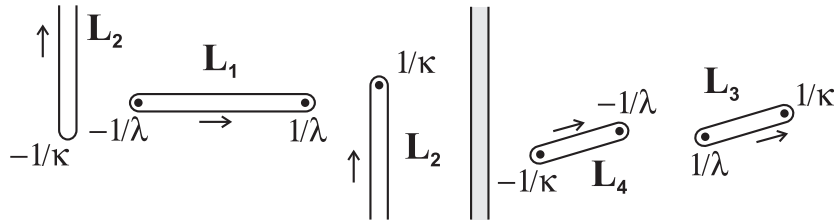


Рис. 3. Базисные циклы для подгрупп

Аналогично

$$\int_{L_3}^{(\frac{1}{\lambda} +, \frac{1}{\kappa} +)} \frac{dt}{\sqrt{(1 - \lambda^2 t^2)(1 - \kappa^2 t^2)}} = -2iK'_e,$$

где

$$K_e = \int_0^{1/\lambda} \frac{dt}{\sqrt{(1 - \lambda^2 t^2)(1 - \kappa^2 t^2)}}, \quad K'_e = \int_0^{1/\lambda} \frac{dt}{\sqrt{(1 - \lambda^2 t^2)(1 - \kappa'^2 t^2)}}. \quad (15)$$

Мы использовали здесь обозначения Похгаммера [6, п. 12.43]. Таким образом, подтверждается, что $\operatorname{snu}(u)$ действительно имеет периоды $4K_e$ и $2iK'_e$.

Будем считать для простоты, что κ вещественно $0 < \kappa < 1$, а λ — комплексное число, близкое к 1 (в силу аналитичности эти ограничения для нас несущественны). Если подставить выражения для λ и κ из (5) через тэта-ряды, то, согласно классической теории, $K_e = \omega$ и $iK'_e = \omega'$. Оставим доказательство этого достаточно тонкого результата пытливому читателю.

Отметим, наконец, что можно ввести аналог функций Глешера [6, 22.122]

$$\begin{aligned} \operatorname{sce}(u) &= \frac{\operatorname{sne}(u)}{\operatorname{cne}(u)}, & \operatorname{sde}(u) &= \frac{\operatorname{sne}(u)}{\operatorname{dne}(u)}, & \operatorname{cse}(u) &= \frac{\operatorname{cne}(u)}{\operatorname{sne}(u)}, \\ \operatorname{cde}(u) &= \frac{\operatorname{cne}(u)}{\operatorname{dne}(u)}, & \operatorname{dse}(u) &= \frac{\operatorname{dne}(u)}{\operatorname{sne}(u)}, & \operatorname{dce}(u) &= \frac{\operatorname{dne}(u)}{\operatorname{cne}(u)}, \end{aligned} \quad (16)$$

и исследовать их аналогичным образом.

Заключение

1. Классические эллиптические функции Якоби $\operatorname{sn}(u)$, $\operatorname{cn}(u)$ и $\operatorname{dn}(u)$ не являются "чистокровными" эллиптическими функциями (в силу взаимосвязи K и K').
2. Введенные в данной статье функции $\operatorname{sne}(u)$, $\operatorname{cne}(u)$ и $\operatorname{dne}(u)$ определены для любого параллелограмма периодов.
3. $\operatorname{Sne}(u, 1, \kappa) \equiv \operatorname{sn}(u, \kappa)$, $\operatorname{cne}(u, 1, \kappa) \equiv \operatorname{cn}(u, \kappa)$, $\operatorname{dne}(u, 1, \kappa) \equiv \operatorname{dn}(u, \kappa)$; то есть при $\lambda = 1$ введенные функции совпадают с классическими функциями Якоби. При этом сохраняются все известные для функций Якоби соотношения.

Автор выражает благодарность участникам семинаров проф. В.Е. Воскресенскому и проф. Ю.Н. Радаеву за полезные замечания.

Литература

- [1] Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1976. 304 с.
- [2] Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 368 с.
- [3] Гурвиц А. Теория аналитических и эллиптических функций. Л.; М.: ГТТИ, 1933. 344 с.
- [4] Милн-Томсон Л. Эллиптические функции Якоби и тэта-функции (в справочнике по специальным функциям под ред. М. Абрамовича и И. Стиган). М.: Наука, 1979. С. 380–400.
- [5] Хуа Р., Теплиц В. Гомология и фейнмановские интегралы. М.: Мир, 1969. 224 с.

- [6] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. М.: Физматгиз, 1963. 516 с.
- [7] Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. М.: Наука, 1988. Т. 2. 304 с.

Поступила в редакцию 5/*XII*/2003;
в окончательном варианте — 5/*XII*/2003.

**THE ELLIPTIC JACOBI FUNCTIONS
AND THEIR GENERALIZATIONS IN THE CASE
OF ARBITRARY PERIODS³**

© 2004 Ch.A. Chikhanov⁴

In the paper a new class of elliptic functions (generalizing the classical Jacobi functions) is introduced. Relations for generalized elliptic functions analogues those valid for Jacobi's elliptic functions are obtained.

Paper received 5/*XII*/2003.

Paper accepted 5/*XII*/2003.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Y.N. Radayev.

⁴Chikhanov Chamit Alexandrovich, Dept. of Partial Differential Equations, Samara State University, Samara, 443011, Russia.